

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

85. Band, Heft 1

25. Oktober 1960

S. 1-240

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

Lapko, A. F. und L. A. Ljusternik: *Mathematische Tagungen und Konferenzen in der UdSSR. Uspechi mat. Nauk* 13, Nr. 5 (83), 121—166 (1958) [Russisch]. Bericht mit ausführlichem Literaturverzeichnis.

● **Arbeiten der dritten mathematischen Unions-Tagung Moskau, Juni—Juli 1956.** [Trudy tret'ego vsesojuznogo matematičeskogo s'ezda Moskva, Ijuń-Ijul' 1956.] **Band 3: Übersichtsartikel.** Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1958. 599 S. R. 37,65 [Russisch].

Die Arbeiten werden einzeln unter der Abkürzung Trudy tret'ego vsesojuzn. mat. S'ezda, Moskva, Ijuń—Ijul' 1956 in diesem Zbl. angezeigt. — Band 1 und 2 siehe dies. Zbl. 73, 2; Band 4 ist 1959 erschienen und wird später angezeigt werden.

● **Bronstein, I. N. und K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschule.** Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1958. XII, 548 S. mit 427 Abb. DM 22,50.

Übersetzung der 6. Auflage des russischen Originals (3. Auflage s. dies. Zbl. 52, 241). Das in handlichem Format in Plastikfolie ausgestattete Nachschlagewerk eignet sich gut für den häufigen Gebrauch. Die deutsche Ausgabe ist noch durch einen Abschnitt über Variationsrechnung von H. Miller vervollständigt worden.

● **Schaaf, William L.: Recreational mathematics.** Washington: National Council of Teachers of Mathematics 1958. 151 p. \$ 1,20.

Gut geordnetes Verzeichnis vieler Bücher, Schriften und Abhandlungen zu Fragen der rekreativen Mathematik. Etwa der Hälfte der 56 Abschnitte der acht Kapitel gehen einführende und orientierende Bemerkungen voraus. *R. Sprague.*

● **Johnson, Donovan A.: Paper folding for the mathematics class.** Washington: National Council of Teachers of Mathematics 1958. 32 p. \$ 0,75.

● **Drenkhahn, Friedrich (herausgegeben von): Der mathematische Unterricht für die sechs- bis fünfzehnjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland.** Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1958. 377 S. Ln. DM 30,—.

Analog zum Bericht über den Mathematikunterricht für die sechzehn- bis einundzwanzigjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland (vgl. dies. Zbl. 58, 243), der auf Anregung der internationalen mathematischen Unterrichtskommission (IMUK) verfaßt wurde und auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Amsterdam 1954 erschien und unter der fachkundigen Leitung von H. Behnke stand, erschien nun, vier Jahre später, wiederum anläßlich des internationalen Mathematikerkongresses 1958 in Edinburgh eine Zusammenstellung unter dem Titel: *Der mathematische Unterricht für die sechs- bis fünfzehnjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland.* Diesmal zeichnet als verantwortlicher Herausgeber F. Drenkhahn, der sich über eine umfassende Unterrichtserfahrung in allen Schulgattungen von der Grundschule bis zur Hochschule ausweisen kann. Obgleich sich verschiedene Mitarbeiter zum Worte melden, präsentiert sich das Werk in einer selten homogenen Weise und dürfte weit über die Grenzen der Bundesrepublik hinaus nachhaltige Beachtung finden. Der erste Teil des Buches ist dem Schulwesen in der Bundesrepublik und der Entwicklung des mathematischen Unterrichtes seit dem letzten IMUK-Bericht gewidmet. Hier werden geographische, wirtschaftliche und statistische Aspekte behandelt, um dann gewissen didaktisch-philosophischen Überlegungen des alten und des neuen Unterrichtssystems Platz zu machen. Für diese Betrachtungen zeichnen F. Drenkhahn, E. Fettweis, W. Breidenbach, K. Brauer und H. Lohmeyer. Der zweite Teil beschäftigt sich mit dem problematischeren Gebiet der Psychologie und des mathematischen

Unterrichts. W. Arnold setzt sich dabei über den Begabungswandel in der Gegenwart, K. Strunz über die Psychologie im Dienste der Unterrichts- und Erziehungsaufgaben der Mathematiklehrer auseinander, und zum Schluß berichtet B. Inhelder über einen Beitrag der Entwicklungspsychologie zum mathematischen Unterricht. Die drei Verff. haben sich ihrer schwierigen Aufgabe in souveräner Art entledigt. Der dritte Teil, wiederum von F. Drenckhahn abgefaßt, setzt sich mit dem zentralen Problem der Pädagogik im mathematischen Unterricht auseinander und läßt dabei prominente Vertreter der alten wie der neuen Schule zu Worte kommen (Klein, Poincaré, Lietzmann, Pólya, Denk u. a. m.). Die weiteren sieben Teile sind den verschiedenen Schulstufen und Typen gewidmet, nämlich: Vierter Teil: Die Grundschule, mit Beiträgen von E. Fettweis, K. Kreuzer, F. Löwenhaupt. Fünfter Teil: Die Volksschuloberstufe, mit Beiträgen von W. Breidenbach und F. Löwenhaupt. Sechster Teil: Sonderschulen (Hilfsschulen und Blindenschulen) von W. Horn und H. Garbe. Siebenter Teil: Berufsschulen, vertreten durch F. W. Wolff, E. Sternel, A. W. Christensen. Achter Teil: Die Mittelschule, dargestellt von W. Schwark und K. G. Brauer. Neunter Teil: Das Gymnasium, behandelt von H. Rau, K. Kreutzer, F. Denk, H. Martens, A. Baur. Zehnter Teil: Besondere Schulformen (Landerziehungsheim, Waldorfschulen, Blindenschulen), mit den Beiträgen von H. Dücker, H. Baravalle und F. Mittelsten Scheid. Elfter Teil: Der mathematische Unterricht der Mädchen, dargestellt von A. Aymanns. Ein sorgfältig zusammengestelltes und sehr umfangreiches Literaturverzeichnis beschließt die vorliegende Sammlung. Das Werk sollte von jedem Lehrer, der auf irgend einer Stufe Mathematikunterricht erteilt, gelesen werden, denn es stellt mehr als nur eine Berichterstattung dar. *H. P. Künzi.*

Freudenthal, H.: Report on a comparative study of methods of initiation into geometry. Euclides, Groningen 34, 289—306 (1959).

Geschichte.

Gnedenko, B. V.: Über einige Aufgaben der Geschichte der Mathematik. Trudy tret'ego vsesojuzn. mat. S'ezda, Moskva, Ijuń-Ijul' 1956 3, 579—583 (1958) [Russisch].

Biermann, Kurt-R. und Jürgen Mau: Überprüfung einer frühen Anwendung der Kombinatorik in der Logik. J. symbolic Logic 23, 129—132 (1959).

Verff. verweisen auf Plutarch: De stoicorum repugnantiis 29, 1047 c d und Quaestiones conviviales VIII 9,732f, woselbst berichtet wird, Hipparch habe festgestellt, aus 10 Aussagen entstanden 103.049 (oder 101.049) bejahende und 310.952 verneinende Aussagen. Eine Erklärung der umstrittenen, jedoch vermutlich richtig überlieferten Zahlen stellt sich bei keinem der in Erwägung gezogenen Ansätze ein. *J. E. Hofmann.*

Thomas, Ivo: A 12th century paradox of the infinite. J. symbolic Logic 23, 133—134 (1959).

Adam v. Balsham stellt in der Ars disserendi von 1132 (ed. L. Minici-Paluello, Rom 1956, 92/93) fest, daß eine unendliche Menge zu einer ihrer unendlichen Teilmengen äquivalent sein kann. *J. E. Hofmann.*

Voos, C. J.: Die Kaninchenaufgabe von Fibonacci. Euclides, Groningen 34, 108—109 (1958) [Holländisch].

Verf. gibt die lateinische Fassung und eine niederländische Übersetzung der auf die Rekursionsformeln $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ führenden Aufgabe. *J. E. Hofmann.*

Zedlitz, Otto: Nochmals: Der „Kristall“ auf Dürers Stich „Melencolia I“. Forsch. Fortschr. 33, 153—156 (1959).

Verf. wendet gegen Stecks als gesucht bezeichnete Deutung des Körpers (dies. Zbl. 81, 7) als Diamantkristall ein, daß Dürer wahrscheinlich keinen rein kristallisierten Rohdiamant kannte und daß die Größe des Körpers und sein Chagrin gegen den Diamant, aber auch gegen andere Kristalle spricht. Er sieht in dem Block das Symbol des Anorganischen, Toten und Dauernden.

J. E. Hofmann.

Rosen, Edward: The editions of Maurolico's mathematical works. Scripta math. 24, 59—76 (1959).

Sehr verdienstvolle bibliographische Studie unter Aufzählung und Berichtigung zahlreicher durch fortwährendes Abschreiben falscher Angaben in der Literatur weitergeschleppter Irrtümer.

J. E. Hofmann.

● **Kepler, Johannes:** Gesammelte Werke. Bd. XVI: Briefe 1607—1611. Bd. XVII: Briefe 1612—1620. Bd. XVIII: Briefe 1620—1630. Herausgegeben von Max Caspar. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung 1954. 482 S. Geh. DM 32,—; Halbperg. DM 40,—; 1955. 535 S. Geh. DM 35,—; Halbperg. DM 43,—; 1959. 592 S. Geh. DM 40,—; Halbperg. DM 48,—.

(Bd. XIII, XIV, XV s. dies. Zbl. 43, 3). — Bd. XVI umfaßt die Schriftstücke Nr. 434—626, und zwar 63 Briefe von Kepler, 120 an Kepler und 10 zwischen Dritten. Die Korrespondenz erstreckt sich vom Sommer 1607 bis Ende 1611 und umfaßt die letzten Prager Jahre. Im Mittelpunkt stehen astronomische und optische Fragen (im Zusammenhang mit dem Erscheinen der Astronomia nova von 1609 und der Dioptrice von 1611). Besonderes wissenschaftliches Interesse verdient der Briefwechsel mit D. Fabricius und J. G. Brengger, sowie Keplers Eintreten für Galilei im Streit um dessen Nuncius sidereus (1610). Inzwischen wandeln sich Keplers Lebensverhältnisse zum Ungünstigen; er verliert 1611 Söhnchen und Frau; Rudolph II. wird auch in Böhmen abgesetzt und Kepler findet nach manchem Hin und Her als Landschaftsmathematiker in Linz eine neue Stelle, bleibt jedoch auf Wunsch des dem Tode nahen Kaisers bis zu dessen Ende in Prag. Bd. XVII enthält die Schriftstücke Nr. 627—883, nämlich 72 Briefe von Kepler, 177 an Kepler und 8 zwischen Dritten. Die bis Mitte 1620 führende Korrespondenz fällt in die unruhigen Jahre vor und zu Beginn des 30jährigen Krieges. In Linz verweigert Kepler aus Gewissensgründen die vorbehaltlose Anerkennung der Andreaeschen Konkordienformel und wird deshalb vom Abendmahl ausgeschlossen. Nur langsam erholt er sich von diesem Schlag. Er geht 1613 eine zweite sehr glückliche Ehe ein und bringt in wiedergewonnener Schaffenskraft 1615 die berühmte Doliometrie, 1617 die Ephemeriden bis 1620, 1618 die Epitome astronomiae Copernicanae und 1619 die tief-sinnige Harmonice mundi an die Öffentlichkeit. Zunehmende Sorgen bereitet ihm das Schicksal der 1615 als Hexe verklagten Mutter, um derentwillen er 1617 nach Württemberg geht, um beim Herzog persönlich zu appellieren. Der wissenschaftliche Briefwechsel bezieht sich vor allem auf astronomische Fragen; im Vordergrund steht die Korrespondenz mit J. H. Bayer, M. Bernegger, M. Maestlin, S. Marius, W. Schickard und P. Crüger. — In den Nachberichten wird der Inhalt der Briefe stichpunktartig umrissen und eine Reihe von schwerverständlichen Einzelheiten eingehender behandelt. — Diese Bände sind ebenso hervorragend ausgestattet wie der größtenteils noch von M. Caspar (†1956) vorbereitete und von Fr. Hammer im Sinne des bisherigen verdienstvollen Herausgebers ergänzte Band XVIII. Mit ihm wird der Briefwechsel (Nr. 884—1146, 8 Nachtragstücke) abgeschlossen. Es handelt sich um 105 Briefe von Kepler selbst, um 135 an ihn gerichtete und um 41 zwischen Dritten gewechselte. Der persönliche Teil der Korrespondenz wird in den ersten Jahren bestimmt durch das Ringen um das Schicksal der Mutter, die erst nach langen und schwierigen Auseinandersetzungen 1621 freikommt und bald darauf stirbt. Die Kepler so sehr am Herzen liegenden Glaubensfragen führen zu dem von den Vertretern der Andreaeschen Richtung nicht weiter berücksichtigten Glaubensbekenntnis (1623). Die wissenschaftliche Arbeit in dem in-

zwischen von den Bayern besetzten Linz, wo den Evangelischen wachsend Schwierigkeiten bereitet werden, gehört einerseits dem Abschluß der *Epitome Astronomiae Copernicanae* (1620/21), andererseits der Berechnung einer für die astronomischen Zwecke tauglichen Logarithmentafel (1624/25), dann der Herausgabe der Rudolphinischen Tafeln (Ulm 1627), der Frucht mehr als 25jährigen unermüdlichen Schaffens, und schließlich den Ephemeriden von 1621/30 (Sagan 1630). Die unsichere Lage in Linz und wachsende Geldverlegenheit veranlassen Kepler, in Wallensteins Dienste überzutreten (1628); freilich kann er sich in seinem neuen Wohnsitz Sagan nicht eingewöhnen und reist nach Wallensteins Absetzung (1630) zur persönlichen Geldtendmachung rückständiger Gehaltsforderungen nach Linz, stirbt jedoch überraschend in Regensburg. In der wissenschaftlichen Korrespondenz mit M. Bernegger, P. Guldin, J. B. Hebenstreit, Ph. Müller, P. Crüger und W. Schickard geht es vor allem um die Auseinandersetzung mit den Fachleuten, die sich nur schwer zur Annahme der Keplerschen Ansichten entschließen können; leider fehlen viele Briefe, so daß eine Fülle interessanter Fragen offen bleibt. Das Feststellbare ist in die wieder mit großer Sorgfalt verfaßten Nachberichte aufgenommen.

J. E. Hofmann.

Vooyo, C. J.: Ferraris Erfindung. Euclides, Groningen 34, 200—204 (1959) [Holländisch].

Cardano (Opera, Lyon 1663, IV, 294) schildert Ferraris Reduktion der Gleichung $x^4 + p x^2 + q x + r = 0$ auf $(x^2 + t)^2 \equiv (2t - p)x^2 - qx + (t^2 - r)$ mit verschwindender in t kubischer Diskriminante in sehr dunkeln Worten. Verf. gibt eine an Ferraris Beispiel $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ anschließende Erklärung des Textes.

J. E. Hofmann.

Miller, Maximilian: Leibniz' erster Entwurf zur Begründung der Infinitesimalrechnung. Wiss. Z. Hochschule Verkehrswesen Dresden 5, 285—291 (1957).

Verf. gibt eine deutsche Übersetzung des Leibnizschen Entwurfes über die Kreisquadratur nach der (unzulänglichen) Ausgabe bei C. I. Gerhardt (Eisleben 1858) wieder, der auch in Gerhardt: Leibnizens math. Schriften V, Halle 1858, 89—92 (nicht ganz vollständig) enthalten ist. Der Entwurf ist keineswegs der erste, stammt auch nicht aus dem Jahr 1673, sondern vom Ende 1675. Daß Leibniz von Huygens in die Problemstellung der höheren Analysis eingeführt wurde, ist ebenso unrichtig wie die so oft wiederholte Behauptung, Barrow habe 1669 seinen Cambridger Lehrstuhl angesichts der mathematischen Leistungen Newtons freiwillig an diesen abgetreten: in Wahrheit wurde Barrow zu dieser Zeit als Kaplan Karls II. in ein höheres Staatsamt berufen und hat seinen Schüler als seinen Nachfolger empfohlen.

J. E. Hofmann.

Biermann, Kurt-R. und Margot Faak: G. W. Leibniz und die Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit bei J. de Witt. Forsch. Fortschr. 33, 168—173 (1959).

Jak. Bernoulli hatte im Januar-Heft 1701 der „Hannoverschen Monatlichen Auszüge aus allerhand neu-herausgegebenen, nützlichen und artigen Büchern“ einen Hinweis auf de Witts ursprünglich nur in 30 Exemplaren gedrucktes anonymes Schriftchen über Leibrenten (d. Haag 1671, ed. D. Bierens de Haan, Haarlem 1879) gelesen. Vergeblich bittet er Leibniz in Briefen der Jahre 1703/05 um Übersendung des Werkes, das Leibniz damals für unbedeutend hielt, jedoch in seinen Büchern nicht finden konnte. Ersichtlich war ihm entfallen, daß er durch Fr. Walter 1672 auf de Witts Schrift hingewiesen worden war, diese vermutlich 1676 in Amsterdam erworben und unter Beifügung kritischer Bemerkungen exzerpiert hatte. Kennzeichnende Textproben dieser Aufzeichnung (LH 2, V, 2; Bl. 30/31 u. 39/40) zeigen, daß Leibniz die Schwäche der Überlegungen de Witts wohl erkannt hat, ohne jedoch zu selbständigen Neuformulierungen zu kommen. Verff. geben die historischen Zusammenhänge unter Rückgriff auf die ganze einschlägige Zweitliteratur sorgfältig wieder.

J. E. Hofmann.

Smirnov, V. I.: Leonhard Euler (zum 250. Geburtstag). Vestnik Akad. Nauk SSSR 27, Nr. 3, 61—68 (1957) [Russisch].

Simonov, N. I.: Die Entwicklung der Theorie der Differentialgleichungen durch Leonhard Euler. Uspechi mat. Nauk 13, Nr. 5 (83), 223—228 (1958) [Russisch].

Autoreferat der Doktordissertation.

• Winter, Eduard: Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746—1766. Dokumente für das Wirken Leonhard Eulers in Berlin. Zum 250. Geburtstag. Berlin: Akademie-Verlag 1957. XIII, 393 S. 1 Bildnis. Geb. DM 28,50.

Die vom Verf. zusammen mit seiner Frau Maria herausgegebenen, von dem damaligen ständigen Sekretär der Akademie, dem Philosophen J. S. H. Formey verfaßten Protokollauszüge der Berliner Akademie sind für die Beurteilung der Arbeitsweise Eulers und seiner Berliner Tätigkeit (seit 1741 als ordentliches Mitglied der Akademie und Leiter der Sternwarte, seit 1744 Direktor der mathematischen Abteilung, 1766 Rückkehr nach Petersburg) von größtem Interesse. Zwar sind die Registres von C. G. J. Jacobi nach Euleriana bereits untersucht und ist das Ergebnis auch veröffentlicht worden (Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke L. Eulers, herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fußschen Liste der Eulerschen Werke ergänzt von P. Stäckel und W. Ahrens, Leipzig 1908; vgl. auch G. Eneström, Verzeichnis der Schriften L. Eulers, 2 Lieferungen, Leipzig 1901 und 1913). Indessen sind dazu Richtigstellungen und Ergänzungen erforderlich; außerdem werden die Registres für eine wissenschaftliche Biographie eine wichtige Grundlage bilden. In der Einleitung gibt der Verf. eine sehr ansprechende Skizze des Lebensablaufs Eulers vom Standpunkt des Historikers aus unter besonderer Heraushebung der die Zeit in Berlin betreffenden Ereignisse: Berufung von Petersburg in die Berliner Akademie, sein Ringen um die neue Akademie, seine Stellung zu Maupertuis, dem Präsidenten der Akademie und zur Aufklärung, Weggang nach Petersburg. In den Anmerkungen werden vielfach die Lebens- und Berufsdaten der vorkommenden Persönlichkeiten gegeben; den Abschluß bildet ein Personenregister. Alle historisch interessierten Mathematiker müssen es dem Verf. danken, daß er durch die Herausgabe der Registres die Möglichkeit gibt, in diese über Euler und die Mathematiker der damaligen Zeit so aufschlußreichen Dokumente Einsicht zu nehmen. Die Bemerkung des Verf., daß die „Registres“ bald nach dem Weggang Eulers nach Petersburg aufhören, beruht — wie Ref. feststellte — auf einem Mißverständnis zwischen dem damaligen Leiter des Akademiearchivs (s. Einleitung, S. IX) und dem Verf.; die „Registres“ sind bis zum 18. 2. 1800 fortgesetzt. Die daran vom Verf. geknüpften Folgerungen sind hinfällig. (Vgl. dazu Kurt-R. Biermann, Einige Euleriana..., Sammelbd. zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers, Berlin 1959. S. 33, Anmerkung bei der Korrektur.) Nicht erwähnt Verf. auch den Bericht von G. Eneström über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie (J.-Ber. Deutsch. Math.-Ver. 22 (2), 191-205 (1913). Vgl. auch die Besprechung von J. O. Fleckenstein Deutsche Literaturzeitung 80, 97-99 (1959).

O. Volk.

Marian, Victor: Le manuscrit d'arithmétique numérique de Iacob Partenie. Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Cluj, Inst. Calcul, Studii Cerc. Mat. 8, 291—301, russ. und französ. Zusammenfassg. 301 (1958) [Rumänisch].

La bibliothèque de la Filiale de Cluj de l'Académie de la R. P. R. possède un manuscrit latin de 57 pages qui date du XVIII^e siècle et qui porte le titre: Elementa Arithmeticae Numericae. L'A. semble avoir été Iacob Partenie, un moine de Blaj. Le manuscrit s'occupe des nombres entiers, de leur classification, de la règle de trois, de la règle d'association et des fractions. Le manuscrit est rédigé en partie d'après le livre de Maximilien Höll: Elementa mathematica, imprimé à Cluj en 1755, et a probablement servi à Partenie comme notes de cours.

Französ. Zusammenfassg.

Biermann, Kurt-R.: Zum Verhältnis zwischen Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauß. *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, math.-naturw. R.* 8 (1958/59), 121—130 (1959).

Biermann, Kurt-R.: Über die Förderung deutscher Mathematiker durch Alexander von Humboldt. Sonderdruck aus: *Alexander von Humboldt 14. 9. 1769—6. 5. 1859. Gedenkschrift zur 100. Wiederkehr seines Todestages.* Berlin, Akademie-Verlag. S. 83—159 (1959).

Biermann, Kurt-R.: Zur Geschichte der Ehrenpromotion Gotthold Eisensteins. *Forsch. Fortschr.* 32, 332—335 (1958).

Verf. gibt die von ihm wiederaufgefundenen Abschriften des Antrags von E. E. Kummer und N. W. Fischer (7. II. 1845) auf die Ehrenpromotion in Breslau und Eisensteins Dankschreiben (27. III. 1845) heraus — beides aus J. Schusters Nachlaß stammend. In der gründlichen ergänzenden Studie über die näheren Begleitumstände vermutet er (wohl zu Recht), daß sich Jacobi, der den Antrag veranlaßt hat, jedoch damals mit Eisenstein nicht gut stand, einer Aufforderung A. v. Humboldts nicht zu versagen vermochte. *J. E. Hofmann.*

Rumjancev, V. V.: Der große russische Gelehrte A. M. Ljapunov (zum 100. Geburtstag). *Vestnik Akad. Nauk SSSR* 27, Nr. 6, 44—49 (1957) [Russisch].

Barnard, G. A.: Thomas Bayes — a biographical note. *Biometrika* 45, 293—315 (1958).

Žautykov, O. A.: Die Mathematik in Kasachstan seit den Sowjet-Jahren. *Akad. Nauk Kazach. SSR, Trudy Sekt. Mat. Mech.* 1, 5—24 (1958) [Russisch].

Bericht mit Literaturverzeichnis (114 Nummern).

Sierpiński, Wacław: The Warsaw school of mathematics and the present state of mathematics in Poland. *Polish Review* 4, Nr. 1/2, 13 p. (1959).

Freudenthal, Hans: Einige Züge aus der Entwicklung des mathematischen Formalismus. *Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser.* 7, 1—19 (1959).

Mit Recht sieht Verf. eine der Hauptschwierigkeiten beim algebraischen Anfangsunterricht in der mangelnden Konsequenz der angewendeten Bezeichnungen, die ihren Grund in der Entwicklungsgeschichte dieser Symbole hat, und in den Gegensätzlichkeiten gegenüber dem normalen sprachlichen- und Interpunktions-Gebrauch. Er führt an eindringlichen Beispielen den wahrscheinlich nur aus psychologischen Gründen erklärbaren Wechsel von Bezeichnungen vor, wobei er sich ausschließlich auf das in weiterem Kreis wirksame gedruckte Material bezieht, und schließt mit aufschlußreichen Bemerkungen über die wechselvolle Geschichte der Indexschreibweise, die sich (wohl auch aus satztechnischen Gründen) nur ganz langsam durchgesetzt hat. *J. E. Hofmann.*

Novotný, Miroslav, Karel Svoboda und Miloš Zlámal: Zum 60. Geburtstag Otakar Borůvkas. *Časopis Mat.* 84, 236—250 (1959) [Tschechisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Vladimír Aleksandrovič Fok. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 13, Nr. 22 (Ser. Fiz. Chim. 4), Dem Akad.-Mitglied V. A. Fok zum 60. Geburtstage gewidmet, 5—13 (1959) [Russisch].

Schwarz, Štefan: Akademiemitglied Vladimír Kořínek, 60 Jahre. *Časopis Mat.* 84, 222—235 (1959) [Tschechisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Gel'fond, A. O., A. F. Leont'ev und B. V. Šabat: Aleksej Ivanovič Markuševič (zum fünfzigsten Geburtstage). *Uspechi mat. Nauk* 13, Nr. 6 (84), 213—220 (1958) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Bakel'man, I. Ja., M. Š. Birman und O. A. Ladyženskaja: Solomon Grigořevič Michlin (zum fünfzigsten Geburtstag). Uspechi mat. Nauk **13**, Nr. 5 (83), 215—221 (1958) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Smithies, F.: John von Neumann. J. London math. Soc. **34**, 373—384 (1959). Mit Schriftenverzeichnis.

A. Sanchez Perez. Gac. mat., Madrid **11**, 3—5 (1959) [Spanisch].

Liber, A. E., Ju. E. Penzov und P. K. Raševskij: Viktor Vladimirovič Vagner (zum fünfzigsten Geburtstag). Uspechi mat. Nauk **13**, Nr. 6 (84), 221—227 (1958) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Heinrich, H.: Friedrich-Adolf Willers †. MTW, Z. modern. Rechentechn. Automat. **6**, 43 (1959).

Smithies, F.: John Ronald Womersley. J. London math. Soc. **34**, 370—372 (1959).

Mit Schriftenverzeichnis.

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

Chakrabarti, S. C.: A few identities on higher differences. Math. Student **26**, 17—19 (1958).

Sei $(a^x)_n = \prod_{v=0}^{n-1} (a^{x-v} - 1)$ und $(a^x)_0 = 1$; ferner sei $S_v^{(n)}$ die Summe der $\binom{n}{v}$ Produkte aus je v der n Faktoren a^0, \dots, a^{n-1} und $S_0^{(n)} = 1$, $S_v^{(n)} = 0$ für $v < 0$ sowie $v > n$. Bewiesen wird neben zwei verwandten Formeln

$$(a^{x+n-1})_n = \sum_{v=0}^n (a^{\delta+n-1})_{n-v} (a^{x-\delta})_v a^{v\delta} S_v^{(v)} S_v^{(n)}.$$

Schließlich wird gezeigt, daß eine Determinante $|\alpha_{ik}|$, deren Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gemäß

$$\alpha_{ik} = a^{k-1} \sum_{v=1}^k (-1)^{v-1} \alpha_{k-v+1,k} S_{k-v}^{(i-1)} S_{v-1}^{(i-k+v-2)} / S_{k-v+1}^{(k-v+1)}$$

($i > k$) von den über ihnen stehenden abhängen, den Wert

$$|\alpha_{ik}|_{i,k=1,\dots,n} = \prod_{k=1}^n \left\{ \sum_{v=0}^{k-1} (-1)^v \alpha_{k-v,k} S_v^{(k-1)} \right\}$$

besitzt.

I. Paasche.

Levine, Jack: A binomial identity related to rhyming sequences. Math. Mag. **32**, 17—74 (1958).

Bewiesen wird unter anderem die Identität

$$A_{n_1 \dots n_r} \equiv \prod_{e=1}^r \binom{N_e - 1}{n_e - 1} = \sum_{e=1}^r \left[\binom{N_e - 2}{n_e - 2} \prod_{\sigma=1}^{e-1} \binom{N_\sigma - 2}{n_\sigma - 1} \prod_{\tau=e+1}^r \binom{N_\tau - 1}{n_\tau - 1} \right]$$

mit $\binom{-1}{-1} = 1 = \prod_1^0 = \prod_{r+1}^r$ und $n = \sum_{e=1}^r n_e = \sum_{e=1}^{\sigma-1} n_e + N_\sigma$ ($\sigma = 1, \dots, r$; $\sum_1^0 = 0$; alle $n_e \geq 1$, ganz). Addiert man alle $\binom{n-1}{r-1}$ Werte A bei festem n, r , so entsteht die Stirlingzahl 2. Art (meist \mathfrak{S}_n^r genannt) $\sum A_{n_1 \dots n_r} = B_{nr}$ mit der bekannten erzeugenden Funktion $\frac{(e^x - 1)^r}{r!} = \sum_{n=r}^{\infty} B_{nr} \frac{x^n}{n!}$. Setzt man $\sum_{r=1}^n B_{nr} = C_n$,

so gilt also $e^{e^x-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}$. Die A, B, C sind mehrfach untersucht worden.

Das obige $A_{n_1 \dots n_r}$ ist die Anzahl derjenigen Darstellungen von $\sum_{\varrho=1}^r \varrho n_{\varrho}$ als n -gliedrige Summe mit Summanden ϱ in der Anzahl n_{ϱ} , bei denen die neuauftretenden Summanden ϱ die Reihenfolge $\varrho = 1, \dots, r$ innehalten. — Man findet: $A_{n_1 \dots n_r}$ ist der Koeffizient von $x_1^{N_1} \dots x_r^{N_r}$ in der Entwicklung von $\prod_{\varrho=1}^{r-1} (1 - x_{\varrho})^{-n_{\varrho}}$. — Das Schema des Wortes Mississippi, nämlich 12332332442 (mit $n = 11$ und $r = 4$), gehört zu einer Menge von $A_{1442} = 840$ Schemata (Fehler). Solche Schemata heißen Reimfolgen.
I. Paasche.

Narayana, T. V. and G. E. Fulton: A note on the compositions of an integer. Canadian math. Bull. 1, 169—173 (1958).

Die $\binom{n-1}{r-1}$ verschiedenen r -Komp(ositionen) der festen natürlichen Zahl $n = t_1 + \dots + t_r$ (alle $t_{\varrho} \geq 1$, ganz) geben Anlaß zu Vektoren $T = (T_1, \dots, T_r)$, wo $T_{\varrho} = t_1 + \dots + t_{\varrho}$ ist. Mit $T_{\varrho} \geq T'_{\varrho}$ für $\varrho = 1, \dots, r$ „dominiert“ T über T' (anderenfalls dominiert T' über T bzw. sind T und T' unvergleichbar; T dominiert also über sich). Die Anzahl D_r solcher dominierten T' ist bei gegebenem dominierendem T aus der Rekursion $1 = D_1$, $0 = \sum_{\varrho=1}^k \binom{-T_{\varrho}}{k-\varrho} D_{\varrho}$ zu entnehmen, die bis $k = r$ fortzusetzen ist. Hat man drei r -Komp. von n , so gilt

$$\min [\max (T_{\varrho}, T'_{\varrho}), T''_{\varrho}] = \max [\min (T_{\varrho}, T'_{\varrho}), \min (T'_{\varrho}, T''_{\varrho})]$$

für $\varrho = 1, \dots, r$, d. h. die r -Komp. bilden einen distributiven Verband ($1 \leq r \leq n$). In naheliegender Weise werden den r -Komp. von n die $(n-r+1)$ -Komp. von n eineindeutig zugeordnet. Bei Paaren von r -Komp. kehrt sich dann entweder das Dominieren um, oder die Unvergleichbarkeit bleibt erhalten (Anti-Isomorphismus). Es folgt eine Anwendung dieses Sachverhalts auf die r -Komp. mit lauter $t_{\varrho} \leq 2$ und ≥ 2 .
I. Paasche.

Freudenthal, Hans: Ein kombinatorisches Problem von biochemischer Herkunft. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 61, 253—258 (1958).

Un „mot“, dans ce papier, est une suite ordonnée de trois lettres choisies dans l'ensemble des quatre lettres a, b, c, d . Un ensemble S de mots s'appelle une phrase si $xyz \& uvv \in S \Rightarrow yzu \& zuv \notin S$. On cherche toutes les phrases avec le plus grand nombre de mots. Une phrase ne peut contenir plus de vingt mots. On trouve 5 schemas, donnant naissance à 14 types dont les modes de construction sont étudiés.

A. Sade.

Higgins, P. J.: Disjoint transversals of subsets. Canadian J. Math. 11, 280—285 (1959).

Ist A eine beliebige Menge und sind A_1, \dots, A_n endlich viele nicht notwendig verschiedene Teilmengen von A , so wird unter einer partiellen Transversalen der Länge r von A_1, \dots, A_n eine Teilmenge $T \leq A$ mit $|T| = r$ verstanden, deren Elemente in wenigstens r verschieden indizierten A_i liegen. Verf. beweist folgenden Satz, der Resultate von P. Hall bzw. O. Ore [dies. Zbl. 10, 345 bzw. Duke math. J. 22, 625—639 (1955)] enthält und verallgemeinert: Genau dann besitzen A_1, \dots, A_n m paarweise disjunkte partielle Transversalen der Längen r_1, \dots, r_m , wenn je k verschieden indizierte A_i zusammen wenigstens a_k verschiedene Elemente von A enthalten ($k = 1, \dots, n$). Dabei kann man a_k auf zwei verschiedene Weisen erklären:

$$a_k = \sum_{j=n-k+1}^n \left[\sum_{r_i \geq j} 1 \right] = \sum_{i=1}^m \text{Ex} (r_i, n-k).$$

(Der Exzess $\text{Ex} (s, t)$ ist $s - t$ wenn $s \geq t$, sonst Null.) Eine unmittelbare Kon-

sequenz dieses Satzes ist ein Resultat von Ryser bzw. Gale über Matrizen von Nullen und Einsen [vgl. dies. Zbl. 79, 11 bzw. Pacific J. Math. 7, 1073—1082 (1957)].

P. Dembowski.

Bruijn, N. G. de: Generalization of Polya's fundamental theorem in enumerative combinatorial analysis. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 59—69 (1959).

Soient D & R deux ensembles finis; G & H deux groupes de permutations opérant sur D et R respectivement soit \mathfrak{f} l'ensemble de toutes les applications de D dans R . On définit une relation d'équivalence dans \mathfrak{f} par $f_1 \in \mathfrak{f}$, $f_2 \in \mathfrak{f}$, $f_1 \equiv f_2 \Rightarrow \forall d \in D, \exists g \in G, h \in H, f_1(d) = h f_2(gd)$. A chaque application f est rattachée une valeur $W(f)$ qui s'appelle le poids de cette application et qui est commune à toutes les applications appartenant à une même classe de la partition précédente; on la note $W(F)$ si F est la classe $\ni f$. Un lemme précise une première expression de $\sum_F [W(F)]$; un premier théorème fournit une expression générale de cette somme, tandis que deux autres conduisent à des expressions de \sum_F obtenues par spécialisation.

A cause du grand nombre d'abréviations introduites, et qu'il ne semble guère possible de définir en peu de mots, ces expressions ne peuvent pas être reproduites ici. Applications, notamment au coloriage des côtés d'un carré avec trois couleurs, le théorème 4 donne l'expression du nombre des classes d'équivalence définies sur l'ensemble des applications de D dans D par la condition que f_1 & f_2 sont équivalentes si l'une est la transformée de l'autre par quelque permutation du groupe G . A. Sade.

Bose, R. C., and S. S. Shrikhande: On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal latin squares of order $4t + 2$. Proc. nat. Acad. Sci. USA 45, 734—737 (1959).

On connaît la conjecture d'Euler relative à l'impossibilité de construire deux carrés orthogonaux de côté $4t + 2$. Un „pairwise balanced design“ d'indice unité et de type $(v; k_1, k_2, k_3, \dots, k_m)$ est un arrangement de v objets en b blocs tel que chaque bloc contienne k_1, k_2, \dots , ou k_m objets qui soient distincts ($k_i \leq v$, $k_i \neq k_j$, $i \neq j$) et que chaque paire d'objets distincts figure toujours dans un bloc et dans un seul. Théorème. S'il existe un „pairwise balanced design“ d'indice 1 et de type $(v; k_1, \dots, k_m)$ ainsi que $q_i - 1$ carrés deux à deux orthogonaux, d'ordre k_i , alors on peut construire une série orthogonale de $q - 2$ carrés d'ordre v , q étant le plus petit des nombres q_i . Deux carrés orthogonaux d'ordre 22, dérivant du BIBD, $v = 15$, $b = 35$, $r = 7$, $k = 3$, $\lambda = 1$, sont explicitement présentés. A. Sade.

Archbold, J. W., and N. L. Johnson: A construction for Room's squares and an application in experimental design. Ann. math. Statistics 29, 219—225 (1958).

Etant donnés $2n$ signes distincts, $\dots, r, \dots, s, \dots$, on peut former $n(2n - 1)$ couples non ordonnés de deux signes différents choisis parmi ces $2n$ signes ($rs = sr$). Un carré de Room est un tableau de $2n - 1$ lignes et de $2n - 1$ colonnes tel que, dans chaque ligne (et dans chaque colonne) il y ait $n - 1$ vides et n couples rs et que, de plus, chaque paire rs , non ordonnée figure une fois et une seule dans le tableau. Le problème est possible pour $n = 1$ et 4, mais non pour $n = 2$ & 3. De telles configurations sont utilisées dans les essais expérimentaux. Les AA. en donnent une construction simple quand n est une puissance impaire de 2. La solution est en connexion avec un théorème de J. Singer (ce Zbl. 19, 5) dont une démonstration nouvelle est donnée. Tables de résultats pour les premières valeurs de n ; utilisation des carrés obtenus comme block designs. A. Sade.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

• **Gantmacher, F. R.:** Matrizenrechnung. Teil 2: Spezielle Fragen und Anwendungen. (Hochschulbücher für Mathematik. Bd. 37.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959. VII, 244 S. mit 4 Abb. Ln. DM 26,—.

Es handelt sich um den 2. Teil der Übersetzung des in diesem Zbl. 50, 248 besprochenen Buches. (1. Teil: dies. Zbl. 79, 11.)

● **Gantmacher, F. R.:** Applications of the theory of matrices. Transl. and rev. by **J. L. Brenner**, with the assistance of **D. W. Bushaw** and **S. Evanusa**. New York-London: Interscience Publishers 1959. IX, 317 p. \$ 9,00.

„Applications of the theory of matrices“ is a translation, with revisions, of the second part of „A theory of matrices“ (this Zbl. 50, 248). The first (untranslated) section contains general material which is easily available in texts in English and other Western languages. In order to make the present volume a self-contained whole, appendices and footnotes of explanation have been added. The inclusion of many references to books and articles in Western languages should make the volume more useful than a straight translation would have been. Where appropriate, references have been made to developments subsequent to 1954. From the translator's preface.

Gyires, B.: Über Determinanten, deren Elemente Integrale von Funktionen sind. Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth 3, Nr. 2, 41—48 (1957).

Das Hauptergebnis verallgemeinert einen Satz von **G. Landsberg** [Math. Ann. 69, 227—265 (1910)], welcher die Determinante $\left| \int_a^b \varphi_i(x) \psi_k(x) dx \right|$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, durch ein Integral darstellt. Hier werden die Funktionen $\varphi_i(x)$ durch gewisse Funktionsmatrizen ersetzt. Ein Spezialfall davon liefert eine der Darstellungen der verallgemeinerten Form der Gramschen Determinante. Diese wird dann noch auf die verallgemeinerten Toeplitzschen und Hankelschen Determinanten angewandt.

E. Schönhardt.

Hecht, Josef: A note on the solution of systems of linear algebraic equations. Českosl. Akad. Věd. apl. Mat. 3, 233—237 (1958) [Tschechisch].

Zum besseren Lesen werden statt der Fettschrift des Verf. Frakturbuchstaben verwendet, statt der vom Verf. mit gestürztem L bezeichneten Matrizen solche mit \mathfrak{M} . Große Frakturbuchstaben sind Matrizen, kleine Vektoren, \mathfrak{E} die (n, n) -Einheitsmatrix, \mathfrak{B} die Nullmatrix, \mathfrak{v} der Nullvektor, Striche bedeuten Spiegelungen an der Hauptdiagonale. Gegeben ist ein System von n Gleichungen mit n Unbekannten X_i , \mathfrak{x} sei der Vektor $\{X_i\}$, das System also $\mathfrak{M}\mathfrak{x} = \mathfrak{r}$, \mathfrak{M} sei regulär. Die Darstellung von \mathfrak{M} als Produkt $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{M}_1$ zweier Dreiecksmatrizen gibt folgenden Lösungsgang: Statt des gegebenen lösen wir das $(2n, 2n)$ -System

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{E} & -\mathfrak{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{r} \\ \mathfrak{v} \end{pmatrix}.$$

(ξ ist ein n -dimensionaler Vektor). Mit

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{B}^{-1} \\ \mathfrak{M}_1^{-1} & -\mathfrak{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{r} \\ \mathfrak{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{t} \\ \tau \end{pmatrix}$$

ergibt sich $\mathfrak{x} = \mathfrak{r}$. Verf. gibt noch einen zweiten Weg. Mit einer analogen Darstellung der transponierten Matrix $\mathfrak{M}' = \mathfrak{Q}_3 \mathfrak{M}_3$ und Aufstellung der n Lösungssysteme

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}' & \mathfrak{v} \\ \mathfrak{r}' - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{n}_i \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{n}_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

wo ξ eine Zahl, \mathfrak{n}_i den i -ten Grundvektor bedeutet, wird mit

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_3 & \mathfrak{v}^{-1} \\ \mathfrak{r}' \mathfrak{M}_3^{-1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{n}_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \tau \end{pmatrix}$$

die Zahl $\tau = X_i$. Den Hauptvorteil sieht Verf. in der eisernen Konsequenz des Rechenverfahrens, das die Lösung bei Anwendung von Rechenautomaten erleichtert.

L. Holzer.

Hanner, Olof: A problem of coin distribution. Nordisk mat. Tidskrift 7, 77—80, engl. Zusammenfassg. 96 (1959) [Schwedisch].

Verf. sucht eine Menge von Münzen mit den folgenden Eigenschaften. 1. Jede Münze ist kleiner als die Summe der übrigbleibenden Münzen. 2. Es ist unmöglich, die Münzen zwischen drei Personen in solcher Weise zu verteilen, daß jeder eine kleinere Summe als die beiden anderen Personen zusammen bekommt. — Es wird

gezeigt, daß vier Münzen von gleichem Werte die einzige Lösung ist. Das Münzenproblem hängt mit einem vom Verf. (dies. Zbl. 70, 393) behandelten Problem über konvexe Polyeder eng zusammen.

B. Stoll.

Rechtman-Ol'sanskaja, P. G.: Über eine Behauptung des Akademiemitgliedes A. A. Markov. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3 (75), 181—187 (1957) [Russisch].

Let $\{a_k\}_0^n$ and $\{b_k\}_0^n$ be two sequences such that $(-1)^k a_k \geq (-1)^k b_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) and let $K_{n+1}(a, b)$ denote the minimal closed convex cone which contains all points $(1, x, \dots, x^n)$, $a \leq x \leq b$. The author gives necessary and sufficient conditions for the point (s_0, \dots, s_n) which coordinates satisfy relations $(-1)^k a_k \geq (-1)^k s_k \geq (-1)^k b_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) to lie in $K_{n+1}(a, b)$. This is a generalization of some results stated by A. A. Markov in 1895, the proves of which were not published before.

S. Kurepa.

Marathe, C. R.: Note on some semimoduli of a rectangular matrix. Amer. math. Monthly 65, 259—263 (1958).

Man verallgemeinert den Begriff der Norm auf nicht-quadratische Matrizen. Es besteht noch die Ungleichung: wenn $P = \prod A_k$ quadratisch ist, so ist für jeden Eigenwert von P der Modul nicht größer als das Produkt der Normen der Faktoren. Verschiedene daran anknüpfende spezielle Resultate sind in der Arbeit noch enthalten.

J. L. Brenner.

Whiteley, J. N.: Some inequalities concerning symmetric forms. Mathematika, London 5, 49—57 (1958).

Verschiedene Verallgemeinerungen der Minkowskischen Ungleichung werden vom Verf. einem gemeinsamen Typ untergeordnet. Betrachtet werden die von einem reellen Parameter κ abhängenden symmetrischen Formen

$$T^{(n)}(a) = T^{(n)}(a_1, \dots, a_n; \kappa) = \sum \{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_m} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m} : i_1 + \dots + i_m = n\}$$

mit $\lambda_i = \binom{\kappa}{i}$ für $\kappa > 0$ und $\lambda_i = (-1)^i \binom{\kappa}{i}$ für $\kappa < 0$. Verf. beweist folgende Ungleichungen: Im Fall $\kappa < 0$ gilt

$$[T^{(n)}(a+b)]^{1/n} \leq [T^{(n)}(a)]^{1/n} + [T^{(n)}(b)]^{1/n}.$$

Für $\kappa > 0$ erhält man

$$[T^{(n)}(a+b)]^{1/n} \geq [T^{(n)}(a)]^{1/n} + [T^{(n)}(b)]^{1/n},$$

wobei noch $n < \kappa + 1$ vorausgesetzt wird, wenn κ keine ganze Zahl ist. Der Wert $\kappa = 1$ liefert eine von H. F. Bohnenblust und M. Marcus-L. Lopes (dies. Zbl. 79, 21) bewiesene Ungleichung für die elementarsymmetrischen Funktionen. Eine von A. C. Aitken vermutete Ungleichung ist der Fall $\kappa = -1$. Die Minkowskische Ungleichung ergibt sich durch Grenzübergang $\kappa \rightarrow 0$ ($\kappa < 0$). H.-J. Kowalsky.

Schneider, Hans: Note on the fundamental theorem on irreducible non-negative matrices. Proc. Edinburgh math. Soc. 11, 127—130 (1958).

Es sei $A \neq 0$ eine nicht reduzierbare (n, n) -Matrix mit nicht negativen, reellen Elementen. Dann besitzt A einen einfachen positiven Eigenwert, und zu diesem gehört ein positiver Eigenvektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ (Frobenius-Perron). Verf. gibt einen neuen Beweis zu diesem Satz, der auf den Ideen von Wielandt (dies. Zbl. 35, 291) begründet ist. Verf. beweist auch den Zusatz $\min_i x_i / \max_i x_i = [\lambda / (R - K)]^{n-1}$, worin $\lambda = \min$ (von 0 verschiedenes Element von A), $K = \min$ (Diagonalelement von A), $R = \max$ (Zeilensumme von A). J. L. Brenner.

Schwerdtfeger, H.: On the discriminant $x'Ax \cdot y'Ay - (x'Ay)^2$. Canadian math. Bull. 1, 175—179 (1958).

Scherk, Peter: On a note by H. Schwerdtfeger. Canadian math. Bull. 1, 181—182 (1958).

Zwei Beweise des folgenden Satzes: Sei A eine reelle symmetrische nichtsinguläre n -reihige Matrix, x ein n -gliedriger reeller Spaltenvektor mit $x^T A x > 0$ und $S = x^T A x \cdot A - A x x^T A$. A hat genau dann die Signatur $2 - n$, wenn $y^T S y \leq 0$ für alle reellen Spaltenvektoren $y \neq 0$ gilt, wobei Gleichheit nur im Falle $y = x$ auftritt. Der Beweis von Scherk ist der kürzere, der von Schwerdtfeger gibt dafür zusätzliche Informationen über die Eigenwerte von S . *P. Dembowski.*

Cobb, S. M.: On powers of matrices with elements in the field of integers modulo 2. *Math. Gaz.* **42**, 267—271 (1958).

Zunächst wird für $n \times n$ -Matrizen A mit Elementen aus einem beliebigen Zahlkörper gezeigt: Der Exponent der niedrigsten Potenz von A , die gleich der Nullmatrix ist, ist höchstens n . Alles folgende bezieht sich auf $n \times n$ -Matrizen mit Elementen aus dem Körper K der ganzen Zahlen mod 2 (E = Einheitsmatrix, 0 = Nullmatrix, s = natürliche Zahl, $2^s = \sigma$). Verf. beweist: Aus $A^\sigma = 0$ folgt $(E + A)^\sigma = E$ und umgekehrt; aus $A^{\sigma-1} = E$ und $|E + A| \neq 0$ folgt $(E + A)^{\sigma-1} = E$. Ist ferner A^μ die niedrigste Potenz von A , die gleich E ist, so gilt: Es gibt eine Matrix A mit $\mu = 2^n - 1$, deren charakteristisches Polynom vom n -ten Grad und in K irreduzibel ist; ist $\mu = 2^s$, so gilt $s \leq r$ mit $2^{r-1} < n \leq 2^r$. Schließlich: A und A^2 haben (in K) dasselbe charakteristische Polynom. *E. Schönhardt.*

Parodi, Maurice: A propos de la localisation des zéros de la dérivée du polynome caractéristique d'une matrice. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 1131—1133 (1958).

Unter gewissen Voraussetzungen können Schlüsse über die Wurzelverteilung der Ableitung $f'(z)$ eines charakteristischen Polynoms einer gegebenen Matrix A gezogen werden, wenn die Lage der Wurzeln des charakteristischen Polynoms $f(z)$ durch Kreisbereiche nach Gerschgorin festgelegt ist. Dabei werden grundlegende Arbeiten vom Verf. (dies. Zbl. **77**, 246), Marden (dies. Zbl. **21**, 36), Walsh [*Proc. nat. Acad. Sci. USA* **8**, 139—141 (1922)] benutzt. *F. Heigl.*

Parodi, Maurice: Sur quatre méthodes d'étude des zéros des polynomes. *Bull. Sci. math., II. Sér.* **82**, 106—117 (1958).

Verf. betrachtet das Polynom $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. 1. Nach C. Bourlet läßt sich $f(z)$ auch in folgender Determinantenform schreiben:

$$f(z) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{(n-1)!}{n!} a_1 & \frac{(n-2)!}{n!} a_2 & \dots & \frac{2}{n!} a_{n-2} & \frac{1}{n!} a_{n-1} & \frac{1}{n!} a_n \\ -n & z & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & z \end{vmatrix}.$$

Nach einer Ungleichung von M. Hadamard für Determinanten erhält Verf. für die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ die Ungleichungen:

$$|z| \leq n-1 \text{ oder } |z + a_1| \leq \frac{(n-2)!}{(n-1)!} |a_2| + \dots + \frac{1}{(n-1)!} |a_n|.$$

2. Ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} n! & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n-1)! & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1! \end{pmatrix},$$

so sind die Wurzeln von $f(z) = 0$ mit den charakteristischen Wurzeln von $C A C^{-1}$ identisch. Daraus leitet der Verf. folgende Ungleichungen ab:

$$|z| \leq n \text{ oder } |z + a_1| \leq \frac{|a_2|}{2!} + \dots + \frac{|a_n|}{n!}.$$

3. Ist $f(z)$ von der Form

$$z^n + a_p z^{n-p} + \dots + a_n \quad (p = 2, 3, \dots, n-1),$$

so gewinnt Verf. die Ungleichungen

$$|z| \leq n \quad \text{oder} \quad \frac{|z^p + a_p|}{p!} \leq \frac{|a_n|}{n!} + \dots + \frac{|a_{p+1}|}{(p+1)!}.$$

4. Ist

$$D = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

so genügen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $D A D^{-1}$ den Ungleichungen:

$$|z| \leq \frac{p+1}{p} \quad \text{oder} \quad |z^p + a_p| \leq p \left[\frac{|a_n|}{n} + \frac{|a_{n-1}|}{n-1} + \dots + \frac{|a_{p+1}|}{p+1} \right].$$

F. Heigl.

Parodi, Maurice: Sur la localisation dans le plan complexe des racines des équations abéliennes. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 2153—2154 (1959).

Gegeben sei die algebraische Gleichung

$$(1) \quad x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Nach Gerschgorin gelten für die Wurzeln von (1) die Ungleichungen

$$(2) \quad |x| \leq 1, \quad \text{oder} \quad |x + a_1| \leq \sum_{k=2}^n |a_k| = \sigma.$$

Verf. zeigt nun, daß die Lage der Wurzeln genauer präzisiert werden kann, wenn eine Abelsche Gleichung vorliegt. Geht die Gleichung (1) bei der Transformation $x = \theta(y)$ in sich über, so auch bei den folgenden Transformationen:

$$x = \theta [\theta(y)] = \theta^2 y, \quad x = \theta \{\theta [\theta(y)]\} = \theta^3 y, \dots, x = \theta^n y = \theta y.$$

Daraus folgt:

$$y = \theta^{-1} x, \quad y = \theta^{-2} x, \quad y = \theta^{-3} x, \dots, y = \theta^{-n} x = \theta^{-1} x.$$

Aus (2) leiten sich daher die Ungleichungen ab:

$$|\theta^{-k}(x)| \leq 1 \quad \text{oder} \quad |\theta^{-k}(x) + a_1| \leq \sigma \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

die zusammen mit (2) im allgemeinen eine bessere Übersicht über die Lage der Wurzeln ermöglichen.

F. Heigl.

Belardinelli, Giuseppe: Sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche generali. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett., Rend., Sci. mat. fis. chim. geol., Ser. A **92**, 75—96 (1958).

Nach früheren Untersuchungen von R. Birkeland [C. r. Acad. Sci., Paris, **171**, 1370—1372 (1920)], H. J. Mellin [Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **7**, Nr. 7,; Nr. 8 (1915); C. r. Acad. Sci., Paris **172**, 658—661 (1921)] u. a. und des Verf. [Ann. Mat. pura appl., III. Ser. **29**, 251—270 (1921); Rend. Circ. mat. Palermo **46**, 463—472 (1922); Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V. Ser. **30**, 208—211 (1921); Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur., II. Ser. **63**, 483—497 (1930)] können die Koeffizienten der Reihenentwicklungen für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade n nach den Koeffizienten dieser Gleichung durch hypergeometrische Funktionen mehrerer Veränderlicher dargestellt werden; Verf. zeigt, daß diese Koeffizienten sich linear darstellen lassen durch n feste Koeffizienten.

O. Volk.

Thacher jr., Henry C.: Generalization of concepts related to linear dependence. J. Soc. industr. appl. Math. **6**, 288—299 (1958).

Verf. verallgemeinert den Begriff der linearen Abhängigkeit im Hinblick auf die numerische Behandlung der Funktionen mehrerer Veränderlicher (Interpolation, Quadratur usw.). Betrachtet werden Polynome vom Grad n in s Veränderlichen $x^{(1)}, \dots, x^{(s)}$. Der Koeffizienten- und Argumentbereich der Polynome ist ein fester Körper. Durch Einführung einer $(s+1)$ -ten Veränderlichen $x^{(0)}$ werden die

Untersuchungen auf den Fall homogener Polynome zurückgeführt. Die Anzahl der Terme des allgemeinen homogenen Polynoms ist $W = \binom{n+s}{n}$. Verf. nennt den Punkt $y = (y^{(0)}, \dots, y^{(s)})$ eine n -gradige Kombination der Punkte $x_j = (x_j^{(0)}, \dots, x_j^{(s)})$ ($j = 1, \dots, p$), wenn es Konstante a_1, \dots, a_p mit folgender Eigenschaft gibt: Es gilt $\prod_{k=0}^s (y^{(k)})^{n_k} = \sum_{j=1}^p a_j \prod_{k=0}^s (x_j^{(k)})^{n_k}$ für alle Exponentenmengen (n_k) mit $\sum n_k = n$.

An diese Begriffsbildung schließen sich in üblicher Weise die Definitionen der n -gradigen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit und der n -gradigen Basis an. Es folgen zahlreiche Sätze über diese Begriffe, die eine weitgehende Analogie zu dem linearen Fall aufweisen. Der Begriff der n -gradigen Abhängigkeit kann außerdem auf den Begriff der linearen Abhängigkeit in einem W -dimensionalen Raum zurückgeführt werden. Als Anwendung der Resultate ergeben sich Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit von Interpolationspolynomen sowie über gewisse Quadraturformeln.

H.-J. Kowalsky.

Whaples, G.: A note on degree- n -independence. J. Soc. industr. appl. Math. 6, 300—301 (1958).

Von H. C. Thacher (vgl. die vorstehende Berechnung) wurde der Begriff der n -gradigen Unabhängigkeit eingeführt und gezeigt, daß ein homogenes Polynom vom Grad n in $s+1$ Unbestimmten nicht mehr als $\binom{n+s}{n} - 1$ n -gradig unabhängige Nullstellen besitzen kann. Verf. zeigt, daß diese Maximalzahl genau dann angenommen wird, wenn das Polynom keinen echten quadratischen Teiler besitzt. Im Fall $n = s = 2$ erhält man eine einfache geometrische Deutung dieses Resultats. Verf. zeigt jedoch an einem Beispiel, daß diese Deutung nicht auf den Fall $s > 2$ übertragen werden kann.

H.-J. Kowalsky.

Gruppentheorie:

Clifford, A. H.: Totally ordered commutative semigroups. Bull. Amer. math. Soc. 64, 305—316 (1958).

Der Aufsatz gibt einen Überblick über das im Titel bezeichnete Teilstück der Theorie der Semigruppen in den letzten zwanzig Jahren. Da hinsichtlich der Bedeutung des Terminus „Semigruppe“ in der internationalen Literatur keine Übereinstimmung besteht, werde bemerkt, daß hier — wie im Englischen üblich — mit Semigruppe das Assoziativ gemeint ist. Verf. geht in der Weise vor, daß er eine Reihe bemerkenswerter, teils wohlbekannter, teils weniger bekannter Sätze aus dem genannten Zeitraum eingehend analysiert und durch eigene Beiträge ergänzt. Die Sätze gehen auf Tamari, Klein-Barmen, Aczél, Faucett, Mostert-Shields und Verf., in einigen Fällen auch auf weitere Autoren zurück. Vorangestellt ist seines fundamentalen Charakters wegen ein älteres Theorem von Hölder mit der Ergänzung von Huntington. Die Sätze sind, um sie hinsichtlich der Prämissen und Konsequenzen und auf Zusammenhänge hin vergleichen zu können, in einer einheitlichen Terminologie formuliert. Sechs Sätze beziehen sich auf monoton geordnete Semigruppen, vier weitere auf geordnete topologische Semigruppen.

F. Klein-Barmen.

MacLane, Saunders: A proof of the subgroup theorem for free products. Mathematika, London 5, 13—19 (1958).

This is, in the author's own words, "a streamlined version" of the proof given by H. W. Kuhn (this Zbl. 47, 23) and simplified by A. J. Weir [Mathematika, London 3, 47—55 (1956)]. The coset functions of Kuhn and coset maps of Weir have virtually disappeared. Instead, a very concrete and well motivated description of the choice of the coset representatives used to construct the generators of the subgroup

results in a proof which shows particularly well just where the free factors of the subgroup come from.

Hanna Neumann.

Čarin, V. S.: Über Gruppen, die auflösbare aufsteigende invariante Reihen besitzen. Mat. Sbornik, n. Ser. 41 (83), 297—316 (1957) [Russisch].

The paper deals with groups G that are swept out by an ascending well-ordered series of normal subgroups $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_a < \dots < G_\gamma = G$ with abelian factor-groups G_{a+1}/G_a , i. e. with SI*-groups in the terminology of Kuroš, Theory of Groups, vol. II, p. 183 (this Zbl. 64, 251; for the Russian original see this Zbl. 57, 18). The author's aim is to show that under suitable additional restrictions the groups of this class are closely connected with those of other well-known classes. Theorem 1. Let G be a group and A a locally nilpotent normal subgroup of G , of finite rank. Then A possesses an ascending central series "relative to G ", (i. e. such that all the elements of G induce the identity automorphism in all the factors of the series) provided one of the following conditions is satisfied: 1. G is locally nilpotent or 2. G is locally soluble and has no proper subgroups of finite index or 3. G is an SI*-group and has no proper subgroups of finite index or 4. G is complete. In particular, a locally nilpotent group with a normal subgroup of finite rank must have a non-trivial centre. This generalizes a previous result of the author (this Zbl. 54, 11) where the corresponding fact had only been established for torsion-free locally nilpotent groups. — If all the factors in the above series have finite rank, the group shall be called an FSI*-group. Theorem 2. If G is such an FSI*-group and if in 1. G is locally nilpotent or 2. G has no proper subgroups of finite index, then G has an ascending central series, i. e. G is a ZA-group. Theorem 3. Suppose that a group G has a subgroup of finite index which is 1. locally nilpotent or 2. an FSI*-group. Then the minimal condition for normal subgroups of G implies the minimal condition for all subgroups of G . Theorem 4. Suppose that G is an FSI*-group in which the ranks of the factors G_{a+1}/G_a are not merely finite, but bounded. Then a certain finite term $G^{(s)}$ of the derived series of G has an ascending central series. This theorem generalizes the well-known theorem of Wendt that in a finite supersoluble group the derived group is nilpotent. (See also Huppert, this Zbl. 79, 38). Theorem 5. If, in particular, G is periodic and the factors have at most two generators, then $s \leq 3$. Theorem 6. If all the factors are torsionfree of rank 1 and if the cyclic factors precede the non-cyclic ones, then G has a normal subgroup H such that H is a ZA-group and G/H is an elementary 2-group, possibly infinite.

K. A. Hirsch.

Curzio, Mario: Sui sottogruppi di composizione dei gruppi finiti. Ricerche Mat. 7, 265—280 (1958).

Verf. untersucht in den beiden Verbänden $N\mathfrak{G}$, $S\mathfrak{G}$ der normalen bzw. subnormalen Untergruppen einer endlichen Gruppe \mathfrak{G} die neutralen Elemente (die mit je zwei anderen Elementen zusammen einen distributiven Unterverband erzeugen). Ist \mathfrak{G} auflösbar und \mathfrak{A} neutral in $S\mathfrak{G}$, so ist \mathfrak{A} eine charakteristische Untergruppe von \mathfrak{G} , und für jedes $\mathfrak{B} \in S\mathfrak{G}$, für welches $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \in N\mathfrak{A}$ ist, sind die beiden Indizes $(\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ teilerfremd. Ist umgekehrt $\mathfrak{A} \in N\mathfrak{G}$ und gilt für jedes $\mathfrak{B} \in N\mathfrak{G}$ die Teilerfremdheitsbedingung, so ist \mathfrak{A} neutral in $N\mathfrak{G}$, sogar wenn \mathfrak{G} nicht auflösbar ist. Nebenergebnisse: Genau dann enthält $S\mathfrak{G}$ zu jedem Element ein Komplement, wenn \mathfrak{G} direktes Produkt von einfachen Gruppen ist. Ist \mathfrak{G} auflösbar, so ist $S\mathfrak{G}$ genau dann das direkte Produkt von zwei nicht trivialen Verbänden, wenn \mathfrak{G} in das direkte Produkt von zwei eigentlichen Untergruppen mit teilerfremden Ordnungen zerlegt werden kann. Weitere Bemerkungen betreffen $S\mathfrak{G}$ für überauflösbare und $N\mathfrak{G}$ für freie Gruppen \mathfrak{G} .

H. Wielandt.

Bergström, Harald: Über gewisse Invarianten von Permutationsgruppen. 13. Skand. Mat.-Kongr., Helsinki 1957, 38—44 (1958).

Prenant comme point de départ une particularité du coefficient de corrélation de Spearman $\varrho(P) = 1 - 6d(P)/(n^2 - 1)$, $d(P) = (1/n) \sum (i - k_i)^2$, ($i = 1, 2, \dots$

$\dots, n)$, où P est une permutation de l'ensemble $(1, 2, \dots, n)$, $P = (x \rightarrow k_x)$, l'A. définit un invariant par les permutations d'un groupe et en étudie les propriétés. Soit $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un polynome homogène par rapport aux variables x et P une permutation de l'ensemble $(1, 2, \dots, n)$. Soit $f(x^P)$ le résultat obtenu en effectuant la permutation P sur $f(x)$. On pose $\bar{f}_G(x) = (1/\text{ordre de } G) \sum f(x^P)$, où P décrit un groupe G . Tous les groupes G pour lesquels le polynome $\bar{f}_G(x)$ est le même constituent une classe de groupes de permutations. Deux groupes G_1 et G_2 sont regardées comme équivalents pour $f(x)$ si $\bar{f}_{G_1}(x) = \bar{f}_{G_2}(x)$. On écrit $G_1 \sim G_2$. Théorème I. Pour que deux groupes G_1 et G_2 définis sur l'ensemble $(1, 2, \dots, n)$ satisfassent $G_1 \sim G_2$ il faut et il suffit que $\bar{f}_{G_1}(x)$ reste invariant par les permutations de G_2 et que $\bar{f}_{G_2}(x)$ reste invariant par les permutations de G_1 . Deux autres théorèmes concernent (i) la représentation des groupes G , (ii) les sous-groupes de G . A. Sade.

Suzuki, Michio: On finite groups containing an element of order four which commutes only with its powers. Illinois J. Math. 3, 255—271 (1959).

Verf. stellt folgendes Problem: K sei eine Menge von Elementen der endlichen Gruppe H . Die endliche Gruppe G enthalte H so, daß der Zentralisator (in G) jedes Elementes aus K in H liegt. Was folgt daraus über die Struktur von G ? Gibt es zu gegebenen H und K unendlich viele einfache Gruppen G , die diese Bedingung erfüllen? Verf. beweist: Ist $H \leq G$ die von einem Element π der Ordnung 4 erzeugte zyklische Gruppe, $K = \{\pi\}$ und ist die obige Bedingung erfüllt, so besitzt G entweder einen Normalteiler vom Index 2, der π nicht enthält, oder G hat einen abelschen Normalteiler G_0 ungerader Ordnung, dessen Faktorgruppe G/G_0 zu einer der folgenden Gruppen isomorph ist: $SL(2, 3)$, $SL(2, 5)$, $LF(2, 7)$ oder den alternierenden Gruppen A_6 oder A_7 . Den weitaus größten Teil des Beweises beansprucht der Fall, daß die Faktorkommutatorgruppe G/G' ungerade Ordnung hat und die 2-Sylowgruppe von G eine Diedergruppe der Ordnung 8 ist. Dann gilt $G/G_0 \cong LF(2, 7)$, A_6 oder A_7 . Wichtigstes Hilfsmittel ist ein Lemma des Verf. [Amer. J. Math. 78, 657—691 (1955), insbes. S. 662], das in engem Zusammenhang mit dem genannten Problem steht und auf 2-singuläre Klassen konjugierter Elemente im Normalisator N von π^2 angewandt wird, die „special“ sind bezüglich G . Es gestattet zusammen mit der Theorie der modularen Charaktere von R. Brauer [insbesondere den Sätzen über die Defektgruppe eines Blocks, Math. Z. 63, 406—444 (1956)] eine weitgehende Bestimmung der irreduziblen Charaktere von G und ihrer 2-Blöcke aus den Charakteren von Untergruppen von G und deren 2-Blöcken. Die so gewonnenen Kenntnisse werden auf die Charakterrelationen angewandt, die sich aus der Berechnung der Koeffizienten der Größen $\langle \sigma \rangle$ (= Summe aller zu σ konjugierten Elemente im Gruppenring von G) in $\langle \pi^2 \rangle^2$ ergeben, mit gewissen 2-singulären Elementen σ aus N .

O. Tamaschke.

Farahat, H. K.: On Schur functions. Proc. London math. Soc., III. Ser. 8, 621—630 (1958).

With indeterminates h_1, h_2, h_3, \dots and a partition $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$) of a natural number it is proved first that the k -rowed determinant $\{\lambda\} = |h_{\lambda_i + j - i}|$, a so-called S -function corresponding to the series $f(x) = 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots$, is an irreducible polynomial. Turning next to the connection of the S -function and the hook structure of (λ) , the relation $\{\lambda | \bar{\lambda}\}_{f(x^p)} = \sigma_\lambda \{\lambda^*\}_{f(x)}$ (with $\{\lambda | \bar{\lambda}\}$ defined in Littlewood, Theory of Group Characters, this Zbl. 38, 165) is proved for any prime p , any series $f(x)$, and a partition (λ) with p -residue $(\bar{\lambda})$, p -quotient (λ^*) (Littlewood, this Zbl. 44, 257) and p -“signature” σ_λ , as a counter-part to the author's former result (this Zbl. 73, 257). Also further studies on S -functions for special series are made.

T. Nakayama.

Šasiada, E.: Construction of directly indecomposable Abelian groups of power higher than that of the continuum. II. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 23—26, russ. Zusammenfassg. III (1959).

In letzter Zeit wurden von verschiedenen Autoren Beispiele nicht direkt zerlegbarer abelscher Gruppen großer Mächtigkeiten angegeben. Verf. beweist in dieser Arbeit mit ähnlichen Konstruktionen wie in Teil I seiner Arbeit (dies. Zbl. 79, 34) folgenden Satz: Für die Kardinalzahlen n_α , $\alpha < \omega_1$, existieren direkt unzerlegbare abelsche Gruppen G_α vom Rang n_α . Dabei sind die n_α induktiv wie folgt definiert: $n_0 = 1$, $n_{\alpha+1} = 2^{n_\alpha}$, $n_\alpha = \sum_{\mu < \alpha} n_\mu$ falls α Limeszahl ist. H. Leptin.

Šasiada, E.: Proof that every countable and reduced torsion-free Abelian group is slender. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 143—144, russ. Zusammenfassg. XI (1959).

Verf. zeigt, daß jede abzählbare und reduzierte torsionsfreie abelsche Gruppe H die Eigenschaft besitzt, daß jeder Homomorphismus einer vollständigen direkten Summe aus abzählbar vielen unendlichen zyklischen Gruppen $\{e_v\}$ ($v = 1, 2, \dots$) in H fast alle Komponenten $\{e_v\}$ auf die Null von H abbildet. K. Latt.

Šasiada, E.: On the isomorphism of decompositions of torsion-free Abelian groups into complete direct sums of groups of rank one. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 145—149, russ. Zusammenfassg. XI—XII (1959).

Verf. löst das von A. G. Kuroš herrührende und teilweise von A. P. Mišina bearbeitete Problem, ob irgend zwei kanonische Zerlegungen einer torsionsfreien abelschen Gruppe isomorph sind, im positiven Sinne. Die allgemeinere Frage, ob irgend zwei Zerlegungen einer torsionsfreien abelschen Gruppe G in vollständige direkte Summen von Gruppen des Ranges 1 isomorph sind, wird ebenfalls positiv beantwortet unter der Voraussetzung, daß G eine reduzierte torsionsfreie abelsche Gruppe ist, deren Mächtigkeit kleiner ist als die erste Kardinalzahl mit nicht verschwindendem Maß. K. Latt.

● Pontrjagin, L. S.: Topologische Gruppen. Teil 2. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1958. 308 S. DM 16,—.

This is the second part (part I s. this Zbl. 71, 161) of the German translation of the second edition (this Zbl. 58, 260) of Pontrjagin's famous treatise on topological groups. It contains the six remaining chapters: Commutative locally bicomact topological groups; The concept of a Lie group; The structure of bicomact topological groups; Locally isomorphic groups; Lie groups and Lie algebras; The structure of compact Lie groups. — The first of these chapters presents the classical Pontrjagin duality theory. The second chapter contains basic material on Lie groups and includes a new section on analytic manifolds and their connection with Lie groups. The third chapter is concerned with compact topological groups and contains a new section on compact transformation groups. The fourth chapter presents the classical Schreier theory and is based on an extensive study of covering spaces and covering groups. Then comes an entirely new chapter on Lie algebras on which the final chapter, giving the detailed classification of compact Lie groups, is based. T. Ganea.

Ono, Takashi: Sur les groupes de Chevalley. J. math. Soc. Japan 10, 307—313 (1958).

A chaque algèbre de Lie simple \mathfrak{g} sur le corps des nombres complexes et à tout corps K , C. Chevalley a associé un groupe G_K et une algèbre de Lie \mathfrak{g}_K sur K , G_K étant un sous-groupe du groupe des automorphismes $A(\mathfrak{g}_K)$ de cette algèbre de Lie (ce Zbl. 66, 15). L'A. répond à des questions posées par Chevalley à la fin du travail précité en prouvant d'abord que si L est une extension du corps K , on a $G_K = G_L \cap GL(n, K)$, et que si K est un corps infini, G_K est un groupe algébrique irréductible et G_L le groupe linéaire obtenu par extension à L du corps des scalaires de G_K . D'autre part, si on pose $G = G_C$ (C étant le corps des nombres complexes) G est en fait dé-

fini sur le corps Q des nombres rationnels, et on peut donc le réduire mod. p pour tout nombre premier p [T. Ono, Osaka math. J. 10, 57—73 (1958)]; soit $G^{(p)}$ le groupe ainsi obtenu, sous-groupe du groupe linéaire $GL(n, \Omega_p)$, où Ω_p est un „domaine universel“ de caractéristique p . L'A. montre que le groupe G_{Ω_p} est la composante connexe de l'élément neutre dans $G^{(p)}$; enfin, si K est un corps infini de caractéristique p tel que p ne divise pas le discriminant de la forme de Killing de \mathfrak{g} , il prouve que G_K est la composante connexe de l'élément neutre de $A(\mathfrak{g}_K)$, et \mathfrak{g}_K est l'algèbre de Lie de ce groupe algébrique. J. Dieudonné.

Abe, Eiichi: On the groups of C. Chevalley. J. math. Soc. Japan 11, 15—41 (1959).

Les notations étant celles du travail de T. Ono résumé dans le précédent rapport, l'A. commence par donner des conditions moyennant lesquelles l'algèbre \mathfrak{g}_K est simple ou n'a pas de centre; ces résultats sont des cas particuliers de ceux obtenus antérieurement par le rapporteur (ce Zbl. 84, 33). Il identifie ensuite les groupes G'_K (groupe des commutateurs de G_K) de types (A), (B), (C) ou (D) à des groupes classiques, retrouvant une partie des résultats de R. Ree (ce Zbl. 78, 16). Puis il détermine toutes les classes d'involutions conjuguées des G_K , et les algèbres de Lie des normalisateurs de ces involutions; moyennant quoi il peut prouver que les automorphismes birationnels et biréguliers de G_K , pour un corps K infini de caractéristique $\neq 2$, sont intérieurs, le cas du Type (D_4) excepté. J. Dieudonné.

Mostow, G. D.: Extension of representations of Lie groups. II. Amer. J. Math. 80, 331—347 (1958).

This paper is a continuation to: Extensions of representations of Lie groups and Lie algebras, by G. Hochschild and G. D. Mostow (this Zbl. 80, 252). Let L be an analytic group and G an invariant, closed, connected subgroup of L ; the author studies here the problem of extending a finite dimensional representation of the subgroup G to a finite dimensional representation of the group L . The main result provides a complete solution of this extension problem. The author's previous results on fully reducible subgroups of algebraic groups (see also this Zbl. 73, 16) are essentially used in this paper. C. Ionescu Tulcea.

Hochschild, G. and G. D. Mostow: Representations and representative functions of Lie groups. II. Ann. of Math., II. Ser. 68, 295—313 (1958).

Let G be a Lie group, $R(G)$ the algebra of continuous complex-valued representative functions on G and G^+ the universal complexification of G (for this and other notations and definitions see G. Hochschild and G. D. Mostow, this Zbl. 80, 251). The results given here (except for those in section 6) concern G , the algebra $R(G)$, and the complex Lie group G^+ . The paper is divided in six sections. The first one is a general introduction. The second section contains certain results concerning the characterization and the structure of G^+ . In the third section, under the hypothesis that G is connected, necessary and sufficient conditions for the existence of a locally faithful representation r of G are given (r is locally faithful if the induced representation r' of the Lie algebra of G is faithful). Section 4 contains a series of auxiliary results which are used in the proofs given in section 5. Section 5 contains the main results. In particular the image of G , $t^+(G^+)$, in the automorphism group of $R(G)$ is characterized. It is proved, for instance that a proper automorphism u belongs to $t^+(G^+)$ if and only if it is perfect ($u \circ \exp = \exp \circ u$ on $\text{Hom}(G, C)$). Under supplementary hypotheses it is shown that the group of all proper automorphisms of $R(G)$ may be written under the form $W \times t^+(G^+)$, where W is isomorphic, via restriction to $Q = \exp(\text{Hom}(G, C))$, with $\text{Hom}(Q, C^*)$. In the last section it is shown that if G is a topological group which is the union of a countably family of open relatively compact sets, then (for a convenient topology on $R(G)$) the left translations are precisely the continuous proper automorphisms of $R(G)$. C. Ionescu Tulcea.

Ruse, H. S.: Tensor extensions of metricable local Lie groups. J. London math. Soc. **34**, 5—14 (1959).

A Lie algebra L is called metrizable if it admits a symmetric, non-singular, invariant bilinear form. Let A be an associative, commutative, finite-dimensional algebra over the same field as L . The author gives conditions under which the tensor product $A \otimes L$ is a metrizable Lie algebra. These conditions are fulfilled in the case when A is the algebra of Clifford dual numbers. The metric on the corresponding local group $G(A \otimes L)$ is discussed.

S. Helgason.

Verbände. Ringe. Körper:

McLain, D. H.: Local theorems in universal algebras. J. London math. Soc. **34**, 177—184 (1959).

“The object of this paper is to show that the concept of a ‘local theorem’ developed recently in the theory of groups more naturally belongs to the subject of universal algebras.” Accordingly the author introduces concepts sufficiently general to allow the formulation in universal algebra of the analogues of theorems of Mal’cev [Učenyje Zapiski Ivanov. ped. Inst., fiz.-mat. Fak. **1**, 3—9 (1941)] and Baer (this Zbl. **23**, 300), and proves two such theorems. The first says essentially that a chain of subalgebras of an algebra can be refined to a chain that satisfies certain conditions if and only if this is so for every chain obtained by intersecting the given chain with a member of a local system for the algebra. In the second theorem, a weakened form of local system is used, and a proposition is carried from the maximal subalgebras of the members of such a weakened local system to the maximal subalgebras of the whole algebra. The precise definitions and statements are too complicated for reproduction here.

B. H. Neumann.

Atsumi, Koichi: Notes on lattices. Proc. Japan Acad. **34**, 510—512 (1958).

Im Anschluß an Matsushima (dies. Zbl. **72**, 261; **83**, 24) werden Charakterisierungen modularer und distributiver Verbände mit Hilfe der Mengen $J(a, b) = \{x | x = (a \wedge x) \vee (b \wedge x)\}$ gegeben; vor allem: Distributivität liegt genau dann vor, wenn alle $J(a, b)$ Ideale sind. Für die Modularität ist — in Umkehrung eines Ergebnisses von Blumenthal-Ellis (dies. Zbl. **35**, 301) — die Äquivalenz dreier verschiedener verbandstheoretischer Zwischenbeziehungen (Verallgemeinerungen der metrischen Zwischenbeziehung in normierten Verbänden) charakteristisch.

Jürgen Schmidt.

Dwinger, Ph.: Direct sums and direct products in completely modular complete lattices. Arch. der Math. **8**, 85—92 (1957).

Die alte additiv-multiplikative Verbandsterminologie benutzend, betrachtet Verf. in „vollständig modularen“ (einer nicht selbstdualen, von Kuroš herrührenden, transfiniten Verallgemeinerung des Modularitätsaxioms genügenden) Vollverbänden den Zusammenhang zwischen „direkten Summen“ (Suprema unabhängiger Familien von Verbandselementen) und den dualen „direkten Produkten“, unter denen solche, die einem gewissen Assoziativgesetz genügen, als „regulär“ ausgezeichnet werden („direkte Summen“ sind in vollständig modularen Vollverbänden automatisch „regulär“). Hauptresultat: eine eindeutige Entsprechung zwischen den direkten Summendarstellungen des Verbands-Einselements und gewissen regulären direkten Produktdarstellungen des Nullelements, speziell zwischen den endlichen direkten Summendarstellungen der Eins und den endlichen direkten Produktdarstellungen der Null. Verf. verallgemeinert damit früher für modulare durchschnittsstetige Vollverbände erzielte Ergebnisse (dies. Zbl. **72**, 22). Anwendung auf die unendlichen direkten Zerlegungen (sei es im schwachen, sei es im starken Sinne) einer Gruppe.

Jürgen Schmidt.

Dwinger, Ph.: On the completeness of the quotient algebras of a complete Boolean algebra. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 26—38 (1959).

Im ersten Teil dieser Arbeit (dies. Zbl. 82, 251) wurde — unter anderem — gezeigt, daß es in jeder unendlichen Booleschen Algebra A Ideale I gibt, für die die Faktorstruktur A/I nicht vollständig ist; jetzt wird als Hauptresultat eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine Faktorstruktur A/I von A vollständig ist. Diese Bedingung lautet folgendermaßen: Ist I ein beliebiges Ideal von A und bedeutet \bar{I} das durch I erzeugte Hauptideal in A , so ist A/I dann und nur dann vollständig, wenn \bar{I}/I vollständig ist. Mit Hilfe dieses Ergebnisses wird gezeigt, daß man unter den nichtprimen Idealen J von A auch solche finden kann, für die die Faktorstruktur A/J vollständig, aber die homomorphe Abbildung $A \rightarrow A/J$ unvollständig ist. Endlich werden verschiedene notwendige Bedingungen dafür bestimmt, daß eine Faktorstruktur A/I (insbesondere, im Fall eines sogenannten dichten Ideals I) von A vollständig ist. (Ein Ideal I von A wird bekanntlich dicht genannt, wenn es zu jedem Element $x \neq 0$ von A mindestens ein Element y von I mit $0 < y \leq x$ gibt; hier wird auch gezeigt, daß diese Bedingung mit der Eigenschaft $\bar{I} = A$ gleichwertig ist.) G. Szász.

Grätzer, G. and E. T. Schmidt: Ideals and congruence relations in lattices. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 137—175 (1958).

Im Teil I dieser Arbeit werden die Kongruenzen in den distributiven Verbänden untersucht. Im Satz 2 werden die distributiven Verbände durch die Eigenschaften ihrer Kongruenzen charakterisiert. Satz 3: Es sei a ein fest ausgewähltes Element eines Verbandes L . Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent: a) ist L_1 ein konvexer Teilverband von L , $a \in L_1$, dann gibt es eine einzige Kongruenz θ auf L derart, daß L_1 eine Klasse dieser Kongruenz ist; b) L ist distributiv und alle Intervalle der Form $[a, b]$ und $[b, a]$ in L sind komplementär. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung der Resultate von J. Hashimoto (dies. Zbl. 78, 18), G. Ja. Areškin (dies. Zbl. 53, 215) und M. Kolibiar [Acta Fac. Rer. natur. Univ. Comenian., Mathematica 1, 247—253 (1956)]. Im Teil II und III werden die Kongruenzen in allgemeinen Verbänden behandelt, meistens mit Hilfe der schwachen Projektivität (R. P. Dilworth, dies. Zbl. 36, 18). Die Hauptidealresultate beziehen sich auf die Lösung der Probleme 67, 72 und 73 von G. Birkhoff (Lattice theory, dies. Zbl. 33, 101). Im Teil IV wird der Begriff der Booleschen Ringoperationen $x + y$, $x \cdot y$ in einem distributiven Verband L erklärt. Solche Operationen können dann und nur dann definiert werden, wenn L relativ komplementär ist; Verf. haben die allgemeine Form dieser Operationen gefunden. J. Jakubík.

Matsushita, Shin-ichi: Ideals in non-commutative lattices. Proc. Japan Acad. 34, 407—410 (1958).

Die Note — ihr Verf. gehört zu den Begründern der Theorie der nichtkommutativen Verbände (Quasi-, Schief- oder Schrägverbände) — bringt in konzentrierter Form die Ergebnisse einer Arbeit, deren erster Teil inzwischen erschienen ist (vgl. dies. Zbl. 83, 24). Durch zusätzliche Forderungen wird der Quasiverband zum regulären und normalen regulären Quasiverband spezialisiert. Beim regulären Quasiverband werden vier Typen von Idealen unterschieden, wobei zu bemerken ist, daß die Analogie zum üblichen Idealbegriff nicht vollständig ist. Es wird gezeigt, daß der reguläre Quasiverband in Minimalideale zerlegt werden kann. Die Zerlegung kann vermöge eines auf einer Kongruenzrelation beruhenden Homomorphismus und auf Grund des Umstandes, daß die Minimalideale eines normalen regulären Quasiverbandes gewöhnliche Verbände sind, in bemerkenswerter Weise verfeinert werden.

F. Klein-Barmen.

Asplund, Edgar: Iteration of matrices over a distributive lattice. 13. Skand. Mat.-Kongr., Helsinki 1957, 19—27 (1958).

Definiert man das Produkt zweier (n, n) -Matrizen $G = \{\gamma_{ik}\}$ und $H = \{\eta_{ik}\}$ mit Elementen aus einem distributiven Verband L wie üblich durch $GH = \{\bigvee_j (\gamma_{ij} \wedge \eta_{jk})\}$ (Druckfehler: $\dots, \eta_{ik} \dots$), so ist diese Multiplikation assoziativ, also die Bildung von Potenzen G^μ mit natürlichen Exponenten μ möglich. Sei $m(G) = \text{Min} \{\mu \mid \text{Es existiert } \nu \text{ mit } G^\mu = G^{\mu+\nu}\}$ und $p(G) = \text{Min} \{\pi \mid \text{Es existiert } \nu \text{ mit } G^\nu = G^{\nu+\pi}\}$ (μ, ν, π natürliche Zahlen). Verf. untersucht die Maxima der Funktionen $m(G)$ und $p(G)$ bei festem n (aber variablem L) und zeigt: $\text{Max } m(G) = (n-1)^2 + 1$, $\text{Max } p(G) = \text{k. g. V. } \{1, 2, \dots, n\}$. Zum Beweis wird zunächst der Fall untersucht, daß der zugrunde liegende Verband L der zweielementige ist. Unter dieser Einschränkung ergeben sich für die genannten Maxima durch komplizierte kombinatorische Überlegungen die Werte $(n-1)^2 + 1$ und $\text{Max} (\text{k. g. V. } \{p_i\} \mid 1 \leq p_i, \sum_i p_i \leq n)$. Die Behandlung des allgemeinen Falles ist dann einfach. *G. Bruns.*

Iséki, Kiyoshi: On ideals in semiring. Proc. Japan. Acad. **34**, 507—509 (1958).

An ideal P of a semiring R is called 1. completely prime, 2. completely semi-prime, 3. compressed provided respectively 1. $ab \in P$ implies $a \in P \vee b \in P$, 2. $a^2 \in P \Rightarrow a \in P$, 3. $a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 \in P \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n \in P$ for any n . If P is compressed, then $a_1 a_2 \dots a_n \in P \Rightarrow a_1^{l_1} \dots a_n^{l_n} \in P$ for any positive integers l_1, l_2, \dots, l_n (Th. 1). Let $T'(P)$ denote the set of all the $x \in R$ such that $x = x_1 \dots x_n$ and $x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2 \in P$ for some n ; let $T_1(P)$ be the ideal generated by $T'(P)$; let $T_{n+1}(P) = T(T_n(P))$ and $T^*(P) = \bigcup_n T_n(P)$; T^*P is called the Thierrin radical of P and is the intersection of all compressed ideals containing P (Th. 2.) T^*P is the intersection of all minimal completely prime ideals belonging to P (Th. 5). A subset X of R is a m -system provided the relation $ab \in X$ implies $a, b \in X$ for some $x \in R$. The McCoy radical of P is defined as the set M^*P of all x such that every m -system containing x intersects P . One has: $M^*P \subseteq T^*P$ (Th. 3).

G. Kurepa.

Curtis, Charles W.: Quasi-Frobenius rings and Galois theory. Illinois J. Math. **3**, 134—144 (1959).

The paper proves first that if M is a faithful finitely generated projective left module over a quasi-Frobenius ring R then the R -endomorphism ring E of M is quasi-Frobenius and the E -module M is projective. Then this is applied to obtain sufficient conditions for a complete group G of automorphisms of finite reduced order of a simple ring S with minimum condition to have a quasi-Frobenius ring $I(G)$ of fixed elements in S ; the conditions amount to assume that the ring generated by inner automorphisms of S in G is quasi-Frobenius and S is projective over the ring generated by its left multiplication ring and G . Under the same conditions also the reduced order of G is computed.

T. Nakayama.

McLaughlin, J. E.: A note on regular group rings. Michigan math. J. **5**, 127—128 (1958).

Elementary proofs are given to the following theorems which have been proved by Auslander (this Zbl. **79**, 267) by the methods of homological algebra: If the group ring of a group G over a ring A is regular then G is a torsion group and A is uniquely divisible by the order of each element in G ; the group ring of a locally finite group G over a regular ring A uniquely divisible by the order of every element in G is regular.

T. Nakayama.

Rosçulet, Marcel N.: Au sujet des formes extérieures. Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat. **9**, 127—162, russ. und französ. Zusammenfassg. 162—164 (1958) [Rumänisch].

L'A. considère l'algèbre non commutative construite sur le corps des nombres complexes, avec n éléments x^1, x^2, \dots, x^n , qui vérifie les lois de multiplication $x^i x^j + x^j x^i = A(x^i + x^j) + B$, $(x^i)^2 = A x^i + \frac{1}{2} B$ et qui se réduit à l'algèbre des formes extérieures, si $A = B = 0$ (A et B sont supposés réels). On établit

certaines propriétés de cette algèbre concernant les transformations et les formes linéaires, les formes monomes, l'inverse d'un nombre, les diviseurs de zéro. En remarquant que l'algèbre considérée est le produit de n algèbres commutatives d'ordre 2, construites sur le corps des réels et ayant comme éléments de base 1 et x^i , l'A. introduit une base convenable et étudie les diviseurs de zéro de l'algèbre initiale, en démontrant que leurs supports géométriques sont des variétés linéaires. De même, il détermine les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre appartienne au radical de l'algèbre et il trouve que le support géométrique de ce radical est une variété linéaire à $2^n - 2$ dimensions.

J. Elianu.

Amitsur, S. A.: The radical of field extensions. Bull. Res. Council Israel, Sect. F 7, 1—10 (1957).

Soit R une algèbre sur un corps commutatif C , et soit F une extension (commutative) de C . L'A. formule des résultats sur le radical (de Jacobson) $J(R \otimes_C F)$; il prouve que si F est une extension algébrique séparable de C , $J(R \otimes_C F) = J(R) \otimes_C F$; si F est une extension transcendante pure de C , $J(R \otimes_C F) = N \otimes_C F$, où $N = J(R \otimes_C F) \cap R$; en outre, dans ce dernier cas, N est un nilidéal. Les deux premiers de ces résultats ont été obtenus indépendamment, de façon plus simple, et comme cas particuliers de résultats plus généraux, par N. Bourbaki (Éléments de mathématique., XXIII, part. 1, livre II: Algèbre, chap. 8, Actual. sci. industr. 1261, Paris 1958, p. 84—85). Comme conséquence de ces théorèmes, l'A. prouve que l'algèbre d'un groupe quelconque sur un corps non dénombrable de caractéristique 0 est sans radical.

J. Dieudonné.

Aubert, Karl Egil: A generalization of the ideal theory of commutative rings without finiteness assumptions. Math. Scandinav. 4, 209—230 (1957).

This is another generalization of the ideal theory of commutative rings without finiteness assumptions due to Krull. While the referee in an earlier paper gave a generalization based on the structure of the lattice of ideals and the special rôle of the subsystem of principal ideals, using the multiplication of ideals as an extra operation, the author here generalizes by studying the structure of the Boolean algebra of subsets of the ring, when multiplication and the difference of subsets are taken as extra operations defined between these subsets. The full analysis of the structure of his Boolean d -algebras, and a study of the inter-relations between these two generalizations is yet to be undertaken. The complete Boolean algebra L is a Boolean d -algebra when it satisfies the following conditions: I, V. It is closed for a binary, commutative, associative multiplication (ab denotes the product of a and b) and a binary subtraction ($a - b$), both distributing arbitrary lattice sums (on both sides); L has a least element z , and elements different from z are called regular, (the distributive laws are denoted as axioms I, V); II. The set of regular elements is closed under multiplication; III. If $ab \subseteq c$ is a regular element of L , then there exist regular elements $a_1 \subseteq a$ and $b_1 \subseteq b$ such that $a_1 b_1 \subseteq c$; IV. The (Boolean) complement of a half-prime d -ideal is locally m -closed (the element a is an s -ideal if $xa \subseteq a$ for all x of L , and a d -ideal a is an s -ideal satisfying $a - a \subseteq a$ also; the element b is locally m -closed if for any regular element $c \subseteq b$ there exists a regular element $d \subseteq c$ such that the m -closure of d is $\subseteq b$, where the m -closure is the least m -element s (with $ss \subseteq s$) containing the given element.); VI. $a(b - c) \subseteq ab - ac$, for any a, b, c of L . After discussing some of the inter-relations among the axioms, generalizations of some of Krull's results are given. The following definitions are used for formulating the results: The radical of a is the union of x for which $x^n \subseteq a$, for some positive integer n ; a d -ideal p is a d -prime if, for any regular elements a, b of L , $ab \subseteq p$, and $a \not\subseteq p$ imply $b \subseteq p$; a d -ideal q is weak primary if, for any regular elements a, b of L , $ab \subseteq q$ and $a \not\subseteq q$ imply that $b_1^n \subseteq q$ for a regular $b_1 \subseteq b$ and some integer n . The main results proved are: The d -ideal p is a d -prime if and only if the complement of p is an m -element (that is, $p' p' \subseteq p'$);

if m is an m -element then a maximal d -ideal contained in m' is a d -prime; if a is a d -ideal, m a maximal m -element contained in the complement of a , a maximal d -ideal p containing a and contained in m' is a minimal d -prime containing a . The radical of the d -ideal a is a d -ideal which contains a and is equal to the union of all d -ideals of which a finite power is contained in a . The radical of a weak primary d -ideal is a d -prime. The radical of the d -ideal a is identical with the intersection of all the (minimal) d -primes containing a . A d -ideal is half-prime if and only if its complement is locally m -closed. To every minimal d -prime p containing the d -ideal a there corresponds a uniquely determined minimal weak primary d -ideal q which contains a and has p as its radical (the isolated weak primary component of a which belongs to p).

V. S. Krishnan.

Roquette, Peter: Abspaltung des Radikals in vollständigen lokalen Ringen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 23, H. Hasse zum 60. Geburtstag, 75—113 (1959).

Verf. beweist die für die Strukturtheorie der vollständigen lokalen Ringe grundlegenden Cohenschen Sätze über die Existenz von Koeffizientenkörpern bzw. -ringen in vollständigen lokalen Ringen (Cohen, dies. Zbl. 60, 70) für den charakteristikkongruenten und -ungleichen Fall gleichzeitig und unter allgemeineren Voraussetzungen als bisher. Es wird auch der für die algebraische Geometrie wichtige „relative Fall“, d. i. die Frage nach einem solchen Koeffizientenring als Oberring eines vorgegebenen Teilrings, und die Eindeutigkeitsfrage behandelt. — Verf. nennt einen kommutativen Ring mit Einselement lokal, wenn er (i) nur ein einziges maximales Ideal besitzt, (ii) mit einer Hausdorffschen Ringtopologie so versehen ist, daß die offenen Ideale einen Umgebungsfiler der 0 bilden, und wenn (iii) diese Topologie gröber ist als die durch die Potenzen des maximalen Ideals definierte Topologie. Nur diese letztere Topologie, die „Radikaltopologie“, wurde bisher in der Theorie der lokalen Ringe benutzt. Ein lokaler Ring wird elementar genannt, wenn sein maximales Ideal von der Restklassencharakteristik erzeugt wird. Die elementaren lokalen Ringe sind also im charakteristikkongruenten Falle Körper, im charakteristikkongruenten Falle (absolut) unverzweigte Bewertungsringe bzw. homomorphe Bilder von solchen. Für einen vollständigen lokalen Ring R mit maximalem Ideal m werden die folgenden Sätze bewiesen: Satz 1. R enthält einen elementaren, vollständigen lokalen Teilring E mit demselben Restklassenkörper wie R . Satz 1a. Ist E_0 ein elementarer lokaler Teilring von R und der Restklassenkörper von R separabel über dem Restklassenkörper von E_0 , so läßt sich der in Satz 1 genannte Ring E als Oberring von E_0 wählen. Satz 2. R sei nicht elementar. Der in Satz 1 genannte Ring E ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn der Restklassenkörper $\bar{R} = R/m$ keine nichttrivialen Differentiationen besitzt. Satz 2a. R sei nichtelementar und der Restklassenkörper von R separabel über dem Restklassenkörper des elementaren lokalen Teilrings E_0 . Der in Satz 1a genannte Ring $E \supset E_0$ ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn \bar{R} keine nichttrivialen Differentiationen d mit $d(\bar{E}_0) = 0$ besitzt. — Satz 1 bzw. 2 sind jeweils in Satz 1a bzw. 2a enthalten. Zum Beweis der Sätze 1a und 2a werden in § 1 einfache Abbildungs- und Einbettungssätze für lokale Ringe und Eigenschaften der elementaren lokalen Ringe zusammengestellt. § 2 gibt den Beweis der genannten Sätze für den Fall einer diskreten Topologie, also den Fall $m^k = 0$: Zuerst wird der Fall $m^2 = 0$ behandelt, sodann der Fall eines diskreten lokalen Ringes R mit maximalem Ideal m und Restklassencharakteristik p , welcher ein Ideal a mit $ma = 0$, $m = pR + a$ besitzt. Dieser Fall wird durch den Homomorphismus $R \rightarrow R/pR$ auf den Fall $m^2 = 0$ zurückgeführt. Der Beweis für den allgemeinen Fall verläuft nun durch Induktion nach dem „Radikalexponenten“, der kleinsten natürlichen Zahl k mit $m^k = 0$. Mit a als Annulator von m in R liefert der zweite Fall und der Homomorphismus $R \rightarrow R/a$ eine Reduktion auf den Fall eines lokalen Ringes mit kleinerem Radikalexponenten, auf den die Induktionsvoraussetzung anwendbar ist.

In § 3 endlich ergibt sich daraus durch Grenzübergang der Beweis für beliebige vollständige lokale Ringe auf Grund der bekannten Darstellung dieser Ringe als inverse Limites von Systemen diskreter lokaler Ringe. Hier erschwert der Verzicht auf Abzählbarkeitsvoraussetzungen hinsichtlich der Topologie des Ringes den Beweis. — In einem Anhang wird auf Grund der bewiesenen Sätze das Wichtigste über elementare lokale Ringe hergeleitet. Die universelle Abbildungseigenschaft der elementaren, vollständigen lokalen Ringe E (Théorème de Relèvement bei Samuel, *Algèbre locale*, dies. Zbl. 53, 19), also die Existenz eines Homomorphismus, wird hier gezeigt, indem die Existenz des Graphen dieses Homomorphismus in der direkten Summe des elementaren lokalen Rings E mit dem Bildring R mit Satz 1 bzw. Satz 1a nachgewiesen wird. Aus der universellen Abbildungseigenschaft erhält man unmittelbar Isomorphiesätze für elementare, vollständige lokale Ringe, und Eindeutigkeitsaussagen über diese bzw. Bestimmung aller solchen Isomorphismen liefern Aussagen über Automorphismen von E . Schließlich wird der Existenzsatz für elementare, vollständige lokale Ringe zu gegebenem Restklassenkörper und gegebener Charakteristik ebenfalls mit Hilfe von Satz 1 auf die Wittschen Vektorringe gegründet. — Vgl. dazu auch Geddes [dies. Zbl. 56, 29; *Proc. London math. Soc.* III. Ser. 6, 343—354 (1956)]. — Bem. des. Ref.: Auf S. 83, Z. 19 v. o. muß es „in jedem analytisch irreduziblen Noetherschen primären Ring“ heißen.

H.-J. Nastold.

Assmus jr., E. F.: On the homology of local rings. *Illinois J. Math.* 3, 187—199 (1959).

Verf. gibt in § 1 dieser eng an eine Arbeit von J. Tate (dies. Zbl. 79, 55) anschließenden Arbeit eine neue durchsichtige Herleitung der Serreschen und Tateschen Resultate über die Struktur von $\text{Tor}^R(K, K)$, R lokal, $K = R/m$ (loc. cit.). Es wird gezeigt, daß $\text{Tor}^R(K, K)$, eine „ R -Algebra“ im Sinne von Tate, auf natürliche Weise mit einer Koalgebra-Struktur versehen werden kann und so zu einer Hopf-Algebra wird. Elementare Eigenschaften der Hopf-Algebren, die hier vollständig bewiesen werden, liefern dann die genannten Resultate. § 2 gibt eine homologische Charakterisierung der lokalen vollständigen Schnitte, d. h. der Ringe $R = R'/A'$, R' regulär lokal, A' von einer R' -Folge erzeugt oder — damit gleichbedeutend — A' von rang A' Elementen erzeugbar. Unter der Voraussetzung, daß $A' \subset M'^2$, M' das maximale Ideal von R' , sei nun t_1, \dots, t_n ein minimales Erzeugendensystem für das maximale Ideal M von R und in den Tateschen Bezeichnungen $E = R \langle T_1, \dots, T_n \rangle$, $dT_i = t_i$, d. h. E der Koszul-Komplex von R zum Elementsystem t_1, \dots, t_n . Mit $A' = (a'_1, \dots, a'_m)$, m minimal, $a'_i = \sum c'_{ij} t'_j$, wo $t_j = t'_j + A'$, bilden die $s_i = \sum c_{ij} T_j$, $c_{ij} = c'_{ij} + A'$, ein minimales Erzeugendensystem für die 1-Zyklen $Z_1(E)$ modulo den Rändern $B_1(E)$. $F = E \langle S_1, \dots, S_m \rangle$, $dS_i = s_i$, ist, ebenso wie E , R invariant zugeordnet. Verf. beweist die Äquivalenz der folgenden vier Aussagen: a) R ist lokal vollständiger Schnitt, b) die Homologie $H(E)$ ist gleich der äußeren Algebra über $H_1(E)$, c) $H_2(E) = (H_1(E))^2$, d) $H_2(F) = 0$. Als Korollar ergibt sich: Ein lokaler Ring R mit $\dim_K(M/M^2) - 1 \leq \text{Codim } R$ ist lokal vollständiger Schnitt, sowie nochmals ein Beweis dafür, daß ein regulärer lokaler Ring der Dimension zwei eindeutige Primelementzerlegung besitzt.

H. J. Nastold.

• Boer, J. H. de: The multiplicity theory for specialized fields. („Getal en Figuur“. 9.) Assen: Van Gorcum & Comp. N. V.; G. A. Hak & Dr. H. J. Prakke 1958. 39 p.

Es bedeute L einen endlichen algebraischen Erweiterungskörper eines Körpers K , N den kleinsten Normalkörper über K , der L umfaßt; $n = [L:K]$. Gegeben sei eine Spezialisierung $\psi: L \rightarrow L'$ (d. i. eine Bewertung oder eine L' -Stelle von L), welche die Spezialisierung $\varphi: K \rightarrow K'$ induziert. Umgekehrt gibt es nach bekannten Sätzen zu einer gegebenen Spezialisierung φ endlich viele Erweiterungen ψ ; die Multiplizität einer Erweiterung: $\text{mul}(\psi, L/K)$ wird nach Barsotti definiert als

diejenige natürliche Zahl, welche angibt, wie oft ψ als Kompositum $\chi \circ \sigma_i$ auftritt, wenn χ eine feste Spezialisierung des Normalkörpers N in \bar{K}' (d. i. der algebraisch abgeschlossene Körper über K') bedeutet und σ_i ($i = 1, \dots, n$) die Isomorphismen der Galoisgruppe von L über K durchläuft, jeder so oft geschrieben, als der Inseparabilitätsgrad $\text{ins}[L:K]$ beträgt. Die Summe aller dieser Multiplizitäten ist offenbar n . In der Arbeit wird die Relation $\text{mul}(\psi, L/K) = e \cdot \text{ins}[L':K'] \cdot p^h$ bewiesen; dabei bedeutet p die Charakteristik des Körpers $K'(L')$, h eine ganze Zahl ≥ 0 , den Defekt, und e den Verzweigungsindex, der als Index $(\Gamma_\psi : \Gamma_\varphi)$ der zu φ, ψ gehörigen Bewertungsgruppen $\Gamma_\varphi, \Gamma_\psi$ erklärt wird. Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt, zunächst für Normalkörper L nach dem Muster der Hilbertschen Theorie der Galoiskörper und durch Anwendung der Krullschen allgemeinen Bewertungstheorie.

W. Gröbner.

Fleischer, Isidore: Maximality and ultracompleteness in normed modules. Proc. Amer. math. Soc. 9, 151—157 (1958).

Ein normierter Modul M über einem Operatorenring R ist hier ein R -Modul mit einer Abbildung $x \rightarrow |x|$ von M in eine total geordnete Menge L mit kleinstem Element 0, die den Regeln einer archimedischen Bewertung und der Ungleichung $|ax| \leq |x|$ für alle $a \in R$ und $x \in M$ genügt. Für $i \in L$ sei $M_i = \{x; |x| \leq i\}$, $M'_i = \{x; |x| < i\}$ und $\bar{M}_i = M_i/M'_i$. Für einen Untermodul $N \subset M$ lassen sich dann die entsprechend definierten Moduln \bar{N}_i als Teile von \bar{M}_i auffassen. M heißt unmittelbare Erweiterung von N , falls $\bar{M}_i = \bar{N}_i$ für alle $i \in L$. Ein normierter Modul ohne eigentliche unmittelbare Erweiterung heißt maximal. M heißt vollständig, wenn jede Filterbasis aus Restklassen der M_i nicht-leeren Durchschnitt hat. Verf. zeigt, daß ein ultravollständiger Modul stets maximal ist. Hiervon gilt auch die Umkehrung, falls R Hauptidealring ist. Weiter untersucht Verf. dann ebenfalls sehr allgemein definierte „normierte Räume“ über Körpern und zeigt, daß hier analoge Sätze gelten. Ferner werden Strukturaussagen über derartige Räume gemacht.

H. Leptin.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Rédei, Ladislaus: Über die algebraisch-zahlentheoretische Verallgemeinerung eines elementar-zahlentheoretischen Satzes von Zsigmondy. Acta Sci. math. 19, 98—126 (1958).

Let ω be an algebraic integer and \mathfrak{p} a prime ideal in the ring R_ω of all integer elements in the field generated by ω . ω is called an exceptional number ω_n (n natural number) if no \mathfrak{p} exist such that: $\mathfrak{p} \mid \omega_n^m - 1$, $\mathfrak{p} \nmid \omega_n^m - 1$ (m natural number $< n$) (when $n = 1$ this means that $\omega_1 - 1$ is a unit of R_ω). The author gives some tests for exceptionality and deduces the full list of the ω_n in the ring R of the rational integers and in the quadratic rings. The theorem concerning R was first proved by Zsigmondy [Monatsh. Math. 3, 265—284 (1892)] as is mentioned in the title. In a footnote the author quotes a paper of H. Sachs (this Zbl. 79, 268) where a more general problem is handled and results of the same kind are deduced.

M. Cugiani.

Rieger, G. J.: Ein weiterer Beweis der Selbergschen Formel für Idealklassen mod \mathfrak{f} in algebraischen Zahlkörpern. Math. Ann. 134, 403—407 (1958).

Es sei \mathfrak{f} ein (ganzes) Ideal aus einem algebraischen Zahlkörper K (endlichen Grades) und \mathfrak{g} eine zu \mathfrak{f} teilerfremde Klasse mod \mathfrak{f} in K . Dann gilt die „Selbergsche Formel für Idealklassen mod \mathfrak{f} in algebraischen Zahlkörpern“:

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq x, \mathfrak{p} \in \mathfrak{g}} \log^2 N\mathfrak{p} + \sum_{N\mathfrak{p}q \leq x, \mathfrak{p}q \in \mathfrak{g}} \log N\mathfrak{p} \cdot \log N\mathfrak{q} = \frac{2}{h(\mathfrak{f})} x \log x + O(x) \quad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \text{ prim}),$$

wobei $h(\mathfrak{f})$ die Anzahl der zu \mathfrak{f} teilerfremden Klassen mod \mathfrak{f} in K bedeutet. Diese

schon vom Verf. hergeleitete Formel (dies. Zbl. 81, 41, zweites Referat) wird nun wieder vom Verf. selber, mit Hilfe der von Shapiro bewiesenen „Selbergschen Formel in algebraischen Zahlkörpern“

$$\sum_{Np \leq x} \log^2 Np + \sum_{Npq \leq x} \log Np \cdot \log Nq = x \log x + O(x),$$

sehr kurz erledigt.

Z. Suetuna.

Godwin, H. J.: The determination of fields of small discriminant with a given subfield. *Math. Scandinav.* 6, 40—46, S 4 (1958).

In früheren Noten (dies. Zbl. 71, 34; 77, 46; 79, 57) entwickelte Verf. eine Methode zur Bestimmung aller Zahlkörper K von vorgegebenem Grad und vorgegebener Signatur ohne nichttrivialen Teilkörper, deren Diskriminantenbetrag eine vorgegebene Schranke nicht überschreitet. Diese Methode wird hier ausgedehnt auf den Fall, daß K einen vorgegebenen Teilkörper Ω umfaßt. Als Anwendung wird gezeigt: Der einzige, den reellquadratischen Zahlkörper $\Omega = \mathbb{P}(\sqrt{5})$ enthaltende, totalreelle bikubische Zahlkörper K mit einer Diskriminante $\Delta < 355556$ ist der Körper $K = \mathbb{P}(\sqrt{5}, \cos 2\pi/7)$ mit $\Delta = 300125$.

H. W. Leopoldt.

Šafarevič (Shafarevich), I. R.: The imbedding problem for splitting extensions. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 120, 1217—1219 (1958) [Russisch].

Gegeben seien ein normaler algebraischer Zahlkörper k/Ω mit der Galoisgruppe F , eine Gruppe G und eine homomorphe Abbildung von G auf F mit dem Kern N . Gesucht ist eine k enthaltende normale algebraische Erweiterung K/Ω mit der Gruppe G und zwar derart, daß k im Sinne der Galoisschen Theorie zu N gehört. Verf. skizziert einen Beweis für die Lösbarkeit dieses Einbettungsproblems in dem Fall, daß G eine zerfallende Erweiterung $G = F \cdot N$ mit nilpotentem N ist. Dieses Resultat umfaßt eine Anzahl bisher bekannter Sätze (vgl. Verf., dies. Zbl. 57, 33, 274). Ein wesentliches Hilfsmittel bildet der Begriff des relativ-Scholzischen Körpers, der an die Stelle des vom Verf. früher eingeführten Scholzischen Körpers tritt.

R. Kochendörffer.

Godwin, H. J. and P. A. Samet: A table of real cubic fields. *J. London math. Soc.* 34, 108—110 (1959).

Die Berechnung einer von Verff. im "Royal Society's Depository of Unpublished Mathematical Tables" hinterlegten Tafel der 830 totalreellen kubischen Zahlkörper K mit Diskriminanten $\Delta \leq 20000$ wird kurz beschrieben (diese Tafel enthält Δ , die Koeffizienten a, b, c eines K erzeugenden Polynoms $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$, sowie eine Ganzheitsbasis von K). Die Anzahlen der Δ in jeweils um 1000 fortschreitenden Teilintervallen wird mitgeteilt. Von den 49 Körpern K des letzten Intervalls, $19000 < \Delta < 20000$ wurden auch die Klassenzahlen h berechnet. Diese Werte von h (mit dazugehörigen Δ) werden ebenfalls mitgeteilt. Es ist $h = 1$ in 44, $h = 3$ in 3 Fällen, ferner $h = 2$ bzw. $h = 4$ in je einem Falle.

H. W. Leopoldt.

Dieter, Ulrich: Das Verhalten der Kleinschen Funktionen $\log \sigma_{g,h}(\omega_1, \omega_2)$ gegenüber Modultransformationen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen. *J. reine angew. Math.* 201, 37—70 (1959).

Die von Meyer eingeführte verallgemeinerte Dedekindsche Summe [C. Meyer, Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern, (dies. Zbl. 79, 60); S. 85f; ferner dies. Zbl. 79, 103], die Verf. Meyersche Summe nennt, ist die folgende:

$$s_{g,h}(a, c) = \sum_{\mu \bmod c} \left(\left(\frac{a\mu}{c} + \frac{ag + ch}{cf} \right) \right) \left(\left(\frac{\mu}{c} + \frac{g}{cf} \right) \right),$$

wobei a, b, c, d, f, g, h ganze Zahlen sind und $((x)) = P_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ für nicht ganzes x , $= 0$ für ganzes x . Mit $P_m(x)$ bezeichnet Verf. das m -te Bernoulli-Polynom. $s_{0,0}(a, c) = s(a, c)$ ist die gewöhnliche Dedekindsche Summe. Wenn man nun

($\tau = \omega_1/\omega_2$ mit $\Im(\tau) > 0$) $[x]_0 = [x]$ für nicht ganzes x , $= [x] - \frac{1}{2}$ für ganzes x ,

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i \tau m}) \text{ (Dedekindsche Funktion).}$$

$$\eta_{g,h}(\tau) = e^{2\pi i \left[\frac{g}{f}\right]_0 P_1\left(\frac{h}{f}\right)} e^{\pi i \tau B_2\left(\frac{g}{f}\right)} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i \frac{h}{f}} e^{2\pi i \tau \left(m + \frac{g}{f}\right)}\right) \\ \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{-2\pi i \frac{h}{f}} e^{2\pi i \tau \left(m - \frac{g}{f}\right)}\right)$$

schreibt, so ist

$$\sigma_{g,h}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\omega_2}{2\pi i} e^{\pi i \left(\frac{h}{f} \left(\frac{g}{f} - 1\right) - 2 \left[\frac{g}{f}\right]_0 P_1\left(\frac{h}{f}\right)\right)} \cdot \frac{r_{g,h}(\tau)}{r^{\frac{1}{2}}(\tau)}$$

die Kleinsche Funktion $\sigma_{g,h}(\omega_1, \omega_2)$. Alsdann gilt die Transformationsformel:

$$\log \eta_{g',h'}(\tau') = \log \eta_{g,h}(\tau) + \begin{cases} \pi i \frac{b}{d} P_2\left(\frac{g}{f}\right) & \text{für } c = 0 \\ \pi i \left(\frac{d}{c} P_2\left(\frac{g}{f}\right) + \frac{a}{c} P_2\left(\frac{g'}{f}\right) - 2 \operatorname{sgn} c \cdot s_{g',h'}(a, c)\right) & \text{für } c \neq 0, \end{cases}$$

wobei $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ und $(g, h) = (g', h') \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc = 1$ ist. Hieraus ergibt sich das Reziprozitätsgesetz für $s_{g,h}(a, c)$: Ist $(a, c) = 1$ und $g, h \not\equiv 0 \pmod{f}$, so gilt

$$\operatorname{sgn} c \cdot s_{h,g}(a, c) + \operatorname{sgn} a \cdot s_{h,g}(c, a) \\ = \left(\left(\frac{g}{f}\right)\right) \left(\left(\frac{h}{f}\right)\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} P_2\left(\frac{g}{f}\right) + \frac{1}{ac} P_2\left(\frac{ag + ch}{f}\right) + \frac{c}{a} P_2\left(\frac{h}{f}\right)\right).$$

Verf. gibt auch einen rein arithmetischen Beweis für dieses Reziprozitätsgesetz. Entsprechend der von Rademacher eingeführten Größe $\Phi \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ (H. Rademacher, dies. Zbl. 71, 42), schreibt Verf.

$$\Phi_{g,h} \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} = 6 f^2 \cdot \begin{cases} \frac{b}{d} P_2\left(\frac{g}{f}\right) & \text{für } c = 0 \\ \frac{d}{c} P_2\left(\frac{g}{f}\right) + \frac{a}{c} P_2\left(\frac{g'}{f}\right) - 2 \operatorname{sgn} c \cdot s_{g',h'}(a, c) & \text{für } c \neq 0; \end{cases}$$

so daß die Transformationsformel die Gestalt nimmt:

$$\log \eta_{g',h'}(\tau') = \log \eta_{g,h}(\tau) + \frac{\pi i}{6 f^2} \Phi_{g,h} \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}.$$

Sind somit M_1, M_2 Modultransformationen, $g, h \not\equiv 0, 0 \pmod{f}$, so ist

$$\Phi_{g,h}(M_2 M_1) = \Phi_{(g,h) M_1^{-1}}(M_2) + \Phi_{g,h}(M_1).$$

Meyer beschränkte seine Betrachtung auf die Modultransformationen f -ter Stufe; dagegen hat Verf. Verhalten von $\log \sigma_{g,h}(\omega_1, \omega_2)$ und $s_{g,h}(a, c)$ gegenüber beliebigen Modultransformationen untersucht. Am Ende gibt Verf. eine Deutung der verallgemeinerten Dedekindschen Summen als Inversionsanzahl an. Z. Suetuna.

Boseck, Helmut: Zur Theorie der Weierstraßpunkte. Math. Nachr. 19, H. L. Schmid Gedächtnisband, 29—63 (1958).

Der erste Teil ist eine Fortsetzung der Theorie der Weierstraßpunkte von F. K. Schmidt (dies. Zbl. 20, 102). K sei ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen vom Geschlecht g über einem vollkommenen Konstantenkörper. Eine Zahl φ heißt Fehlzahl für einen Primdivisor \mathfrak{p} vom Grade d , wenn es keine Funktion in K mit dem genauen Nenner \mathfrak{p}^φ gibt. Die Fehlzahlen sind $\leq [(2g-2)/d] + 1$; es gibt höchstens $[g/d]$ Fehlzahlen. — Von jetzt ab wird $g > 0$ vorausgesetzt. Mit C. Chevalley (Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, dies. Zbl. 45, 323) wird der „zusammengesetzte Verzweigungsdivisor“ \mathfrak{B} gebildet.

Es sei du ein Differential 1. Gattung und (du) sein Divisor; y_1, \dots, y_g sei eine Basis der Multipla von $(du)^{-1}$ und $\Delta(y)$ ihre Wronskische Determinante (vgl. F.K. Schmidt, l. c.); $0, \mu_1, \dots, \mu_{g-1}$ seien die Ordnungszahlen von $\Delta(y)$; z sei ein separierendes Element, nach welchem die Differentiationen in $\Delta(y)$ vorgenommen werden; und (dz) der Divisor seines Differentials. Dann ist $\mathfrak{B} = (du)^g (dz)^{\sum \mu_i} \Delta(y)$; dieser Divisor ist eine Invariante von K . — Verf. nennt einen Primdivisor \mathfrak{p} 1. Grades einen Weierstraßpunkt, wenn die Folge seiner Fehlzahlen von $1, \mu_1 + 1, \dots, \mu_{g-1} + 1$ abweicht. Hat \mathfrak{p} einen Grad $d > 1$, so heißt \mathfrak{p} ein Weierstraßpunkt, wenn \mathfrak{p} bei geeigneter Konstantenerweiterung einen Primdivisor 1. Grades abspaltet, welcher Weierstraßpunkt ist. Die Eigenschaft, Weierstraßpunkt zu sein, ist unabhängig von Konstantenerweiterungen. Die Weierstraßpunkte werden als die Teiler des zusammengesetzten Verzweigungsdivisors eindeutig gekennzeichnet. — Im zweiten Teil werden zyklische Erweiterungen $K/k(x)$ von Primzahlgrad studiert. Zunächst werden Basen des Moduls der Differentiale 1. Gattung explizit berechnet. Sodann wird gezeigt, daß unter gewissen Umständen die in $K/k(x)$ verzweigten Primdivisoren Weierstraßpunkte sind.

M. Eichler.

O'Meara, O. T.: The integral representations of quadratic forms over local fields. Amer. J. Math. 80, 843—878 (1958).

Ein diskret bewerteter und perfekter Körper k liege zugrunde, die Charakteristik sei nicht 2. Verf. gibt notwendige und hinreichende Kriterien für die ganzzahlige Darstellung einer quadratischen Form $f(x)$ durch eine andere $F(x)$. Er bedient sich dabei der geometrischen Sprache, in welcher einer Formenklasse ein Gitter \mathfrak{f} bzw. \mathfrak{F} zugeordnet ist. Die Lösung hängt mit der Zerlegung von \mathfrak{f} und \mathfrak{F} in direkte Summen wechselseitig orthogonaler Gitter \mathfrak{f}_i bzw. \mathfrak{F}_i zusammen. Ist 2 in k eine Einheit, so ist die Darstellbarkeit von $f(x)$ durch $F(x)$ dann und nur dann möglich, wenn die Normen \mathfrak{f}_i durch die der \mathfrak{F}_i teilbar sind (vom Verf. vergessen zu erwähnen) und wenn die durch die \mathfrak{f}_i aufgespannten metrischen Räume (sofern \mathfrak{f}_i nicht das Nullgitter ist) mit den durch die \mathfrak{F}_i aufgespannten übereinstimmen. Nach diesem fast nur der Vollständigkeit halber erwähnten und kaum neuen Satz behandelt Verf. mit Ausführlichkeit den Fall, daß 2 ein Primelement ist. Die Endresultate können wegen der großen Anzahl der Bedingungen und hierzu notwendigen Bedingungen nicht wiedergegeben werden. Die Arbeit berührt sich sachlich eng mit einer früheren des Verf. (dies. Zbl. 77, 46), in welcher notwendige und hinreichende Definitionen für die Äquivalenz von $F(x)$ und $f(x)$ angegeben werden.

M. Eichler.

Zahlentheorie:

Carlitz, L.: Some congruences involving binomial coefficients. Elemente Math. 14, 11—13 (1959).

Sei n ganz, c natürlich, p prim > 3 und $p^c | w$. Der Ausdruck

$$A_r = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \binom{nw + sw - 1}{p-1}$$

wird als Linearverbindung von Stirlingszahlen S (bei Verf. A) dargestellt und erweist sich mod p^{r+2} bzw. p^{r+3} als kongruent einem gewissen Vielfachen der Bernoulli-Zahl B_{p-r-1} bzw. B_{p-r-2} ($1 \leq r \leq p-3$), je nachdem ob r gerade oder ungerade ist.

I. Paasche.

Carlitz, L.: Note on a paper of Dieudonné. Proc. Amer. math. Soc. 9, 32—33 (1958).

Set $\exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ with rational numbers a_m . Let P be a set of rational primes and D the set of rational numbers whose denominators contain only the primes of P . It is proved that all the coefficients c_n belong to D if and only

if $k^{-1} \sum_{r,s=k} r a_r \mu(s) \in D$ for all $k \geq 1$, where μ is the Möbius function. This includes a result of Dieudonné (this Zbl. 79, 59) as a special case.

T. Nakayama.

● Ekenstam, Adolf af: Contributions to the theory of the diophantine equation $Ax^n - By^n = C$. (Diss.) Uppsala: Almqvist & Wiksell 1959. 63 p. Schwed. Kr. 10,—

In den ersten zwei Abschnitten ergänzt Verf. ein Resultat von C. L. Siegel (dies. Zbl. 15, 389), der bewiesen hat, daß (1) $|Ax^n - By^n| \leq C$; A, B, C, n natürliche Zahlen, $n \geq 3$, höchstens eine Lösung in natürlichen Zahlen x, y hat, wo A, B, C, n eine gewisse Ungleichung erfüllen. Der Beweis wird mit Hilfe einer Abschätzung der Funktion $(1-\xi)^{1/n}$, $0 < \xi < 1$, mittels hypergeometrischer Funktionen gewonnen. Unter Benutzung des von T. Nagell [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 4, 209—270 (1925)] eingeführten Begriffes Lösungsklasse betrachtet Verf. alle Gleichungen (2) $|A_i x_i^n - B_i y_i^n| = C_i$, die zu derselben Klasse gehören. Zwei Gleichungen (2) mit $i = 1, 2$ gehören zu derselben Klasse, wenn die Zahlkörper $K((A_i/B_i)^{1/n})$, $i = 1, 2$, identisch sind. Durch Abschätzung von $(1-\xi)^{k/n}$, $1 \leq k < \frac{1}{2}n$, mittels hypergeometrischer Funktionen, wo k eine in geeigneter Weise bestimmte natürliche Zahl ist, werden folgende Sätze bewiesen. 1. In jeder Klasse, wo die Koeffizienten eine gewisse Ungleichung erfüllen, gibt es für $n \geq 4$ höchstens eine Gleichung, die in natürlichen Zahlen x, y lösbar ist. Ein ähnlicher Satz wird für $n = 3$, $C_i = 1$ bewiesen. 2. Für $n \geq 5$, $C_i = 1$ sind höchstens zwei Gleichungen jeder Klasse in natürlichen Zahlen x, y lösbar. Höchstens eine Gleichung der Klasse ist lösbar, wenn $n \geq 8$ und keine der Gleichungen (2) die Lösung $x = y = 1$, oder wenn $5 \leq n \leq 7$ und keine der Gleichungen (2) eine der Lösungen $x = y = 1$; $x = 2, y = 1$ hat. 3. Die $\varphi(n)$ Gleichungen $|x^n - M^s y^n| = 1$, $s = 1, 2, \dots, n-1$, $(s, n) = 1$, $M > 2$, $n \geq 5$, haben zusammen höchstens eine Lösung in natürlichen Zahlen x, y , außer wenn $5 \leq n \leq 7$ und die Lösung $x = 2, y = 1$ vorkommt. Im Abschnitt II wird das Resultat von Siegel im $K(\sqrt{-1})$ für $n = 4$ und im $K(\sqrt{-3})$ für $n = 3$ bewiesen. Im letzten Abschnitt beweist Verf. eine Vermutung von V. Tartakovskij [Izvestija Akad. Nauk SSSR, VI. Ser. 20, 301—324 (1926)] in etwas schärferer Fassung. Es seien $n \geq 3$ und $M \neq d^2$ natürliche Zahlen. Wenn (3) $x^{2n} - M y^{2n} = 1$ die Lösung $x = x_1, y = y_1$ in natürlichen Zahlen hat, so ist $x_1^n + y_1^n \sqrt{M} = \varepsilon$ der Grundeinheit von $R(\sqrt{M})$ oder, in endlich vielen Fällen, gleich dem Quadrat der Grundeinheit. Wenn $N(\varepsilon) = -1$, so ist (3) in natürlichen Zahlen x, y nicht lösbar. Der Beweis wird mit Hilfe des Satzes von Siegel und unter Benutzung von Resultaten von Y. Domar (dies. Zbl. 56, 36) und J. Schäffer (dies. Zbl. 71, 37) gewonnen. Die Überlegungen auf S. 34 sind unrichtig. Jedoch erhält man durch Untersuchungen der größten gemeinsamen Teiler in (14. 3) $u = 1$, woraus der Beweis leicht folgt.

B. Stolt.

Małowski, A. et A. Schinzel: Sur l'équation indéterminée de R. Goormaghtigh. Mathesis 68, 128—142 (1959).

Verff. betrachten die Gleichung (1) $N = 1 + x + \dots + x^m = 1 + y + \dots + y^n$, $m \neq n$, und bestimmen eine Reihe von Fällen, wo (1) in ganzen Zahlen unmöglich ist. Nur die Lösungen $N = 31$, $x = 2$, $y = 5$ und $N = 8191$, $x = 2$, $y = 90$ sind bekannt. Für $n = 2$ werden Resultate von T. Nagell (dies. Zbl. 55, 36; 57, 283) und W. Ljunggren (dies. Zbl. 70, 39) benutzt.

B. Stolt.

Perez-Cacho, L.: Über einige Fragen der Zahlentheorie. Revista mat. Hisp.-Amer. 18, 10—27, 113—124 (1958) [Spanisch].

Der inzwischen verstorbene Verf. befaßt sich mit der Fermatschen Gleichung $x^n + y^n = z^n$, n ungerade Primzahl, x, y, z paarweise teilerfremd. Nach § 1, der einige bekannte Beziehungen des Falles I ($xyz \not\equiv 0 \pmod{n}$) und des Falles II (genau eine der Zahlen x, y, z ist durch n teilbar) behandelt, werden in § 2 für den Fall I einige ebenfalls längst bekannte Kongruenzen mod n^2 und mod n^3 bewiesen. Hierauf deutet

Verf. einen elementaren Beweis des sogenannten Wieferich-Kriteriums $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n^2}$ an. So weit Ref. die Sache überblicken kann, ist allerdings die Schlußweise nicht stichhaltig. In § 3 beweist Verf. einige Ungleichungen im Falle I und findet bei Weiterführung in § 4 bei der Annahme $x < y (< z)$ die Beziehung $y > (6n^2 + 1)^{n/2}$. Ist allgemeiner q eine Primzahl mit $n - 1 \equiv 0 \pmod{\varphi(q)}$, dabei $\varphi(n)$ die bekannte Eulersche Funktion (Anzahl der zu n primen natürlichen Zahlen $\leq n$, der Totative von n), Q das Produkt aller dieser q , so gilt $y > (Qn^2)^{n/2}$. Nun geht Verf. zum Fall II über. Hier gilt mit analogen Bezeichnungen $y > (Q + 1)^{n/2}$. § 6 gibt nichts Bemerkenswertes. § 7 zeigt: Ist $n \equiv -1 \pmod{6}$, so gilt (im Falle I und II) $xyz \equiv 0 \pmod{3}$. Hier und in § 8, 9 berühren sich die Forschungen des Verf. mit solchen von A. Fleck, vgl. Bachmann, Fermatproblem, Berlin 1919, S. 38—44. In § 10 zeigt er, daß die Primteiler $p \neq 5$ von $z^2 + xy$, $x^2 - zy$, $y^2 - zx$ die Kongruenz $p \equiv 1 \pmod{10}$ erfüllen, wobei noch der Faktor 5 in der ersten Potenz hinzutreten kann. — § 11 des ersten Teiles beschäftigt sich nochmals mit dem Fermatproblem. Verf. beweist: Gelingt es zu zeigen, daß es für jedes Paar ganzer Zahlen z, xy unendlich viele Primzahlen p gibt, so daß das Kongruenzenpaar $(n^{n+1} - 4n)^{\varphi(p)/2} \equiv 1$, $z^2 \equiv nxy \pmod{p}$ unlösbar ist, so ist damit die Fermatsche Vermutung bewiesen. In Teil II, § 12 der Arbeit beschäftigt sich Verf. mit der zahlentheoretischen Funktion $p(n)$. Sie ist so definiert: Ist $\varphi(n) = \varphi_1(n)$, $\varphi(\varphi(n)) = \varphi_2(n)$, ..., wird weiter diese abnehmende Folge soweit fortgesetzt, bis $\varphi_{t-1}(n) > 1$, $\varphi_t(n) = 1$ ist, so ist $p(n) = \sum_{j=1}^t \varphi_j(n)$.

Insbesondere untersucht er $p(n) = n$. Er beweist unter anderem: Ist $p(3K) = 3K$, sind weiter $64K + 5$ und $16K + 1$ Primzahlen, so erfüllt $n = 27(64K + 5)$ die Gleichung. Ein Beispiel ist $K = 27$, $16K + 1 = 433$, $64K + 5 = 1733$, $n = 46791$. Teil III, § 13f. behandelt zahlentheoretische Funktionen $\vartheta_a(n)$, die sich aus einer anderen $f_a(n)$ durch $\vartheta_a(n) = \max \{f_a(\mu) + f_a(n - \mu)\}$, $\mu = 1, 2, \dots, [n/2]$ ergeben. So gibt z. B. $\varphi_j(n)$ eine Funktion $\vartheta_j(n)$, die einfach so bezeichnet werde, weil andere Funktionen dieser Art nicht betrachtet werden. § 14 zeigt $\vartheta_1(2u) = \vartheta_1(2u + 1)$, in § 15 wird bewiesen: Es gibt keine Primzahl p mit $\vartheta_1(n) < p < n$, dagegen in § 16: Es gibt mindestens eine Primzahl p mit $n < p \leq \vartheta_1(2n - 1)$. § 17 zeigt, daß bei Annahme der Richtigkeit der Goldbachschen Vermutung stets $\vartheta_1(2u) < \vartheta_1(2u + 2)$ ist. Dagegen ist es leicht Beispiele für $\vartheta_1(2u - 1) > \vartheta_1(2u + 1)$ zu geben, z. B. $\vartheta_1(539) > \vartheta_1(541)$. § 18 gibt einige Sätze über $\vartheta_K(K > 1)$, § 19 tabuliert $\vartheta_1(n)$ für $2 \leq n \leq 116$. Teil IV, § 20 gipfelt in dem Satz: Genau dann, wenn sowohl a als auch $a + 1$ sich als Summe zweier natürlicher Zahlen $a = A + B$, $a + 1 = C + D$ mit $AB = CD$ darstellen lassen, ist $2a + 1$ eine zusammengesetzte Zahl.

L. Holzer.

Perez-Cacho, T: Über einige Fragen der Zahlentheorie. Mem. mat. Inst. „Jorge Juan“ Nr. 20, 29 p. (1958) [Spanisch].

Genauer Abdruck der vorstehend referierten Arbeiten des Verf. mit gleichem Titel.

L. Holzer.

Duncan, R. L.: A topology for sequences of integers. I. Amer. Math. Monthly 66, 34—39 (1959).

Sei S die Klasse aller unendlichen, nach wachsender Größe der Elemente geordneten Mengen $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ von natürlichen Zahlen, bei denen die natürliche Dichte $\delta(A) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x}$ mit $A(x) = \sum_{a \leq x, a \in A} 1$ existiert. In S betrachtet man üblicherweise die Metrik [siehe z. B. H. H. Ostmann, Additive Zahlentheorie I (dies. Zbl. 72, 31) S. 7], bei der $d(A, A) = 0$ und $d(A, B) = n^{-1}$ gesetzt wird, wenn $A \neq B$ und n das kleinste Element der symmetrischen Differenz ist. Statt dessen definiert Verf. (nicht ohne eine gewisse Willkür) die Metrik $\rho(A, A) = 0$; $\rho(A, B) = k^{-1} + |\delta(A) - \delta(B)|$, wenn $A \neq B = \{b_1, b_2, \dots\}$ und k der kleinste Index mit $a_k \neq b_k$ ist. Einige Eigenschaften dieser Metrik und der induzierten

Topologie werden nachgewiesen, darunter die folgenden: 1. Die gewöhnliche Dichte $\frac{\text{fin}}{x=1,2,\dots} \frac{A(x)}{x}$ werde mit $D(A)$ bezeichnet. Ist $\{A_n\}$ eine Mengenfolge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} D(A_n) \leq D(A)$, und falls der Doppellimes $\lim_{n,k \rightarrow \infty} \frac{A_n(k)}{k}$ existiert, gilt sogar $\lim_{n \rightarrow \infty} D(A_n) = D(A)$. — 2. S ist separabel, nirgends lokalkompakt und total unzusammenhängend. — 3. Es gibt eine stetige, umkehrbar eindeutige Abbildung von S auf eine (im topologischen Sinn) nulldimensionale Untermenge des Intervalles $[0, 1]$. — 4. Bezüglich der Operation $AB = \{b_{a_1}, b_{a_2}, \dots\}$ ist S ein „mob“ (d. h. eine topologische Halbgruppe mit stetiger Verknüpfung). B. Volkmann.

Golubew, W. A.: Abzählung von „Vierlingen“ und „Fünflingen“ bis zu 5 000 000 und von „Sechslingen“ von 0 bis 14 000 000. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1957, 82—87 (1957).

Die Listen und Abzählungen einer früheren Mitteilung des Verf. [ibid. 1956, 153—157 (1956)] werden bis zu $5 \cdot 10^6$ ausgedehnt. Ferner werden die Anzahlen der Primzahlzwillinge zwischen x^3 und $(x+1)^3$, die der Vierlinge zwischen x^5 und $(x+1)^5$ und der Fünflinge zwischen x^6 und $(x+1)^6$ für jeweils gewisse x angegeben. Das Verzeichnis der Sechslinge — Differenzenfolge: 4, 2, 4, 2, 4 — wurde für das Intervall von 10^7 bis $1,4 \cdot 10^7$ nach eigenen, im Manuskript vorliegenden Tafeln des Verf. aufgestellt. B. Schoeneberg.

Golubew, W. A.: Abzählung von „Vierlingen“ und „Fünflingen“ bis zu 10 000 000. Einige Formeln. Österreich. Akad. Wiss., math. naturw. Kl., Anzeiger 1957, 274—280 (1957).

Frühere Listen von Primzahlvierlingen und Primzahlfünflingen und Abzählungen über ihre Verteilung auf die Restklassen mod 210 werden bis 10^7 erweitert. (Vgl. vorstehendes Referat und dortiges Zitat.) Verf. vermutet für die Anzahl der 4-, 5- und 6-linge unterhalb x die Formel $\pi_v(x) \sim c_v x/(\log x)^v$, $v = 4, 5, 6$ mit von x unabhängigem c_v und berechnet in $\pi_v(x) = c_v^* x/(\log x)^v$ das c_v^* als Funktion von x für gewisse x . — Wenn Verf. in diesem Zusammenhang von „beweisen“ spricht, handelt es sich um eine sprachliche Unzulänglichkeit. B. Schoeneberg.

Corrádi, Keresztély: Über den Zusammenhang der Primzahlsätze arithmetischer Progressionen derselben Differenz. Mat. Lapok 9, 67—89, russ. und deutsche Zusammenfassg. 89—90 (1958) [Ungarisch].

Es wird folgender Satz bewiesen: Gilt für eine arithmetische Progression $kn + l$ ($(k, l) = 1$; $n = 1, 2, \dots$) der Primzahlsatz, so gilt er auch für alle arithmetischen Progressionen $kn + l'$ mit $(k, l') = 1$. Das Wesentliche an der Arbeit ist, daß der Beweis elementar geführt wird und nicht einmal die Selbergsche Formel benutzt wird, die bei allen bekannten elementaren Beweisen des Primzahlsatzes (und des Primzahlsatzes für arithmetische Progression) angewendet wurde. P. Szűsz.

Erdős, P. and G. G. Lorentz: On the probability that n and $g(n)$ are relatively prime. Acta arithmetica 5, 35—44 (1959).

Das von Mertens herrührende Resultat $\sum_{k=1}^n \varphi(k) \sim \frac{3}{\pi} n^2$ läßt sich in der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung so formulieren, daß die Wahrscheinlichkeit für die Relation $(n, m) = 1$ gleich $6/\pi^2$ ist; hier bedeuten n und m zwei zufällig und unabhängig gewählte natürliche Zahlen. Verff. behandeln die entsprechende Frage, wenn n und m nicht unabhängig sind, sondern etwa m von n abhängt, d. h. $m = g(n)$ ist. Das Hauptergebnis der Arbeit lautet folgendermaßen: Satz 2. Es sei $f(x)$ eine differenzierbare, (mod 1) „homogen gleichverteilte“ Funktion, d. h. die Folge $f(dx)/d$ ($x = 1, 2, \dots$) sei für jedes natürliche d (mod 1) gleichverteilt. Ferner sei vorausgesetzt, daß die folgenden Beziehungen gelten: (A) $f(x) = o\left(\frac{x}{\log \log x}\right)$;

(B) $x f'(x)/\log \log \log x \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ (C) Es ist $f'(y) \leq M f'(x)$ für $y \geq x$, wobei M eine numerische Konstante ist. Man setze $g(x) = [f(x)]$. Dann ist die „Wahrscheinlichkeit“ für $(n, g(n)) = 1$ gleich $6/\pi^2$. Unter „Wahrscheinlichkeit“ wird der Grenzwert der relativen Häufigkeit der Zahlen n mit $(n, g(n)) = 1$ unter N für $N \rightarrow \infty$ verstanden. Es wird gezeigt, daß sich die Beschränkung (B) nicht durch eine mildere ersetzen läßt. Verff. behandeln auch den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x}$, wobei $S(x)$, die Summe der Teileranzahlen von $(n, g(n))$ mit $n \leq x$ bedeutet. In dieser Richtung wird folgender Satz bewiesen: Satz 3. Ist $f(x) = O(x/\log x)$ und $x f'(x)/\log \log x \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$, bezeichnet ferner wieder $g(x) = [f(x)]$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{\pi^2}{6}. \quad P. Szűsz.$$

Pitt, H. R.: A general Tauberian theorem related to the elementary proof of the prime number theorem. Proc. London math. Soc., III. Ser. 8, 569—588 (1958).

Es handelt sich um die Transformation (1) $g(x) = s(x) + x^{-1} \int_0^x s(x-y) dk(y)$ ($x > 0$), die eng mit dem elementaren Beweis des Primzahlsatzes zusammenhängt (vgl. A. Selberg, dies. Zbl. 36, 306). Bei diesem Beweis wird gezeigt, daß $g(x) \rightarrow 0$ strebt (stets: für $x \rightarrow \infty$), wenn $k(x) = \sum p^{-1} \log p$ (p Primzahl, $\log p \leq x$), $\vartheta(u) = \sum \log p$ ($p \leq u$) und $s(x) = e^{-x} \vartheta(e^x) - 1$ ist; sodann wird in Tauberscher Weise von $g(x) \rightarrow 0$ auf $s(x) \rightarrow 0$ geschlossen, wobei der Zusammenhang (2) $k(x) = s(x) + \int_0^x s(y) dy + x + 1$ benützt wird. Verf. untersucht nun die Taubersche Umkehrung von (1) allgemein. Sei $k(x)$ monoton zunehmend für $x \geq 0$, $k(0) = 0$, $\lim x^{-1} k(x) = 1$, (3) $\lim [k(x) - k(x-\delta)] = \eta(\delta) < \infty$ für jedes $\delta > 0$. Es gilt, auch ohne Voraussetzung von (3), der Abel-Satz, daß aus $s(x) \rightarrow A$ folgt $g(x) \rightarrow 2A$. Für den Umkehrschluß wird vorausgesetzt, daß $s(x)$ (reell, beschränkt, Borel-meßbar in jedem endlichen Intervall) langsam abnehmend, d. h. daß $\lim [s(x') - s(x)] \geq 0$ ($x' \geq x$, $x' - x \rightarrow 0$) ist. Dies allein genügt aber noch nicht, man benötigt außerdem eine Bedingung über $k(x)$. Theorem 1 sagt aus, daß folgende Bedingung als Zusatzbedingung über $k(x)$ hinreichend ist: Ist $k_1(x) = k(x)$, $k_n(x) = \int_0^x k_{n-1}(x-y) dk(y)$ ($n \geq 2$), so ist — für jedes $\delta > 0$ und jede unbeschränkte, monoton wachsende Folge $\{x_v\}$ —

$$\lim_{v \rightarrow \infty} x_v^{1-n-m} \int_0^{x_v} [k_n(y) - k_n(y-\delta)] [k_m(y) - k_m(y-\delta)] dy > 0$$

für eine ungerade natürliche Zahl n und eine gerade natürliche Zahl m (n und m von δ und $\{x_v\}$ abhängig). Theorem 2 gibt eine weitere hinreichende Bedingung an:

Ist $K(\omega) = \int_0^\infty e^{-\omega y} dk(y)$ ($\omega = \sigma + i t$, $\sigma > 0$), so ist $\lim_{\sigma \rightarrow +0} \inf_{|t| \leq T} |1 + \sigma K(\omega)| > 0$

für jedes $T > 0$. Theorem 3 sagt aus, daß die Bedingungen der Theoreme 1 und 2 äquivalent und bestmöglich sind. Theorem 4: Die Bedingung $\eta(\delta) \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$ ist hinreichend (aber nicht bestmöglich). Verf. bespricht verschiedene Möglichkeiten eines elementaren Beweises des Primzahlsatzes mit Hilfe von Theorem 1, insbesondere solche, bei denen (2) nicht benützt wird. Besonders vorteilhaft ist es, mit $k(x) = \sum p^{-\alpha} \log p$ ($\log p^\alpha \leq x$, α eine natürliche Zahl) und $s(x) = \sum n^{-1} \mu(n)$ ($n \leq x$, $\mu(n)$ die Möbiussche Funktion) zu arbeiten. Theorem 2 ermöglicht einen nicht elementaren, die ζ -Funktion benützenden Beweis des Primzahlsatzes (dem allerdings der Beweis mit Hilfe des Landau-Ikehara'schen Satzes überlegen ist). Weitere Literatur: Verff., Tauberian theorems (1958; dies. Zbl. 84, 324).

W. Meyer-König.

Ehlich, Hartmut: Ein elementarer Beweis des Primzahlsatzes für binäre quadratische Formen. *J. reine angew. Math.* **201**, 1—36 (1959).

The theorem in question is the statement that if $\pi(x, D, f)$ is the number of primes $\leq x$ representable by the primitive binary quadratic form f of nonsquare discriminant D , then $\pi(x, D, f) \sim x/(\varepsilon h \log x)$, where h is the number of equivalence classes of forms of discriminant D and $\varepsilon = 2$ or 1 according as f belongs to a two-sided class or not. The author uses purely elementary results on the average order of arithmetic functions to derive the following analog of a formula of Selberg:

$$\log x \sum_{p \leq x; (p, D)=1; p \in \mathfrak{F}} \log^2 p + \sum_{pq \leq x; (pq, D)=1; pq \in \mathfrak{F}; (p, q)=1} \log p \log q \\ = (2 \omega x \log x)/h + O(x \sqrt{\log x}),$$

where the sums range over all "proper primary" representations of p , respectively, pq , by forms (a, b, c) ($a > 0$) in a given equivalence class \mathfrak{F} . He then derives estimates on $\vartheta(x, D, \mathfrak{F}) = \sum_{p \leq x; (p, D)=1; p \in \mathfrak{F}} \log p$ which eventually lead to the desired result.

J. P. Tull.

Rogers, C. A.: The packing of equal spheres. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **8**, 609—620 (1958).

Let S be a set of congruent closed spheres in R^n such that no two of these spheres have inner points in common. If C is any cube, denote by V the volume of C and by V' the volume of the intersection of C with the union of the spheres in S . S is said to have the density ϱ if $V'/V \rightarrow \varrho$ as the sides of C tend to ∞ . Put $\varrho_n = \sup \varrho$ where the upper bound is extended over all sets S which have a density ϱ . — Next let Σ be a simplex in R^n with sides of length 2; S_1 the set of the $n+1$ spheres of unit radius with centres at the vertices of Σ ; V_1 the volume of Σ , V'_1 the volume of the intersection of Σ with the union of the spheres in S_1 ; and let finally $\sigma_n = V'_1/V_1$. The author proves that $\varrho_n \leq \sigma_n$. This result is very strong. It is best-possible for $n = 2$, and better than any result previously known for $n \geq 3$. For large n , $\sigma_n \sim n e^{-1} 2^{-n/2}$.

K. Mahler.

Foster, D. M. E.: On a class of quadratic polynomials in n variables. *Quart. J. Math.*, Oxford II. Ser. **9**, 241—256 (1958).

Let L_1, \dots, L_n be n real linear forms in u_1, \dots, u_n of determinant $\Delta \neq 0$, and let c be a real number. Put

$$q(u_1, \dots, u_n) = \mp L_1^2 \mp \dots \mp L_{n-1}^2, \quad \wp(u_1, \dots, u_n) = q(u_1, \dots, u_n) + L_n + c,$$

so that q is a singular quadratic form of rank $n-1$. The author proves the following two theorems. (1) If the ratios of the coefficients of $\wp - c$ are not all rational, $|\wp| < \varepsilon$ has integral solutions u_1, \dots, u_n for every $\varepsilon > 0$. (2) If all these ratios are rational, there exist integral solutions of $|\wp| \leq (\frac{1}{2} |\Delta|)^{2/(n+1)}$, except perhaps in the case when q is definite and $n \geq 10$. The upper bound may be attained. — The proof is by induction for n .

K. Mahler.

Danicic, I.: An extension of a theorem of Heilbronn. *Mathematika*, London **5**, 30—37 (1958).

Heilbronn (dies. Zbl. **31**, 205) hat gezeigt: Ist $\varepsilon > 0$, $N > 1$ und θ eine reelle Zahl, so existiert eine ganze Zahl x , so daß

$$1 \leq x \leq N \quad \text{und} \quad \|\theta x^2\| < C N^{-\frac{1}{2} + \varepsilon},$$

wo $C = C(\varepsilon)$ ($\|\alpha\| = \min(\alpha - [\alpha], [\alpha + 1] - \alpha)$). Dieser Satz wird nun auf beliebige quadratische Formen

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j, \quad (\alpha_{ij} = \alpha_{ji})$$

verallgemeinert: Ist $\varepsilon > 0$, $N > 1$, dann existieren ganze Zahlen $x_1, \dots, x_n \neq 0, \dots, 0$, so daß $|x_j| \leq N$ ($j = 1, \dots, n$) und

$$\|Q(x_1, \dots, x_n)\| < C N^{-n/(n+1) + \varepsilon}, \quad \text{wo} \quad C = C(n, \varepsilon).$$

Der Nachweis ist nicht leicht und beruht auf der Abschätzung von Exponentialsummen und auf folgendem Hilfssatz aus der Geometrie der Zahlen: Es sei $X = (x_1, \dots, x_n)$, $|X| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$, ferner seien $L_1(X), \dots, L_n(X)$ Linearformen mit der reellen Matrix \mathfrak{A} ; $N > 1$, $M > 1$. Wenn die Ungleichungen

$$\|L_i(X)\| \leq N^{-1} M^{-1} \quad (i = 1, \dots, n), \quad |X| \leq N$$

nur die triviale ganzzahlige Lösung haben, dann ist die Anzahl der ganzzahligen Lösungen X der Ungleichungen

$$\|L_i(X)\| \leq N^{-1} \quad (i = 1, \dots, n), \quad |X| \leq N M$$

kleiner als $C M^n$. (C ist unabhängig von N und den Koeffizienten α_{ij} der Matrix \mathfrak{A}).
N. Hofreiter.

Knapowski, S.: On the distribution of values of the Möbius function. Centre Belge Rech. math., Colloque sur la Théorie des Suites, Bruxelles du 18 au 20 déc. 1957, 161—164 (1958).

This note is concerned with lower estimates on the mean value of the Möbius function. Let $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$. A sketch is given of a proof (to appear in Acta Arithmetica) that the hypothesis

$$(5) \quad \int_1^T \left(\frac{M(x)}{x} \right)^2 dx \leq \alpha \log T$$

for $T \geq 1$, α independent of T , implies the inequality

$$(6) \quad \max_{1 \leq x \leq T} |M(x)| > T^{1/2} e^{-\log T / \sqrt{\log \log T}}$$

for $T > c(\alpha)$. The proof uses a lemma of Turán (Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, this Zbl. 52, 46). The author states that (5) is a very strong assumption since it implies the Riemann hypothesis, the simplicity of all zeros of the zeta-function and a lower estimate on the distance between different zeros. However, he states that he is able to replace (5) by a weaker and more plausible hypothesis.
J. P. Tull.

Erdős, P.: Asymptotic formulas for some arithmetic functions. Canadian math. Bull. 1, 149—153 (1958).

Verf. beweist folgenden Satz: „Sei α irrational, $0 < \alpha < 1$; $d(y)$ bezeichne die Anzahl der (positiven) Teiler von y . Dann und nur dann ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x d((n, [\alpha n])) = \frac{\pi^2}{6},$$

wenn für jedes reelle $c > 0$ höchstens endlich viele natürliche Zahlen a, b mit $\alpha < a/b < \alpha + (1+c)^{-b}$ existieren“. Der Beweis macht von der Gleichverteilung der Zahlenfolge αn ($n = 1, 2, \dots$) Gebrauch. Ein ähnlicher Satz für die Funktion $\sigma(y)$ (= Summe der Teiler von y) an Stelle von $d(y)$ wird ohne Beweis angegeben.

B. Volkmann.

LeVeque, William J.: On the frequency of small fractional parts in certain real sequences. Trans. Amer. math. Soc. 87, 237—260 (1958).

Es sei $f(x)$ eine monoton abnehmende positive Funktion, ferner bezeichne $\|z\|$ den Abstand der reellen Zahl z von der nächstbenachbarten ganzen Zahl. Ein bekannter Satz von Chinč'in besagt, daß die Ungleichung (1) $\|\alpha n\| < f(n)$ für fast alle α (d. h. für alle reellen α , höchstens bis auf eine Nullmenge) höchstens endlich viele oder unendlich viele Lösungen in natürlichen n besitzt, je nach dem die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert oder divergiert. Vorliegende Arbeit behandelt die Frage nach der Anzahl der Lösungen von (1), die unterhalb einer gegebenen Schranke liegen und einige analoge Fragen, die sich auf den Fall beziehen, wenn für n in (1) nicht alle natürlichen Zahlen zugelassen werden, sondern nur eine Teilfolge der natürlichen

Zahlenreihe. Einige charakteristische und interessante Resultate seien zitiert: Satz 1. Es sei $f(x)$ eine monoton abnehmende positive Funktion, die den Relationen

(2) $f(x) = O(x^{-1})$, $f'(x) = O(x^{-2})$ ($x \rightarrow \infty$), (3) $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \infty$ genügt; ferner sei gesetzt $g(x) = f(\log x)/x$. Es bezeichne $T_n = T_n(\alpha)$ die Zahl

$$T_n(\alpha) = \sum_{k \leq n, ||\alpha k|| < g(k)} 1,$$

$\mu(E)$ das Lebesguesche Maß der Menge E ,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n(x)) = \Phi(x)$, wobei $E_n(x)$ die Menge der Zahlen α in $(0, 1)$ bedeutet, für die

$$(4) \quad T_n(\alpha) < \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=1}^n g(k) + x \left(\frac{12}{\pi^2} \sum_{k=1}^n g(k) \right)^{1/2}$$

gilt. Satz 3. Es sei r_1, r_2, \dots eine nichtabnehmende Folge natürlicher Zahlen, für die $r_n^m > n$ mit einem festen natürlichen m gilt; man setze ferner $R_n = r_1 r_2 \dots r_n$.

Es sei $f(x)$ eine monoton abnehmende Funktion mit $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \infty$, ferner sei die natürliche Zahl k_n definiert durch

$$[r_{n+1} r_{n+2} \dots r_{n+k_n-1} f(n) + \tfrac{1}{2}] = 0, \quad [r_{n+1} \dots r_{n+k_n} f(n) + \tfrac{1}{2}] \neq 0.$$

(Ist insbesondere $[r_{n+1} f(n) + \tfrac{1}{2}] \neq 0$, so ist $k_n = 1$). Es sei vorausgesetzt, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n r_{n+1} \dots r_{n+k_n}}$ konvergiert. Dann gilt

$$(5a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n^*(x)) = \Phi(x),$$

wobei $E_n^*(x)$ die Menge der α in $(0, 1)$ bedeutet, für die

$$k \leq n, ||R_k \alpha|| < f(k) \quad 1 < 2 \sum_{k=1}^n f(k) + x \left(2 \sum_{k=1}^n f(k) \right)^{1/2}$$

gilt. Die Beweise werden mittels der Wahrscheinlichkeitsrechnung geführt. Beide zitierten Sätze sind Analoga des zentralen Grenzwertungssatzes. Bei den Beweisen entstehen dadurch Schwierigkeiten, daß die auftretenden Zufallsveränderlichen nicht unabhängig sind.

P. Szűsz.

Ridout, D.: The p -adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem. Mathematika, London 5, 40—48 (1958).

Entsprechend dem von K. F. Roth (dies. Zbl. 64, 285) erzielten großen Fortschritt über den Thue-Siegelschen Satz wird hier eine von K. Mahler (dies. Zbl. 6, 105) gegebene p -adische Verallgemeinerung dieses Satzes verschärft, indem der Siegel-sche Exponent im Mahlerschen Satz (Satz 1 seiner Arbeit) durch den Rothschen ersetzt wird. Dieser Hauptsatz des Verf. (Theorem 1) lautet: „Die Gleichung $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ mit ganzen rationalen Koeffizienten und $n \geq 2$ besitze im Körper der reellen Zahlen eine Wurzel ζ , im Körper der p_1 -adischen Zahlen eine Wurzel ζ_1, \dots , im Körper der p_t -adischen Zahlen eine Wurzel ζ_t , wobei p_1, p_2, \dots, p_t voneinander verschiedene Primzahlen bedeuten. Dann hat die Ungleichung

$$\min(1, |\zeta - h/q|) \prod_{\tau=1}^t \min(1, |h - q \zeta_{\tau}|_{p_{\tau}}) \leq \max(|h|, |q|)^{-\kappa}$$

höchstens endlich viele Lösungen in ganzen rationalen h, q mit $(h, q) = 1$, wenn $\kappa > 2$ ist“. Daraus folgt, wie bei Mahler, eine entsprechende Verschärfung seines

Satzes 2 (über irreduzible binäre Formen vom mindestens 3. Grad), welche überdies dem Theorem 1 fast äquivalent ist. Beim Beweise vom Theorem 1 schließt sich Verf. eng an die Rothsche Arbeit an, indem er die dortigen Hilfssätze auf den vorliegenden Fall mit sinngemäßen Modifikationen überträgt. *O. S. İçen.*

Fenna, D.: Simultaneous diophantine approximation to series. J. London math. Soc. **34**, 173—176 (1959).

Es sei \mathfrak{K} die Menge aller formalen Laurentreihen $x = \alpha_d z^d + \alpha_{d-1} z^{d-1} + \dots$ mit Koeffizienten aus einem Körper \mathfrak{f} . Es werde ferner $\mathfrak{T} = \mathfrak{f}[z]$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{f}(z)$ gesetzt. In \mathfrak{K} wird üblicherweise durch $|0| = 0$ und $|x| = z^d$ ($\alpha_d \neq 0$, $z > 1$, reell) wenn $\alpha_d \neq 0$, eine nichtarchimedische Bewertung $||$ definiert. Wenn $n > 1$, $t_1, \dots, t_n \in \mathfrak{K}$ aber nicht alle $\in \mathfrak{R}$, wird $c(n)$ als das Supremum aller c definiert, für welche die simultanen Ungleichungen $|b_0(b_0 t_i - b_i)^n| \leq z^{-c}$ ($i = 1, \dots, n$) für alle wie oben gewählten t_1, \dots, t_n unendlich viele Lösungen in b_0, b_1, \dots, b_n besitzen mit $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{T}$ und $b_0 \neq 0$. Verf. beweist die Behauptung: $c(n) = n$, womit das Analogon des Problems der simultanen Approximation n ($n > 1$) reeller Zahlen durch rationale für Reihen obiger Art vollständig gelöst wird. *O. S. İçen.*

Analysis.

● **Duschek, A.: Vorlesung über höhere Mathematik. 2. Band: Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Lineare Algebra. Tensorfelder. Differentialgeometrie.** 2. neubearb. Aufl. Wien: Springer-Verlag 1958. VIII, 401 S. 136 Textabb. DM 45,—.

Das Manuskript zur zweiten Auflage übergab Verf. einige Wochen vor seinem plötzlichen Ableben dem Verlage. Der Text wurde gründlichst revidiert. Es wurden Flüchtigkeiten der ersten Auflage beseitigt und einzelne Abschnitte völlig neu bearbeitet. Inhaltlich sind gegenüber der ersten Auflage (dies. Zbl. **41**, 375) im wesentlichen folgende Änderungen vorgenommen worden: Das Kapitel über die unendlichen Reihen wurde in Band 1 (dies. Zbl. **70**, 277) übernommen. Das Kapitel über Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik ist fortgefallen, da sich dieses Gebiet so zu einem eigenen Fach entwickelt hat, daß es aus der Hauptvorlesung herausgenommen worden ist. Ganz neu hinzugekommen sind zwei Paragraphen über Raumkurven und Grundzüge der Flächentheorie in tensorieller Darstellung. Hervorzuheben ist die reichhaltige Sammlung der Aufgaben mit Lösungen. Der Inhalt wird ganz grob durch die Kapitelüberschriften gekennzeichnet: I. Grundbegriffe (Differentiation von Funktionen von mehreren Veränderlichen), II. die Integration von Funktionen von mehreren Veränderlichen, III. Lineare Algebra, IV. Tensoranalysis und Differentialgeometrie. *L. Collatz.*

● **Gerretsen, J. C. H.: Tangente und Flächeninhalt. Eine Einführung in die Infinitesimalrechnung auf anschaulicher Grundlage.** Haarlem: De Erven F. Bohn N. V. 1959. XIII, 380 S. f 20,— [Holländisch].

Diese für Techniker, Naturwissenschaftler, Biologen, Mediziner gedachte Infinitesimalrechnung von Funktionen einer Veränderlichen enthält in ihrem ersten Drittel eine den Bedürfnissen der höheren Analysis angepaßte Wiederholung und Erweiterung der niederen Funktionenlehre (u. a. eine Behandlung des Logarithmus nach dem Kleinschen Verfahren). Im ganzen Buch sind die grundlegenden Auseinandersetzungen immer in breiter Darstellung und unter fortwährender Appellation an die Anschauung geführt; ein genügendes Maß an Strenge ist erreicht. Die bekannte Formel $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, bei $F(x)$ stetig in $[a, b]$, und $F'(x) = f(x)$ bis auf endlich viele Ausnahmepunkte, wird zur Definition des bestimmten Integrals

erhoben. Neben zwei Paragraphen über Fourier-Reihen ist insbesondere das letzte Kapitel, welches in die Technik der Laplace-Transformation einführt, zu erwähnen.

J. Ridder.

• **Kokits, Zsigmond:** *Elementary mathematics.* (Technical Mathematical Exercises A. I.) Budapest: Tankönyvkiadó 1952. 105 p. 20,50 Ft. [Ungarisch].

• **Frey, Tamás:** *Elementary functions of one variable.* (Technical Mathematical Exercises A. II.) Budapest: Tankönyvkiadó 1952. 208 p. 39,— Ft. [Ungarisch].

• **Bajesay, Pál:** *Differential calculus.* (Technical Mathematical Exercises A. III.) Budapest: Tankönyvkiadó 1952. 135 p. 25,50 Ft. [Ungarisch].

Koschmieder, Lothar: *Extrema without differential calculus. II.* Bull. College Arts Sci. Baghdad 3, 49—59 (1958).

Fortsetzung von I (dies. Zbl. 78, 246). Verf. vervollständigt zunächst den ersten Teil durch einige Hinweise auf einige ihm damals nicht zugängliche fremde Arbeiten über denselben Gegenstand. — Seine neue Arbeit II beschäftigt sich mit Aufgaben, die auf kubische Polynome mit reellen Koeffizienten führen.

M. Zacharias.

Uchiyama, S.: *Sur les sommes de puissances des nombres complexes.* Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 275—278 (1958).

The numbers

$$M_n = \inf_{z_1, \dots, z_n} \sup_{1 \leq \nu \leq n} \left[|z_1^\nu + \dots + z_n^\nu| \left/ \left| \max_{1 \leq j \leq n} |z_j| \right|^\nu \right. \right]$$

where z_1, \dots, z_n run independently over all complex numbers not simultaneously 0, have been considered by Turán (Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, this Zbl. 52, 46). Turán conjectured that M_n is bounded below as $n \rightarrow \infty$ but could only prove that

$$\liminf (\log n) M_n > \log 2.$$

In the Chinese edition of his book (Peking, 1956) Turán gives a proof due to N. G. de Bruijn that

$$\liminf [(\log n) M_n / \log \log n] > 0.$$

In this paper the author shows that in fact

$$\liminf [(\log n) M_n / \log \log n] \geq 1$$

by a method which is stated to resemble that of de Bruijn. More precisely, he shows that

$$M_n \exp \left\{ M_n \sum_{1 \leq \nu \leq n} \frac{1}{\nu} \right\} > \frac{2\sqrt{3}}{\pi}.$$

The paper concludes with the remark, that the investigation has a practical value because it permits an explicit estimate of error in the application of Graeffe's method for the approximate solution of algebraic equations.

J. W. S. Cassels.

Mordell, L. J.: *On a distance-function inequality and A. Brauer's inequality for Cassini curves.* J. Analyse math. 6, 177—181 (1958).

Verf. verallgemeinert eine Ungleichung von A. Brauer (dies. Zbl. 46, 12), die auch von Ostrowski (dies. Zbl. 66, 393) bewiesen wurde. Er zeigt, welche Tatsachen dieser Ungleichung zugrunde liegen, und gibt einen einfacheren, durchsichtigeren Beweis der verallgemeinerten Ungleichung: Es seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n+1} < k$ reelle Zahlen; $\lambda'_{n+1} \leq \lambda_{n+1}$.

$$\text{Es gelte } \prod_{r=1}^{n+1} |z - \lambda_r| \leq \prod_{r=1}^{n+1} (k - \lambda_r).$$

Dann gilt $|z - \lambda'_{n+1}| \prod_{r=1}^n |z - \lambda_r| \leq (k - \lambda'_{n+1}) \prod_{r=1}^n (k - \lambda_r)$.

J. L. Brenner.

Mengenlehre:

Čulík, Karel: Über die lexikographische Summe der teilweise geordneten Mengen. Časopis Mat. 84, 16—27, russ. und deutsche Zusammenfassg. 27—30 (1959). [Tschechisch].

Der Aufsatz befaßt sich mit Zerlegungen der geordneten (d. h. teilweise geordneten) Mengen M . Sei $X \subseteq M$; man sagt, X sei eingelegt in M (oder ist ein Stück in M), wenn $x, y \in M, z \in M \setminus X \Rightarrow (x < z \Leftrightarrow y < z)$ und $(x > z \Leftrightarrow y > z)$. Insbesondere betrachtet Verf. maximale Stücke von M . Durch jede Zerlegung Z von M in Stücke wird die bezügliche Faktormenge Z definiert: das ist die Menge Z , so geordnet, daß man für $X, Y \in Z, X \neq Y$ hat: $(X < Y \text{ in } Z) \Leftrightarrow (x < y \text{ mit } x \in X, y \in Y)$. M heiße lexikographisch unzerlegbar bzw. fast unzerlegbar, wenn $M = \sum_{x \in X} M_x \Leftrightarrow k M_w = 1$ ($x \in X$) oder $k X = 1$ nach sich zieht, bzw. wenn in der Menge $\{X, M_x\}_{x \in X}$ ein mit M isomorphes Element existiert. Verf. betrachtet insbesondere alle Faktormengen von unzerlegbaren Stücken und gibt charakteristische Bedingungen, damit die kleinste Hülle H von diesen Zerlegungen wieder aus lexikographisch unzerlegbaren Stücken besteht: keine eingelegte Antikette (Kette) soll mehr als zwei (konsekutive) Elemente haben (Satz 5). Jedenfalls ist H eine Faktormenge; ihre Elemente sind lexikographisch unzerlegbar oder Ketten $\leq \omega^* + \omega$ oder Antiketten (Satz 4). G. Kurepa.

Erdős, P. and R. Rado: A theorem on partial well-ordering of sets of vectors. J. London math. Soc. 34, 222—224 (1959).

In an earlier paper (this Zbl. 57, 43) R. Rado considered, for any abstract set S and any ordinal n , the set $W_S(n)$ of all vectors of "length" n over S . If one puts further $W_S(< n)$ equal to the union of all $W_S(m)$ for all $m < n$, then any quasi-order \leq on S induces a quasi-order on $W_S(< n)$ defined by: $X \leq Y$ if and only if the sequences of components of X and Y satisfy $x_i \leq y_{t(i)}$ for each i and an increasing sequence of subscripts $t(i)$. Graham Higman (this Zbl. 47, 34) showed that if S is partially well-ordered, then so is $W_S(< \omega)$, and R. Rado showed (loc. cit.) that this is not generally true for $W_S(\omega)$. He conjectured, however, that for the set $V_S(n)$ of all vectors with only a finite number of distinct components, and the corresponding set $V_S(< n)$, it is true that $V_S(< n)$ is partially well-ordered if S is partially well-ordered, whatever the ordinal n . He obtained some partial results in this direction. In the present note the authors prove this conjecture for all n less than ω^ω . They state that a — longer and unpublished — proof by J. Kruskal stimulated their present proof. Hanna Neumann.

Popruženko, J.: Sur une proposition équivalente à l'hypothèse du continu. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 203—206 (1958).

Soit E l'ensemble de toutes les suites n_1, n_2, \dots d'entiers positifs tendant vers ∞ ; si l'on pose, pour deux suites x, y paireslles, $x \gg y$ si et seulement si $\lim x_i/y_i = \infty$, alors E devient partiellement ordonné; de plus pour chaque sousensemble dénombrable X il y a deux points $s, t \in E$ vérifiant $t \gg X \gg s$. On en conclut que E contient une chaîne de type $\omega_1^* + \omega_1$. Alors l'A. démontre que l'hypothèse du continu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ équivaut à la proposition que voici: E contient une chaîne H de type d'ordre $\omega_{(c)}^* + \omega_{(c)}$, ou $\aleph_{(c)} = 2^{\aleph_0}$, telle que, pour tout $e \in E$, H contient deux éléments e_0, e_1 vérifiant $e_1 \gg e \gg e_0$ et que l'intervalle $H(e_0, e_1)$ des éléments de H situés entre e_0, e_1 soit $\leq \aleph_0$. La Note se rattache à un article précédent de l'A. (cf. ce Zbl. 71, 275). G. Kurepa.

Mrówka, S.: A remark on compactifications of a set. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 1105—1108 (1957).

In connection with a statement of De Vries (this Zbl. 78, 42) the author proves that for each set S of cardinality $\geq c$ and each permutation p of S there exists a topology for S in which S is compact and p is a homeomorphism. The proof is similar

to the one by De Vries. The author raises the question whether his statement holds if c is replaced by \aleph_1 (c denotes 2^{\aleph_0}).

G. Kurepa.

Sikorski, R.: Some examples of Borel sets. *Colloquium math.* 5, 170—171 (1958).

Verf. konstruiert (durch Induktion) im Einheitswürfel H des Hilbertschen Raumes einfache Beispiele Borelscher Mengen M_a bzw. A_a , welche (1) genau zur multiplikativen bzw. additiven Klasse a mit $0 \leq a < \Omega$ gehören, aber (2) nicht zur additiven bzw. multiplikativen Klasse a . — Konstruktion: Es sei $M_0 \subset H$ einpunktig und $A_0 = H - M_0$. Ist M_x und A_x schon definiert für alle $x < a$, so setze man $M_a = A_b \times A_b \times \dots \subset H^{\aleph_0}$, wenn $a = b + 1$, bzw. $M_a = P_{x < a} A_x \subset H^{\aleph_0}$, wenn a Limeszahl. Wegen der Homöomorphie von H und H^{\aleph_0} kann $M_a \subset H$ und $A_a = H - M_a \subset H$ angenommen werden. Der Beweis für (2) folgt aus der Bemerkung: Es sei X ein metrischer Raum und $B \subset X$ multiplikativ bzw. additiv von der Klasse a ; dann existiert eine stetige Abbildung f von X in H derart, daß $f^{-1}(M_a) = B$ bzw. $f^{-1}(A_a) = B$. — Zum Schlusse stellt Verf. folgende Frage: Es sei X_n ein metrischer Raum und $A_n \subset X_n$ additiv aber nicht multiplikativ von der Klasse a ; $n = 1, 2, \dots$. Ist $A = A_1 \times A_2 \times \dots$ nicht additiv von der Klasse $a + 1$ in $X = X_1 \times X_2 \times \dots$?

Otto Haupt.

Rothberger, F.: Exemple effectif d'un ensemble transfiniment non-projectif. *Canadian. J. Math.* 10, 554—560 (1958).

A partir des P_1 -ensembles où $P_1 = A$ on définit des CP_1 , $PCP_1 = P_2$, $PCP_2 = P_3, \dots$; P_ω est défini comme la réunion des P_n (n variable), $P_{a+1} = PCP_a$ etc. On obtient ainsi des classes (finies et non finies) d'ensembles projectifs (cf. N. Luzin, *Ensembles analytiques*, Paris 1930 et W. Sierpinski, *ce Zbl.* 39, 47). En se servant de l'espace J des nombres irrationnels, les définitions deviennent plus symétriques. L'A. définit des ensembles projectifs universels P_a pour des ordinaux $\alpha \rightarrow \omega_1$. La définition est formalisée, s'exprime par des constantes logiques et par des quantificateurs du 1^{ier} ordre, ceux du second ordre portant sur variables réelles et un quantificateur du 3^{ième} ordre (celui-ci remplaçant une définition implicite). Un quantificateur de l'ordre 3 (ou son équivalent) est indispensable. La fonction propositionnelle $\varphi(t, x, y)$ ($0 \leq t < 1$, $x \in J$, $y \in J$) dont l'A. se sert est définie implicitement par l'induction transfinie déguisée par la méthode de Lebesgue. La quantification de φ relativement aux 3 variables donne l'ensemble en question. L'A. donne deux variantes de „construction“, l'une basée sur l'équivalence et l'autre sur l'implication.

G. Kurepa.

Kaufmann, Iosif: Une propriété des domaines fermés. *Lucrările ști. Inst. Ped. Timișoara, Mat.-Fiz.* 1958, 133—134, français. und russ. Zusammenfassg. 134 (1959) [Rumänisch].

Dans ce travail l'A. démontre, que dans un espace euclidien d'au moins deux dimensions subsiste le théorème suivant: Si le domaine fermé R est la somme des deux ensembles fermés F_1 et F_2 , alors, si les puissances de F_1 et de F_2 sont différentes, la puissance de l'ensemble $F_1 \cdot F_2$ est égale à la plus petite des puissances de F_1 et de F_2 et si F_1 et F_2 ont la même puissance, celle de l'ensemble $F_1 \cdot F_2$ égale la puissance de F_1 et de F_2 .

Französ. Zusammenfassg.

Oeconomidis, Nicolas: Sur les systèmes et les formes des ensembles. *C. r. Acad. Sci., Paris* 248, 2274—2276 (1959).

L'A. considère des systèmes F d'ensembles non vides extraits d'un espace métrique. Le système F est fermé si pour chaque transformation $X \rightarrow fX$ ($X \in F$) le dérivé de l'ensemble des points fX est contenu dans $\cup X'$. Pour que F soit fermé, il faut et il suffit que $(\cup X)' = \cup X'$ ($X \in F$). On considère des systèmes F qui sont isolés, compacts, convergents respectivement. Quant aux „formes“ des ensembles, un ensemble E est appelé de la forme 1, 2 ou 3 suivant que 1. $E^{(k)} = \text{vide}$ pour un $k < \omega_1$, 2. $E^{(k)} = E^{(k+1)}$ pour un $k < \omega_1$, 3. $E^{(k)} \supset E^{(k+1)}$ pour chaque $k < \omega_1$. On énonce quelques propositions concernant ces notions.

G. Kurepa.

Differentiation and Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Slowikowski, W.: Metric semilattices and their connections with the measure theory. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 111—117, russ. Zusammenfassg. IX (1959).

Verf. betont die Wichtigkeit ordnungstheoretischer Begriffe beim Aufbau der Maß- und Integraltheorie und betrachtet in dem vorliegenden kurzen Bericht (eine ausführliche Darstellung in den Fundamenta Math. wird angekündigt) den Begriff dessog. (pseudo-)metrischen Halbverbandes. Das ist ein Halbverband L (Operation \vee) mit einer (Pseudo-)Metrik ϱ , die für alle $a, b, c \in L$ der Bedingung $\varrho(a \vee c, b \vee c) \leq \varrho(a, b)$ genügt. Gilt für die Elemente a, b, c einer Teilmenge K von L sogar $\varrho(a \vee b \vee c, c) = \varrho(a \vee b \vee c, b \vee c) + \varrho(b \vee c, c)$, so heißt die (Pseudo-)Metrik ϱ additiv auf K . Es wird gezeigt, wie sich Sätze über die Fortsetzung von Maßen und Integralen als Spezialfälle von Sätzen über die betrachteten Verbände gewinnen lassen. Anm. des Ref.: In Statement 1 auf S. 112 hat Verf. vermutlich die Voraussetzung der Vollständigkeit von $L(\varrho)$ zu erwähnen vergessen. In der vorliegenden Form ist die Behauptung, wie einfache Beispiele zeigen, falsch.

G. Bruns.

Heider, L. J.: A representation theory for measures on Boolean algebras. Michigan math. J. 5, 213—221 (1958).

Es sei \mathfrak{B} eine Boolesche Algebra und X_0 der zugehörige (kompakte, null-dimensionale) Stonesche Darstellungsraum. Dann entsprechen bekanntlich die endlich-additiven Maße $\Phi \geq 0$ auf \mathfrak{B} umkehrbar eindeutig den Baireschen Maßen $\Phi_0 \geq 0$ auf X_0 . Verf. kennzeichnet mit Hilfe von Φ_0 zunächst die σ -additiven und rein-endlich-additiven Maße $\Phi \geq 0$ auf \mathfrak{B} (vgl. hierzu K. Yosida und E. Hewitt, dies. Zbl. 46, 54) und gelangt zu folgendem, im wesentlichen bereits von G. G. Murray [Bull. Amer. math. Soc. 59, 163 (1953)] angekündigten Resultat: Ein endlich-additives Maß $\Phi \geq 0$ ist dann und nur dann σ -additiv bzw. rein-endlich-additiv, wenn Φ_0 auf allen Baireschen Mengen erster Kategorie bzw. außerhalb einer Baireschen Menge erster Kategorie verschwindet. (Bezüglich einer anderen Kennzeichnung dieser Typen endlich-additiver Maße vgl. eine in diesem Zbl. 56, 54 referierte Note des Ref.) Als Anwendung ergibt sich, daß im zweiten Dualraum E'' eines abstrakten (L -) Raumes E (vgl. S. Kakutani, dies. Zbl. 27, 111) der Raum E stets als direkter Summand abgespalten werden kann. Sodann folgt ein kurzer Beitrag zum Problem der Existenz strikt-positiver Maße auf Booleschen Algebren. Schließlich werden die Beziehungen der meßbaren Funktionen auf einer Booleschen σ -Mengenalgebra \mathfrak{M} zu den stetigen Funktionen auf dem Stoneschen Darstellungsraum von \mathfrak{M} untersucht. Hierbei handelt es sich im wesentlichen um einen anderen Zugang zu Resultaten der oben zitierten Arbeit von Yosida-Hewitt, welcher den Vorteil größerer Durchsichtigkeit hat.

H. Bauer.

Choksi, J. R.: Inverse limits of measure spaces. Proc. London math. Soc., III. Ser. 8, 321—342 (1958).

Let $(X_j)_{j \in D}$ (D is a directed set) be an inverse system of sets and let X_∞ be the inverse limit (= the projective limit) of $(X_j)_{j \in D}$. For every $(i, j) \in \tilde{D} = \{(h, k) \mid h, k \in D, h < k\}$ we denote by f_{ij} the projection of X_j onto X_i . For each $j \in D$ we denote by $f_{j\infty}$ the projection of X_∞ into X_j ; it is supposed here that $f_{j\infty}(X_\infty) = X_j$. A family $((X_j, M_j, m_j))_{j \in D}$ of measure spaces is an inverse system (of measure spaces) if: 1. $(X_j)_{j \in D}$ is an inverse system; 2. for each $(i, j) \in \tilde{D}$ and $E \in M_i$, $f_{ij}^{-1}(E) \in M_j$ and $m_i(E) = m_j(f_{ij}^{-1}(E))$. Let $((X_j, M_j, m_j))_{j \in D}$ be an inverse system of measure spaces and $M = \bigcup_{j \in D} f_{j\infty}^{-1}(M_j)$. For each $E \in M$ there is $j \in D$ and $E_j \in M_j$ such that $E = f_{j\infty}^{-1}(E_j)$; by definition write $m(E) = m_j(E_j)$. It is clear that M is a

ring and that m is finitely additive on M . In general m is not countably additive on M and hence has not countably additive extension to the tribe $S(M)$ spanned by M . In this paper the author gives a series of important results concerning the existence of such a countably additive extension. Various theorems concerning measures on product spaces are particular cases of those given here. It is shown that if, for each $j \in D$, M_j is a compact space and m_j has a certain regularity property [for every $E \in M_j$ and $\varepsilon > 0$ there is a compact $K \subset E$ such that $m_j(E - K) \leq \varepsilon$] then X_∞ is compact and m has a countable additive extension to $S(M)$, having the same regularity property [see also S. Bochner, Harmonic analysis and the theory of probability, Berkeley 1955, and E. Nelson, Ann. of Math., II. Ser. 69, 630—643 (1959)]. It is proved that m is a Baire measure if all m_j , $j \in D$, are Baire measures. Two similar theorems concerning the (non-topological) compact (see E. Marczewski, this Zbl. 52, 49) and quasi-compact (see C. Ryll-Nardzewski, this Zbl. 52, 49) measures are also given. Further the author studies inverse systems of measure spaces having regular conditional probabilities (see also a paper by the reviewer, this Zbl. 35, 152, J. L. Doob, Stochastic processes, this Zbl. 53, 268, M. Loève, Probability theory, this Zbl. 66, 109 and N. Dinculeanu, this Zbl. 81, 131). In the last part of the paper the author considers direct systems of measure algebras. *C. Ionescu Tulcea.*

Choksi, J. R.: On compact contents. J. London math. Soc. 33, 387—398 (1958).

The problem of the generation of measures by contents has been studied by various authors, especially in the case of locally compact (separated) spaces. In this paper the author proves a general theorem concerning the generation by contents of the non-topological compact measures of E. Marczewski (this Zbl. 52, 49). He starts with a suitable additive function defined on a compact lattice \mathcal{C} (\mathcal{C} is compact if $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$ and $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ imply $\bigcap_{n=1}^p C_n = \emptyset$ for some p) of subsets of a set X and extends it to a compact measure on the tribe ($= \sigma$ -ring) spanned by \mathcal{C} . Using this general result the author proves a theorem concerning the generation of measures in a topological, not necessarily separated, space. Further, the results obtained here are compared with the results obtained by other authors. The author proves also the equivalence between the compact measures in the sense of E. Marczewski and the measures belonging to a certain class introduced by M. Jirina (this Zbl. 58, 118). *C. Ionescu Tulcea.*

Dionísio, J. J.: On measure products. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 6, 305—310 (1957—1958).

Using a well known theorem on limits for integrals of non-negative simple functions the author proves the following simple generalization of a theorem in A. C. Zaanen, Linear analysis (this Zbl. 53, 256), p. 34: If μ is a σ -finite measure on a semi-ring Γ of a space X and ν any measure on a semi-ring Δ of a space Y , then the set function τ defined on the semi-ring $\Gamma \times \Delta$ of $X \times Y$ by $\tau(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, with $A \in \Gamma, B \in \Delta, 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$, is a measure; if also ν is σ -finite, then so is τ . *J. Ridder.*

Mišík, Ladislav: Einige Bemerkungen zur Maß- und Integraltheorie. Mat.-fyz. Časopis slovensk. Akad. Vied 8, 81—97, russ. und dtsh. Zusammenfassg. 98—102 (1958) [Slowakisch].

Die Arbeit enthält vier Bemerkungen zur Theorie des Integrals und des Maßes. Das Tripel (X, F, I) wird ein D -Integralraum genannt, wenn X eine Menge, F ein Vektorverband endlicher reeller auf X definierter Funktionen und I ein nicht-negatives, auf F lineares Funktional ist, das der Bedingung

$$(f_n \in F, f_n \searrow 0) \Rightarrow I(f_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

genügt. Wenn das System F mit jeder Funktion f , für die $I(|f|) = 0$ ist, auch jede Funktion g mit $|g| \leq |f|$ enthält, so wird (X, F, I) vollständig genannt. Gehört

der Grenzwert jeder nichtfallenden Folge von Funktionen $f_n \in F$, für welche die Zahlenfolge $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist, auch zu F , so heißt (X, F, I) ein σD -Integralraum. Die erste Bemerkung betrifft die Rieszsche Methode der Erweiterung eines gegebenen D -Integralraumes zu einem vollständigen σD -Integralraume. Wir bezeichnen mit C'_1 das System aller auf X definierten (endlichen reellen) Funktionen f mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine nichtfallende Folge von Funktionen $f_n \in F$, so daß $\{I(f_n)\}$ beschränkt ist und daß für jedes $x \in X$, für welches der endliche Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert, die Beziehung $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ besteht.

Es sei weiter C'_2 das System aller Differenzen $f_1 - f_2$, wo $f_1, f_2 \in C'_1$. Dann kann das Funktional I so erweitert werden, daß (X, C_2, I) der kleinste (X, F, I) enthaltende vollständige σD -Integralraum ist. Das Tripel (X, R, μ) wird ein Maßraum genannt, wenn X eine Menge, R ein Ring von Untermengen von X und μ ein Maß auf R ist; wenn R ein σ -Ring ist, so heißt (X, R, μ) ein σ -Maßraum. Wenn für jedes $A \in R$ mit $\mu(A) = 0$ alle Untermengen von A zu R gehören, so wird (X, R, μ) vollständig genannt. Weitere Bemerkungen betreffen die Beziehungen zwischen den Maßräumen und den D -Integralräumen. Von den bewiesenen Sätzen erwähnen wir z. B. den folgenden: Es sei (X, F, I) ein D -Integralraum. Für $A \subset X$ sei χ_A die charakteristische Funktion von A und M sei das System aller $A \subset X$ mit der Eigenschaft, daß $f\chi_A \in F$ für jedes $f \in F$ ist. Für $A \in M$ setzen wir

$$\mu_1(A) = \sup \{I(f) : 0 \leq f \leq \chi_A, f \in F\},$$

$$\mu_2(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n) : \chi_A \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n, f_n \geq 0, f_n \in F \right\}.$$

Dann sind (X, M, μ_1) , (X, M, μ_2) Maßräume. Ist (X, F, I) ein σD -Integralraum, so ist (X, M, μ_2) genau dann ein vollständiger σ -Maßraum, wenn (X, F, I) vollständig ist. Wenn (X, F, I) ein vollständiger σD -Integralraum ist und wenn wir

$$\mu^*(B) = \inf \{I(f) : f \in F, \chi_B \leq f\}$$

für jedes $B \subset X$ setzen, so ist μ^* ein äußeres Maß und M ist gleich dem System aller μ^* -meßbaren Mengen.

J. Král.

Okano, Hatsuo: L'intégration des fonctions à valeurs vectorielles d'après le méthode des espaces rangés. Proc. Japan Acad. 35, 77—82 (1959).

La Note est une extension de résultats de Kunugi (ce Zbl. 70, 281) en définissant une intégrale des fonctions à valeurs vectorielles et en se servant des espaces rangés (cf. les notes de l'A., ce Zbl. 84, 49, 187, 188). Soit R un espace vectoriel rangé réel; en particulier R est un groupe rangé dans le sens que tout voisinage $v(p)$ de rang n est de la forme $V \vdash p$, V étant un voisinage de 0 de rang n . L'A. considère la condition (VRT): Si p est un point différent de 0, pour tout entier $k > 0$, il existe un entier $n > 0$ tel que $p \notin C_0 \left(\bigcup_{i=1}^k (I(V_i) - I(V_i)) \right)$ si V_i , $i = 1, 2, \dots, k$ est un voisinage du point 0 tel que le rang de V_i soit $> n$ ($I(A)$ désigne l'intérieur de A ; $C_0(A)$ désigne le plus petit ensemble convexe contenant A). Si R est complet et satisfait à (VRT), on considère des fonctions $f: X \rightarrow R$, X étant un ensemble donné; soit B une algèbre complètement additive de sous-ensembles de X et $X \in B$; soit μ une mesure ≥ 0 sur B telle que $\mu X = 1$; f est dit „en escalier“ si $f(x) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(x) p_i$ avec $p_i \in R$, E_i étant mesurables; on définit

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{i=1}^m \mu(E_i) p_i.$$

Soit $E(X, R)$ la famille de toutes les f en escalier, en identifiant deux f quelconques ne différant que sur un ensemble de mesure 0. On structure $E(X, R)$ de telle manière pour en obtenir un espace rangé réel satisfaisant à (VRT); cela permet de

classifier des suites fondamentales de points de $E(X, R)$ et d'introduire des collections maximales u^* de telles suites; on prouve que u^* détermine une fonction, $J(u^*)$, de X en R ; des fonctions pareilles $J(u^*)$ sont dites mesurables. A partir de cela l'A. définit aussi des intégrales des $J(u^*)$. G. Kurepa.

Young, L. C.: Remarks on a chapter of the integral. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 7, 48—54 (1958).

Es wird bemerkt, daß eine Reihe von Sätzen im dritten Kapitel von Saks: Theory of the integral (dies. Zbl. 17, 300) sich verallgemeinern lassen, wenn man statt eines Lebesgue-Stieltjesschen Maßes ein solches Maß $\gamma_g(X)$ betrachtet, das aus einer monoton wachsenden Mengenfunktion $g(E) \geq 0$ nach dem Verfahren von Carathéodory-Hausdorff entsteht:

$$\gamma_g(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_g(X, \varepsilon), \quad \gamma_g(X, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_1^\infty g(E_n) : X \subset \bigcup_1^\infty E_n, \delta(E_n) < \varepsilon \right\}.$$

γ_g wird typisch genannt, wenn noch (*) $g(E) = \inf \{g(G) : G \supset E \text{ offen}\}$ gilt. Insbesondere wird der Satz von Fubini in folgender allgemeiner Form bewiesen: es seien $X' \subset E^p$ und $X'' \subset E^q$ Vereinigungen von je endlich vielen abgeschlossenen Intervallen, ferner $X = X' \times X'' \subset E^{p+q}$, γ'' ein Lebesgue-Stieltjessches Maß auf X'' , $\gamma_{g'_{x''}}$ ein (von $x'' \in X''$ abhängiges) typisches Maß auf X' , $g(G) = \int_{X''} g'_{x''}(G') d\gamma''$, wo G' die Projektion auf X' der beschränkten offenen Menge $G \subset X$ bedeutet und $g'_{x''}(G')$ für jede beschränkte offene Menge $G' \subset X'$ nach γ'' integrierbar vorausgesetzt wird, endlich sei für $E \subset X$ $g(E)$ durch (*) definiert. Ist dann $f|X$ eine nach γ_g integrierbare reelle Funktion, so existiert eine Teilmenge $N'' \subset X''$ mit $\gamma''(N'') = 0$ und von der Eigenschaft, daß $f(x', x'')$ bei festem $x'' \in X'' - N''$ nach $\gamma_{g'_{x''}}$ integrierbar ist und die Gleichung

$$\int_X f d\gamma_g = \int_{X''} \left(\int_{X'} f(x', x'') d\gamma_{g'_{x''}} \right) d\gamma''$$

besteht, falls das innere Integral an der rechten Seite für $x'' \in N''$ z. B. gleich Null gesetzt wird. A. Császár.

Zamansky, Marc: Groupes de Riesz. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2933—2934 (1959); Note rectificative. Ibid. 249, 1998 (1959).

Un groupe ordonné est 2-divisible si pour tout $x \in F$, existe $y \in F$ tel que $2y = x$. Une „représentation“ f d'un groupe de Riesz E dans un groupe ordonné 2-divisible telle que $f(|x|) = 0$ entraîne $x = 0$, définit sur E une pseudo-topologie. Suites (x_p) de Cauchy, définies par $\lim f(|x_p - x_q|) = 0$. Sur ces concepts repose une théorie de la complétion des intégrales de Daniell. Cf. Zamansky, ce Zbl. 77, 59; 84, 50. Le théorème énoncé dans cette note est inexact d'après un erratum.

J. Ridder.

Ellis, H. W.: On the limits of Riemann sums. J. London math. Soc. 34, 93—100 (1959).

L'A. dà una nuova dimostrazione di un precedente risultato di P. Hartman (questo Zbl. 29, 19), e stabilisce che, d'altra parte, il risultato stesso non è valido in uno spazio di Banach a infinite dimensioni. S. Cinquini.

Deaux, R. et M. Delcourte: Calcul des intégrales $(m, n) = \int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^n} dx$, m et n entiers positifs, $m \geq n$. Mathesis 66, 16—22 (1957).

Integration by parts.

Bo Kjellberg.

Lagrange, Jean: Calcul des intégrales $I_m = \int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^a} dx$, $J_m = \frac{\cos^n x}{x^a} dx$, m entier positif, a quelconque. Mathesis 66, 363—369 (1957).

The substitution $\frac{1}{x^a} = \int_0^\infty e^{-tx} t^{a-1} \frac{dt}{\Gamma(a)}$ and the reversion of the order of

integration permit the calculation.

Bo Kjellberg.

Cesari, L. and Ch. J. Neugebauer: On the coincidence of Geöcze and Lebesgue areas. *Duke math. J.* **26**, 147—153 (1959).

Let (T, A) be a continuous mapping from an admissible set A in the Euclidean plane E_2 into Euclidean n -space E_n and let $L(T, A)$ and $V(T, A)$ be the Lebesgue area and the Geöcze area respectively of (T, A) [see Cesari, Surface area (this Zbl. **73**, 41) for definitions]. In this paper it is shown that $L(T, A) = V(T, A)$. This result was previously known only in the case where A was a 2-cell (or 2-sphere). The present proof utilizes recent results of the authors concerning retractions and fine cyclic elements.

E. J. Mickle.

Marcus (Markus), S.: On functions continuous in each variable. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **112**, 812—814 (1957) [Russisch].

If two real-valued functions f, g on an open set $G \subset E^n$ coincide on an everywhere dense subset of G and if they are continuous in G with respect to each of the variables involved, then $f = g$ in G (Th. 4); the case $n = 2$ was proved by Sierpinski (this Zbl. **5**, 390) and Tolstov (this Zbl. **38**, 40). Already in the case $n = 2$ there exists a function $f(x, y)$ in $G \subset E^2$ which equals 0 on an everywhere dense set $S \subset G$ and is continuous on $G \setminus S$ with respect to the variables x, y taken separately and is such that not identically $f = 0$ in G (Th. 1). It is sufficient to consider the set $G = [0, 1] \times [0, 1]$ and the characteristic function of the set S of all the points (x, y) , where $x = \sum_{n=1}^p \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ with $\varepsilon_n = 0$ or 1 according as $n < p$ or $n = p$;

analogously $y = \sum_{n=1}^p \frac{\eta_n}{2^n}$. The subset S of the theorem cannot be a residual (Th. 3). If $f(x, y)$ is x -continuous in G , is 0 on an everywhere dense subset S of G and is y -continuous in $G \setminus E$, then $f = 0$ in G (Th. 2).

G. Kurepa.

Král, Josef: On Lipschitzian mappings from the plane into Euclidean spaces. *Czechosl. math. J.* **8** (83), 257—264, russ. Zusammenfassg. 265—266 (1958).

Soit E_r l'espace euclidien à r dimensions. Dans ce travail l'A. étudie des propriétés des integrales de Stieltjes pour applications Lipschitziennes du plan dans l'espace E_r et il prouve quelques théorèmes, qui sont liés avec la formule de Stokes.

A. Mallios.

Cesari, Lamberto: Variation, multiplicity and semicontinuity. *Amer. math. Monthly* **65**, 317—332 (1958).

L'A. passa in rassegna le principali proprietà delle funzioni di una variabile reale a variazione limitata. Dopo aver ricordata la definizione di variazione totale secondo Jordan, mostra che, per una funzione f continua e a variazione limitata, la variazione totale può definirsi mediante un opportuno passaggio al limite e inoltre anche come integrale lebesguiano della funzione di molteplicità della f . L'A. prende in considerazione anche le proprietà di semicontinuità della variazione totale nonché le proprietà di derivabilità delle funzioni a variazione limitata.

L. de Vito.

Krylov, A. L.: On a necessary and sufficient condition which can be used as a test that a given function belongs to the class $W_p^{(1)}$ of Sobolev. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **121**, 795—796 (1958) [Russisch].

The author proves the following theorem: A function F belongs to the Sobolev class $W_p^{(1)}$ if and only if F is a function of bounded p -variation. Here the class $W_p^{(1)}$ is considered on a domain Ω of the n -dimensional space for which the imbedding theorem of Sobolev holds and $p > n$. The explicit proof of the theorem and the explicit definition of p -variation is given in the case $n = 2$. In this case a continuous function $F(x, y)$ is said to be of a bounded p -variation ($p > 2$) if the upper bound

of the sums:

$$\sum_{i,j} \frac{F(x_i + h, y_j) - F(x_i, y_j)}{h^{p-2}}, \sum_{i,j} \frac{F(x_i, y_j + h) - F(x_i, y_j)}{h^{p-2}}$$

is finite and does not depend on the subdivision of Ω and on h . The summation runs over all (x_i, y_j) which together with δ -neighbourhood belong to Ω . Here δ is the smallest distance between parallels of subdivision and $2h \leq \delta$. By an example it is proved that the corresponding Hölder condition is not sufficient for a function F to belong to $W_p^{(1)}$.

S. Kurepa.

Sunyer Balaguer, F.: Über die Bestimmung einer Funktion durch ihre Derivierten. Collect. Math. 16, 185—194 (1958) [Spanisch].

Une fonction réelle continue sur un segment réel est déterminée, à une constante additive près, par la donnée de son dérivé supérieur droit fini sur un ensemble dont le complémentaire ne contient aucun sous-ensemble parfait.

A. Revuz.

Sengupta, H. M. and B. K. Lahiri: A note on derivatives of a function. Bull. Calcutta math. Soc. 49, 189—191 (1957).

f étant une fonction réelle définie sur un segment de R , si l'ensemble des points où f est continue et l'ensemble des points où elle est discontinue sont tous deux partout denses, l'ensemble des points où f est continue et où un de ses dérivés extrêmes est infini est un résiduel.

A. Revuz.

Lipiński, J. S.: Sur les ensembles $\{f'(x) > a\}$. Fundamenta Math. 45, 254—260 (1958).

Cet article complète et précise les résultats d'un précédent travail (ce Zbl. 65, 288). Théorème: Si f est une fonction réelle continue en tout point et y admettant une dérivée finie ou infinie, pour tout ensemble $E = \{x; f'(x) > a\}$ non vide, il existe un ensemble A de mesure nulle et une fonction φ différentiable et satisfaisant à la condition de Lipschitz tels que: 1. $A \subset E$ 2. $A = A_1 \cap A_2$ où $A_1 \in F_\sigma$ et $A_2 \in G_\delta$ 3. A est non-dense dans E 4. dans tout voisinage unilatéral d'un point de $A \cap E$ il existe des points de $E - \bar{A}$ 5. $E - A = \{x; \varphi'(x) > 0\}$.

A. Revuz.

Díaz, Plácido Jordán: Über die Jacobische Determinante zweier Funktionen. Ihre Deutung in der Meteorologie. Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 4, 87—90 (1958) [Spanisch].

Messo lo Jacobiano di due funzioni di due variabili $F(x, y)$ e $G(x, y)$ sotto forma vettoriale, se ne dà una interpretazione geometrica, relativamente ai due sistemi di curve del piano x, y $F = \text{costante}$ e $G = \text{costante}$. Questa interpretazione sembra avere qualche interesse in meteorologia.

G. Sestini.

Hartman, Philip: Unrestricted n -parameter families. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 7, 123—142 (1958).

Let F be a family of real valued functions of class C^{n-1} defined in the open interval I , $a < x < b$, such that whenever x_1, \dots, x_n are distinct points of I and y_1, \dots, y_n are arbitrary real numbers then there exists one and only one element $f(x) \in F$ such that $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Assume also that the family F satisfies the Cauchy initial data condition i. e. given arbitrarily $x_0 \in I$ and n real numbers y^0, \dots, y^{n-1} there exists one and only one element $f(x) \in F$ such that $f^\mu(x_0) = y^\mu$, $\mu = 0, 1, \dots, n-1$, where $f^0 = f$, $f^\mu = d^\mu f / dx^\mu$ for $\mu > 0$. The main result of the paper is that under the above assumptions given any set of distinct points x_1, \dots, x_k of I , any set of positive integers $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ satisfying $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$ and any set of n numbers y_i^μ , $i = 1, \dots, k$, $\mu = 0, \dots, \lambda_i - 1$ then there exists one and only one $f(x) \in F$ satisfying $f^\mu(x_i) = y_i^\mu$. This theorem is applied to obtain a variant of a mean value theorem of Pólya [Trans. Amer. math. Soc. 24, 312—324 (1924)] and also to some results about support and differentiability of generalized convex functions.

M. M. Peixoto.

- Fage, M. K.: Operator-analytical functions of an independent variable. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 1008—1011 (1957) [Russisch].
- Fage, M. K.: Integral representations of analytical operator functions of one variable. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 874—877 (1957) [Russisch].

Vorankündigung der Ergebnisse einer inzwischen erschienenen Arbeit (dies. Zbl. 84, 53).

Allgemeine Reihenlehre:

- Zeller, Karl: Theorie der Limitierungsverfahren. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 15.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1958. VIII, 242 S. Steif geh. DM 36,80.

The main topic of the book is a summary of the results concerning Toeplitz's general methods of limitability (Matrixtransformationen). The author lays a special stress on the general theory of limitability, that means the properties of the field of the method, a comparison of the fields of various methods, the problem of consistency, convergence and summability factors, additional conditions ensuring ordinary convergence and other similar problems. Dealing with these problems the author shows how, by the methods of functional analysis, many results of the general theory of the limitability are received in a very elegant manner. For this purpose the author presents some fundamental properties of the B_0 -spaces (which he calls F -spaces) and also a special subclass of them, FK -spaces. Besides the matrix methods the author deals — secondarily — with some other methods of generalizing the limit, as for instance the absolute limitability, the generalization of the limits of a function by means of integral transformations, an application of the theory of limitability to analytic continuation and to solving differential equations. The contents of the book fills 8 chapters, each chapter being divided into 10 sections. In the first chapter the general notions of the theory of limitability are discussed. The second chapter is devoted to subsidiary methods of functional analysis. In the third chapter the author deals with the properties of the field of a Toeplitz's method (the set of sequences limitable by means of the method in question), treated as a complete metric space, the uniform limitability (Abschnittskonvergenz) and the perfection of the method, the criteria of limitability of a sequence by means of a given method, the one-sequence methods (limitating all convergent sequences and one unbounded sequence), the position of the bounded sequences in the field of the method (in the field of a permanent method the bounded sequences belong to the closure of the set of convergent sequences). In the fourth chapter the author presents the so-called direct theorems (direkte Sätze) of the theory of summability, in other words, the theorems of the inclusion of a determined set in the field of the method, of the behaviour of the kernel of the sequences in a matrix transformation, of the convergence and summability factors, of comparing the fields of various methods, of the consistency of methods, of the translation of the method (dropping or adding of the terms of a sequence), of conditional summability (transposing the terms of a series), of multiplying sequences and series. In the fifth chapter the author discusses the so-called converse theorems of the general theory of limitability, such as some necessary conditions of limitability (concerning the rate of the increase of unbounded sequences), Tauberian theorems, the criteria enabling to state that a given method limitates all convergent sequences but no other sequences (Konvergenzgleiche Verfahren) and non-trivial examples of such methods, and the like. In the other chapters the author treats some concrete methods and their applications to analytic continuation and differential equations. Thus in the sixth chapter he deals with the method of Cesàro, Hölder, Abel, Riesz and Dirichlet and also with some integral transformations. In the seventh chapter he deals with Nörlund's methods, Euler-

Knopp's methods, Borel's method and some of its modifications, the circle methods for instance Taylor's method and other. In the eighth chapter the author treats the methods of Hausdorff, de Vallée-Poussin, Gronwall, Rogosinski-Berstein, Wiener and some others. — The subject presented in the book, has been ordered very systematically and the theorems are presented in a clear and intelligible way. The list of literature is rich. I think that the book will be of great use both to those who are working in the theory of summability and to those who wish to get acquainted with it. In the bibliography the "Théorie des opérations linéaires" by Banach, repeatedly quoted in the text as Banach [32*] has been omitted. The paper by Mazur "O metodach sumowalności". Kraków 1929, which contains the theorems of inclusion and consistency of triangular transformations, the uniform limitability (Abschnittskonvergenz) and conditional summability of series, should be taken into account, too. Whereas, in my opinion, the theorem 36. III (page 66) could be omitted, for on the one hand, it can be strengthened by providing merely that the Toeplitz's method B is permanent (not necessarily triangular), and, on the other hand, it follows from theorem 36. IV since the condition (1) is Mazur's condition for the perfection of the normal method (echte Dreiecksmatrix). *L. Włodarski.*

Climescu, Al.: Critères d'existence pour la limite d'une suite à termes réels. Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 4 (8), Nr. 1/2, 17—21, russ. und französ. Zusammenfassg. 21—22 (1958) [Rumänisch].

En partant de la remarque que, dans les théorèmes usuels qui donnent des conditions suffisantes de convergence d'une suite, la monotonie est impliquée d'une façon essentielle (voir les critères classiques de Leibniz, Abel, Dirichlet ainsi que le critère de Leja, qui utilise la monotonie en moyenne), l'A. se propose de trouver une explication de cette état de choses et en cet ordre d'idées il donne le théorème suivant: Soit $\{a_n\}$ une suite à termes réels et soit ϱ une relation binaire définie pour des nombres réels et telle que: I. $a \varrho b$ entraîne $(a + h) \varrho (b + h)$, a, b et h étant des nombres réels arbitraires (invariance par translation); II. si $a_n \varrho a_{n+1}$ pour $n = 1, 2, \dots$ alors la limite de la suite $\{a_n\}$ existe. Dans ces conditions la suite $\{a_n\}$ est monotone. On donne aussi une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la limite de la suite $\{a_n\}$. Ce critère s'exprime à l'aide de la suite double $\{a_{ij}\}$ où $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$. Remarques du rapporteur: Dans les résumés russe et français de ce travail il y a des fautes d'impression. Dans les premières quatre ligne des résumés \underline{b} doit être remplacé par b_k . Dans l'énoncé du deuxième théorème reproduit dans le résumé \underline{b}_{ij} doit être remplacé par a_{ij} . On obtient ainsi une notation cohérente, quoi-que différente de celle du texte roumain. *S. Marcus.*

Gonçalves, J. Vicente: Généralisation de deux propositions de la théorie des séries réelles. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 6, 311—318 (1957—1958).

Es werden der partiellen Summation analoge Formeln aufgestellt, in welchen statt Partialsummen Partialsummen höherer Ordnung auftreten. Ferner werden Formeln angegeben, in denen die Differenzen der partiellen Summation durch Differenzen höherer Ordnung ersetzt werden. Ein Satz sei zitiert: Satz 1.1: Es sei gesetzt $A_i(h, k) = \binom{i-k}{k-h}$ falls $i \geq k$, $= 0$ sonst. Es sei vorausgesetzt, daß die Reihe $\sum_n A_n(h, k) u_n$ konvergiert und daß $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(h-1, k) u_n = 0$ gilt. Dann ist auch die Reihe $\sum_n A_n(h-1, k) (u_n - u_{n+1})$ konvergent und es gilt

$$\sum_n A_n(h, k) u_n = \sum_n A_n(h-1, k) (u_n - u_{n+1}). \quad P. Szűsz.$$

Lorentz, G. G. and K. Zeller: Series rearrangements and analytic sets. Acta math. 100, 149—169 (1958).

Zu gegebener Reihe (1) $\sum u_n$ mit reellen Gliedern werde mit der reellen Matrix $A = (a_{nk})$ die A -Transformierte $\sum v_n$ durch die Vorschrift $v_n = \sum_k a_{nk} u_k$ gebildet.

Die Menge S der reellen Achse heißt A -Umordnungsmenge von (1), wenn es für jedes $x \in S$ eine Umordnung $\sum u'_n$ von (1) gibt mit $A \cdot \sum u'_n = x$. Solche Umordnungsmengen wurden für $A = C_1$ von Mazur [Arch. Tow. Nauk. Lwow. Wyd. III, Mat.-Przyr. 4, 411—424 (1929)] und Bagemihl-Erdős (dies. Zbl. 56, 282) studiert. Verff. unternehmen es, allgemein A -Umordnungsmengen S von Reihen (1) topologisch zu charakterisieren. Satz 1: Die A -Umordnungsmenge einer Reihe (1) ist stets eine analytische Menge (Definition z. B. bei Hausdorff, Mengenlehre, dies. Zbl. 12, 203). Satz 2: Ist S eine analytische Menge auf der reellen Achse, so gibt es eine reguläre Matrix A und eine (sogar von S unabhängige) Reihe (1), deren A -Umordnungsmenge S ist; 12 Seiten Beweis. Ein entsprechendes Resultat gilt auch für FR - und FF -Transformationen.

D. Gaier.

Kuttner, B.: The problem of "translativity" for Hausdorff summability (addendum). Proc. London math. Soc., III. Ser. 9, 318—320 (1959).

For a given sequence $\{s_n\}$ ($n \geq 0$) let $s_0 = 0$, $s_n = s_{n-1}$ ($n \geq 1$). A linear transformation T , with $u_n = T(s_n)$, $\bar{u}_n = T(s_n)$ is said to be absolutely translatable if $u_n - \bar{u}_n \rightarrow 0$; it is translatable if $u_n - \bar{u}_n \rightarrow 0$ whenever $\{u_n\}$ or $\{\bar{u}_n\}$ converges. It is proved that, for bounded sequences $\{s_n\}$, every multiplicative Hausdorff transformation $T = \{\mu_n\}$ is translatable; it is absolutely translatable if, and only if, $\mu_n \rightarrow 0$ (cf. author, this Zbl. 70, 61).

W. W. Rogosinski.

Wuyts-Torfs, M.: Über eine reguläre Verallgemeinerung des Eulerschen Summierungsverfahrens. Simon Stevin 32, 170—175 (1958) [Holländisch].

Agnew [Amer. J. Math. 66, 313—338 (1944; dies. Zbl. 60, 160), insbes. S. 335—337] transformiert eine Folge s_0, s_1, \dots mittels der komplexen Folge r_0, r_1, \dots in die Folge

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_n^k (1-r_n)^{n-k} s_k \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Beim Eulerschen Limitierungsverfahren sind alle $r_n = r$. Verf. beweist: das Agnew-Verfahren ist genau dann konvergenztreu (= regulär = permanent), wenn die Folge $n(1 - |r_n| - |1 - r_n|)$ beschränkt ist und zugleich $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - |1 - r_n|) = +\infty$.

I. Paasche.

Agnew, R. P.: Riemann summability of Cauchy products and translates of series. J. Indian math. Soc., n. Ser. 22, 33—44 (1958).

Let p be a positive integer. A series $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ is said to be summable by Riemann's method to the number s , if the series $\sigma(p, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\sin kt}{kt}^p u_k$ is convergent in a certain interval $0 < t < t_0$, and $\lim_{t \rightarrow 0+} \sigma(p, t) = s$. The author proves

that for every positive integer p there exists such a class R_p of series $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ that every series $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ belonging to this class is R_p -summable, whereas both of the translated series $0 + u_0 + u_1 + \dots$ and $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ are not R_p -summable. It follows from this theorem that the hypothesis of Vignaux is wrong. The hypothesis of Vignaux assumes what follows: If a series $\sum u_n$ is R_p -summable to u , and a series $\sum v_n$ is absolutely convergent to v , then the Cauchy product series $\sum w_n$ ($w_n = u_0 v_n + \dots + u_n v_0$) is R_p -summable to uv . It is wrong, for in the contrary case, taking the series $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = 0 + 1 + 0 + 0 + \dots$ we would come to the conclusion that R_p -summability of a series $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ implies that of the series $0 + u_0 + u_1 + u_2 + \dots$.

L. Włodarski.

Borwein, D.: On multiplication of $(C, -\mu)$ -summable series. J. London math. Soc. **33**, 441—449 (1958).

Im Anschluß an Palmer (dies. Zbl. **39**, 60) beschäftigt sich Verf. mit der Cauchy-Multiplikation von Reihen, die von negativer Ordnung Cesàro-summierbar sind; dabei wird (C, α) ($\alpha \leq -1$) als die durch die Diagonalfolge $\left\{ \binom{n-\alpha}{n} \right\}$ erzeugte Hausdorffmatrix erklärt. Satz 1: Ist $(C, -\mu) \cdot \sum a_n = A$, $(C, -\mu) \cdot \sum b_n = B$, und sind beide Reihen $(C, -\lambda)$ -beschränkt ($-\lambda \leq -1$; $-\lambda < -\mu$), so ist ihre Cauchy-Produktreihe $\sum c_n$ zum Wert $A \cdot B$ $(C, -\lambda + \delta)$ -summierbar für jedes $\delta > 0$. Satz 2: Ist $|C, -\mu| \cdot \sum a_n = A$, $|C, -\mu| \cdot \sum b_n = B$ ($\mu \geq 0$), so ist $|C, -\mu| \cdot \sum c_n = A \cdot B$ (Analogon zum Satz von Mertens).
D. Gaier.

Srivastava, Pramila: On summability factors. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A **24**, 182—195 (1958).

Let $A(x)$ be of bounded variation in every finite interval (a, t) and let $C_k(w) = \int_a^w \left[1 - \left(\frac{x}{w} \right)^k \right] f(x) dA(x)$ where $k > -1$. The integral $('') \int_a^\infty f(x) dA(x)$ is said to be summable (C, k) to s if $C_k(w) \rightarrow s$ as $w \rightarrow \infty$. If $C_k(w)$ is bounded as $w \rightarrow \infty$, $('')$ is said to be bounded (C, k) . If $C_k(w)$ is of bounded variation in (h, ∞) for some finite h , $('')$ is said to be absolutely summable (C, k) or summable $|C, k|$. Again if $\int_h^t |C_{k-1}(w) - s| dw = o(t)$ as $t \rightarrow \infty$, $('')$ is said to be strongly summable to s or summable $[C, k]$ to s and if $\int_h^t |C_{k-1}(w)| dw = O(t)$, $('')$ is said to be bounded $[C, k]$. By taking $A(x)$ to be a step function these reduce to corresponding notions for series. In particular if $f(x) = 1$ and $A(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n$ where $\sum a_n$ is any series and (λ_n) an increasing sequence of positive numbers tending to infinity, the definitions of Riesz-summability of a series will result. Two results for Stieltjes integrals are proved in this paper from which a large number of theorems for Riesz summability are derived. Let $k(t)$ be a continuous function in $t \geq a$, $|k'(t)|$ decreasing, $\int_a^\infty |k(t)| \frac{dt}{t}$ finite and $\int_a^\infty t^\lambda |dk^\lambda(t)|$ be finite when λ is an integer while the corresponding integral when λ is replaced by the integer next to it is finite when λ is not an integer (λ being non-negative). Then if $\int_a^\infty dA(x)$ is bounded $[C, \lambda]$, the integral $\int_a^\infty k(x) dA(x)$ is summable $|C, \lambda|$. This is one result. In the second result it is assumed that $\int_a^\infty dA(x)$ is $O(\chi(x)) [C, \lambda]$ where $\chi'(t) = O\left(\frac{\chi(t)}{t}\right)$. The conclusion is the same where now $k(t)$ satisfies the first two conditions as in the first result while in the remaining three, $\chi(t)k(t)$ replaces $k(t)$, $\chi(t)dk^\lambda(t)$ replaces $dk^\lambda(t)$ respectively. A typical result derived for the Riesz summability of a series is as follows. If $\sum a_n$ is bounded $[R, \lambda, p]$ then the series $\sum a_n k(\lambda_n)$ is summable $[R, \lambda, p]$ for $p \geq 0$. These theorems generalize known earlier results due to Bo-sanquet, Borwein and Pati. (For specialization to Fourier series see another paper of the author, reviewed this Zbl. **85**, 57.)
V. Ganapathy Iyer.

Kuttner, B.: Some theorems on the Cesàro limit of a function. J. London math. Soc. **33**, 107—118 (1958).

A function $f(t)$, $t \geq 0$, is said to be limitable in infinity by the method (C, α) , $\alpha > 0$, to the number s if

$$\alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \left[t^{-\alpha} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right] = s.$$

In symbols we write $(C, \alpha)\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = s$. In a similar way we define the (C, α) -limit of the function $f(t)$ when $t \rightarrow t_0 +$

$$\alpha \lim_{t \rightarrow t_0 +} \left[(t - t_0)^{-\alpha} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right] = s,$$

which can be noted in symbols $(C, \alpha)\text{-}\lim_{t \rightarrow t_0 +} f(t) = s$. The author proves that if

(i) $(C, \alpha)\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = s$, (ii) $\int_a^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau^2} d\tau$ is convergent, then for an integer α we

have $(C, \alpha)\text{-}\lim_{t \rightarrow 0 +} f\left(\frac{1}{t}\right) = s$, and for nonintegral α for every $\beta > \alpha$ we have

$(C, \beta)\text{-}\lim_{t \rightarrow 0 +} f\left(\frac{1}{t}\right) = s$. The second theorem asserts that if $(C, \alpha)\text{-}\lim_{t \rightarrow 0 +} f\left(\frac{1}{t}\right)$

$= s$, then for an integer α we have $(C, \alpha)\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = s$, whereas for a non-integer

α the relation $(C, \beta)\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = s$ holds for every $\beta > \alpha$. L. Włodarski.

Dawson, David F.: Continued fractions with absolutely convergent even or odd part. Canadian J. Math. 11, 131—140 (1959).

Conditions are found under which the absolute convergence of the subsequence of odd or of even approximants to a continued fraction implies convergence of the continued fraction. E. Frank.

Thron, W. J.: Zwillingskonvergenzgebiete für Kettenbrüche $1 + K(a_n/1)$, deren eines die Kreisscheibe $|a_{2n-1}| \leq \varrho^2$ ist. Math. Z. 70, 310—344 (1959).

The convergence of the continued fraction $1 + a_1/1 + a_2/1 + \dots$, where the a_n are complex numbers, is further studied. Regions G_ϱ are sought such that the two conditions $|a_{2n-1}| \leq \varrho^2$ and $a_{2n} \in G_\varrho$, for all $n \geq 1$, insure the convergence of the continued fraction. (1) It is shown that $|a_{2n-1}| \leq \varrho^2$, $a_{2n} = c_{2n}^2$, $|c_{2n} \pm i| \geq \varrho$, and $|a_{2n}| \geq \varrho^2 - 1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, insures the convergence of the continued fraction for $\varrho = 1$, and the convergence of the even part for $\varrho > 1$. (2) It is shown that the conditions $|a_{2n-1}| \leq r$, $|a_{2n}| \geq 2(r - \cos \arg a_{2n})$, $r > 1$, are sufficient for the convergence of the continued fraction, and counter-examples show this is the best possible result. The convergence is however not always uniform. It is shown that uniform convergence is obtained only if $|a_{2n-1}| \leq r$, $|a_{2n}| \geq 2(r - \cos \arg a_{2n}) + \varepsilon$. E. Frank.

Fog, David: A remark on two series. Nordisk mat. Tidskrift 6, 83, engl. Zusammenfassg. 96 (1958) [Dänisch].

The classical series for $\pi/4$ and for $\log 2$ are particular cases, with $p = 1$ and $p = 2$ respectively, of the expansion $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{p-1} x dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+4} - \frac{1}{p+6} + \dots$, $p \geq 1$.

Engl. Zusammenfassg.

Mitrinovich, Dragoslav: Nouvelles formules relatives aux nombres de Stirling. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 1754—1756 (1959).

Die Stirlingzahlen 1. Art S_n^m genügen bekanntlich der partiellen Differenzengleichung (1) $S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - n S_n^m$, deren allgemeine Lösung unbekannt ist. Den Jordanschen Partikulärlösungen $S_n^m, S_n^{m-1}, S_n^{m-2}, \dots$ von (1) fügt Verf. nach einem einfachen, auch auf andere Differenzengleichungen anwendbaren Verfahren Partikulärlösungen $S_n^{m-2}, S_n^{m-3}, \dots$ hinzu [bis S_n^{m-8} explizit angegeben; dabei ist $S_n^{m-k}/\binom{n}{k+1}$ ein Polynom $(k-1)$ -ten Grades in n]. Ein früheres Verfahren des Verf. [s. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 33, 244—247 (1947)] wurde mit wachsendem n schnell kompliziert. Es muß heißen $S_n^{m-1} = -\binom{n}{2}$.

I. Paasche.

Tideman, M.: Comments on an old inequality. Nordisk mat. Tidskrift 6, 27—28, engl. Zusammenfassg. 56 (1958) [Schwedisch].

L'A. démontre les inégalités
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k t n^{2k-1}}{(n^2 + t)^{k+1}} < \frac{1}{2} \text{ pour } t \geq 0, k = 1, 2, \dots$$

En posant $k = 1$, $t = x^2$ on obtient une inégalité énoncée par Mathieu et démontrée par Berg (ce Zbl. 46, 62), Emersleben (ce Zbl. 49, 322), van der Corput et Heflinger [Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 15—20 (1956)]. J. Horváth.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Berman, D. L.: The convergence of Lagrange's interpolation process constructed for absolutely continuous functions and functions of bounded variation. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 9—12 (1957) [Russisch].

In Erweiterung einer Arbeit von V. I. Krylov (dies. Zbl. 71, 57) werden allgemeine Bedingungen für die Konvergenz des Lagrange-Interpolationsprozesses aufgestellt, wenn die zu approximierende Funktion totalstetig bzw. wenn sie von beschränkter Variation ist. Im ersten Fall ergibt sich speziell die gleichmäßige Konvergenz in $[-1, 1]$ dann, wenn die Knotenmatrix aus Wurzeln von Jacobi-Polynomen $Y_n(\alpha_n, \beta_n)$ besteht, die den Bedingungen $-1 \leq \alpha_n, \beta_n \leq -\lambda < 0$ genügen, wobei $\lambda > 0$ hinreichend klein sein muß. Nimmt man die Wurzeln der Legendre-Polynome, so findet einfache Konvergenz in $(-1, 1)$ statt. Im zweiten Falle erhält man Konvergenz in allen Stetigkeitspunkten der Funktion innerhalb $(-1, 1)$, wenn die Knotenmatrix aus den Nullstellen von Jacobi-Polynomen mit $-1 \leq \alpha_n, \beta_n \leq 0$ besteht. K. Bögel.

Saxena, R. B. and A. Sharma: On some interpolatory properties of Legendre polynomials. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 345—358 (1958).

In Erweiterung des Programmes der Turánschen $(0, 2)$ -Interpolation (vgl. das nächste Referat nebst Zitaten) zeigen Verff., daß auch für eine $(0, 1, 3)$ -Interpolation (außer den Funktionswerten sind die Werte der ersten und dritten Ableitung vorgeschrieben) es im Falle $n = 2k$ ein eindeutig bestimmtes Polynom $f(x)$ vom Grade $\leq 3n - 1$ gibt, das an den Interpolationsstellen x_{vn} nebst seiner ersten und dritten Ableitung die vorgegebenen Werte hat. Als Interpolationsstellen werden wie bei Turán die Nullstellen x_{vn} der Polynome $(1 - x^2) P'_{n-1}(x)$ [$P_n(x) = n$ -tes Legendresches Polynom mit $P_n(1) = 1$] gewählt. Konvergenzbetrachtungen sollen folgen. P. Heuser.

Balázs, J. and P. Turán: Notes on interpolation. III: Convergence. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 195—214 (1958).

P. Turán und seine Mitarbeiter untersuchten die Interpolationspolynome höchstens $(2n - 1)$ -ten Grades

$$R_n(x, f) = \sum_{v=1}^n \{f(x_{vn}) r_{vn}^{\alpha_n}(x) + \beta_{vn}^1 \varrho_{vn}(x)\},$$

welche an n Stellen x_{vn} , $v = 1, 2, \dots, n$, vorgeschriebene Werte $f(x_{vn})$ und vorgeschriebene zweite Ableitungen β_{vn} besitzen. Als Grundpunkte dieser $(0, 2)$ -Interpolation dienen hierbei die Nullstellen von $(1 - x^2) P'_{n-1}(x)$, wo $P_n(x)$ das n -te Legendresche Polynom und $n = 2k$ eine gerade Zahl ist (J. Surányi and P. Turán, Teil I, dies. Zbl. 64, 300; Teil II, dies. Zbl. 78, 54). In der vorliegenden Arbeit wird über das Konvergenzverhalten der $R_n(x, f)$ bewiesen: Ist $f(x)$ stetig differenzierbar, existiert für den Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$ von $f'(x)$ das Integral $\int_0^{\omega(\delta)} \frac{\omega(t)}{t} dt$, so konvergiert die Folge $R_n(x, f)$ in $[-1, 1]$ gleichmäßig gegen $f(x)$. Die Reichweite des

Resultats ergibt sich aus dem Satz: Zu einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ gibt es ein zur Klasse $\text{Lip}(1 - \varepsilon)$ gehöriges $F(x)$, so daß die Polynome $R_n(x, F)$ in $x = 0$ nicht beschränkt sind. P. Heuser.

Freud, G.: Bemerkung über die Konvergenz eines Interpolationsverfahrens von P. Turán. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 337—341 (1958).

Unter Benutzung der Abschätzungen, die J. Balázs und P. Turán (s. vorstehendes Referat) zur Behandlung der Konvergenzfrage hergeleitet haben, zeigt Verf., daß die Turánsche $(0, 2)$ -Interpolation schon dann in $[-1, 1]$ gleichmäßig konvergiert, wenn für die als stetig vorausgesetzte, zu interpolierende Funktion $f(x)$ gilt: $|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq \varepsilon(h)$, $(x-h, x+h \in [-1, 1])$, mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0$, und wenn für die vorgegebenen zweiten Ableitungen β_{rn} gleichmäßig in ν gilt: $|\beta_{\nu n}| \leq \varepsilon_n \cdot n \sqrt{1 - x_{\nu n}^2}$, $\nu = 1, 2, \dots$, $|\beta_{0n}|$ und $|\beta_{nn}| \leq \varepsilon_n n^2$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. P. Heuser.

Balázs, J. and P. Turán: Notes on interpolation. IV: Inequalities. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 243—258 (1958).

Verff. entwickeln ein beliebiges Polynom $\pi_{2n-1}(x)$ nach den Grundpolynomen der Turánschen $(0, 2)$ -Interpolation und gewinnen Abschätzungen für $|\pi_{2n-1}(x)|$ und $|\pi'_{2n-1}(x)|$, indem sie die Ergebnisse der Konvergenzuntersuchungen der $(0, 2)$ -Interpolation anwenden (Teil III, vgl. vorletztes Referat). Es wird gezeigt: Ist für $1 = x_1 > x_2 > \dots > x_{n-1} > x_n = -1$ $|\pi_{2n-1}(x_r)| \leq A$, und $|\pi'_{2n-1}(x_r)| \leq B$, so gilt für $-1 \leq x \leq 1$ stets

$$|\pi_{2n-1}(x)| \leq \pi^6 n A + \pi^5 n^{-1} B.$$

Tiefer liegt und schwieriger zu beweisen ist die Abschätzung:

$$|\pi'_{2n-1}(x)| \leq \pi^8 n^{5/2} A + \pi^5 \sqrt{n} B,$$

wo der ungewöhnliche Exponent $\frac{5}{2}$ wirklich in der Natur der Sache liegt, wie an einem Gegenbeispiel gezeigt wird. P. Heuser.

Egerváry, E. and P. Turán: Notes on interpolation. V.: On the stability of interpolation. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 259—267 (1958).

Für die Grundpolynome der Hermite-Fejérschen Interpolation hat Fejér gezeigt, daß für irgend zwei n -tupel y_ν und y_ν^* bei passender Wahl der Grundpunkte stets gilt:

$$\min_\nu (y_\nu - y_\nu^*) \leq \left(\sum_{\nu=1}^n y_\nu h_\nu(x) - \sum_{\nu=1}^n y_\nu^* h_\nu(x) \right) \leq \max_\nu (y_\nu - y_\nu^*),$$

welche Eigenschaft z. B. der Lagrangeschen Interpolation nicht zukommt. Nennt man eine Interpolation vermöge eines Systems $r_\nu(x)$, dem diese Eigenschaft zukommt, „stabil“, und nennt man $\sum_{\nu=1}^n$ Grad von $r_\nu(x) = G(R_n)$ den Grad des Interpolationsprozesses; so tritt die Frage nach der „ökonomischsten“ Interpolation auf, das heißt: nach derjenigen, die stabil ist und für die $G(R_n)$ möglichst klein ist. Verff. beweisen: Der Minimalgrad einer stabilen Interpolation ist $2(2n-3) + (n-2)(2n-4) = 2(n-1)^2$ und wird dann und nur dann erreicht, wenn die Grundpunkte die Nullstellen des $(n-2)$ -ten Legendreschen Polynoms $P_{n-2}(x)$ mit der Normierung $P_{n-2}(1) = 1$ sind. P. Heuser.

Balázs, J.: Bemerkungen zur Hermite-Fejérschen Interpolationstheorie. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 363—377 (1958).

The author shows a uniform convergence theorem about the Hermite-Fejér interpolation process and discusses a related problem. G. Sunouchi.

Erdős, P.: Concerning approximation with nodes. Colloquium math. 6 dédié à C. Kuratowski, 25—27 (1958).

In connessione con una ricerca di S. Paszkowski (questo Zbl. 77, 278) l'A. dimostra che se $P_n(x)$ è la classe di tutti i polinomi di grado n ed

$$E_n = \min_{P_n(x)} \max_{-1 \leq x < 1} |f(x) - P_n(x)|, \quad E'_n = \min_{P_n(0)=f(0)} \max_{-1 \leq x < 1} |f(x) - P_n(x)|$$

la funzione continua $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{2n_k}(x)}{k!}$ dove $T_n(x)$ indica l' n^{esimo} polinomio di Čebyšev e $\{n_k\}$ è una successione divergente abbastanza rapidamente, gode la proprietà che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E'_n}{E_n} = 2$. L'A. congettura che si può costruire una funzione

$$f(x) \text{ per la quale } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E'_n}{E_n} = 2.$$

G. Sansone.

Hsu, L. C.: A new type of polynomials approximating a continuous or integrable function. *Studia math.* 18, 43—48 (1959).

Sia $f(x)$ definita in $[0, 1]$ e si considerino i polinomi

$$(*) \quad P_n(f; x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \left[1 - \left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right]^n,$$

$$S_n(f; x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{k=1}^n \left[1 - \left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right]^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t) dt,$$

dove nel secondo caso supponiamo $f(x) \in L^p$ in $[0, 1]$, $p \geq 1$. L'A. dimostra: 1°) se $f(x)$ è continua in $[0, 1]$ e $0 < \eta < 1/2$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(f; x) = f(x)$ uniformemente

in $[\eta, 1 - \eta]$; 2°) se $f(x) \in L^p$ in $[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |S_n(f; x) - f(x)|^p dx = 0$.

L'A. con l'uso di altra formula del tipo della (*) estende il teorema 1° al caso che $f(x)$ sia definita in $(0, \infty)$ e in $(-\infty, \infty)$.

G. Sansone.

Håstad, Matts: Uniform approximation with diophantine side-conditions of continuous functions. *Ark. Mat.* 3, 487—493 (1958).

The first part of this paper deals with approximation of real continuous functions in one variable by rational functions whose zeros and poles all belong to certain prescribed sets. On the second part, the author gives a necessary and sufficient condition that each continuous function $f(x, y, \dots)$ admits uniform approximation by a polynomial whose coefficients are rational integers.

G. Sunouchi.

Wintner, Aurel: On the sine approximations to convex arches. *Scripta math.* 23, 153—156 (1958).

Es sei A die Klasse aller Funktionen $f(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) mit folgenden Eigenschaften: a) $f(x)$ ist positiv und konkav für $0 < x < \pi$; b) $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f^2(x) dx = 1$; c) $f(+0) = 0 = f(\pi - 0)$; d) $f(\frac{1}{2}\pi - t) = f(\frac{1}{2}\pi + t)$ für $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$. Man bezeichne ferner für $f \in A$:

$$\rho_f = \min_b \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x) - b \sin x)^2 dx.$$

In der Arbeit wird das Problem gelöst, das Maximum der ρ_f für alle $f \in A$ zu finden. Das Resultat wird mit der Lösung des entsprechenden Problems für die Klasse aller Funktionen, die nur die Eigenschaften a) und b) besitzen, verglichen.

L. Kosmák.

Boas jr., R. P. and A. C. Schaeffer: Variational methods in entire functions. *Amer. J. Math.* 79, 857—884 (1957).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Problem, Linearkombinationen von Werten und Ableitungen einer ganzen Funktion vom Exponentialtyp maximal

zu machen. Die dabei verwendete neue Variationsmethode liefert allgemeine Aussagen, die in verschiedenen konkreten Fällen explizite Resultate ergeben. — Es sei \mathfrak{F}_τ die Klasse der ganzen Funktionen $f(z)$ mit $|f(x)| \leq 1$ ($-\infty < x < +\infty$), die höchstens vom Exponentialtyp τ und für reelle z reell sind. Für $f \in \mathfrak{F}_\tau$ wird das lineare Funktional $L(f) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n_k} \alpha_k^{(j)} f^{(j)}(x_k)$ gebildet [x_k und $\alpha_k^{(j)}$ reell,

$\alpha_k^{(n_k)} \neq 0$, $n_k > 0$ für mindestens ein k]; $T = n_1 + n_2 + \dots + n_m + m$ heißt die Ordnung des Funktional. Das Hauptergebnis lautet dann: Es existiert genau ein $f \in \mathfrak{F}_\tau$, für welches $L(f) = \sup \{L(g) | g \in \mathfrak{F}_\tau\}$ ist, und dieses f ist entweder konstant oder vom genauen Exponentialtyp τ . Im letzteren Falle genügt f einer Differentialgleichung

$$(1) \quad \{f'(z)\}^2 / (1 - \{f(z)\}^2) = \tau^2 \{p(z)\}^2 / q(z),$$

wobei p, q reelle Polynome sind; $p(z)$ hat einen Grad $\leq T - 2$, und $\text{Grad } \{q(z)\} = 2 \cdot \text{Grad } \{p(z)\}$. Überdies hängen $f = f_\tau$ und $L(f_\tau)$ stetig von τ ab ($0 < \tau < \infty$). — Für konkrete Fälle von $L(f)$ müssen die Lösungen von (1) genauer untersucht werden. Dies gelingt vollständig für Funktionale der Ordnungen 2 und 3. So gilt z. B. Satz 3: Das Funktional $L(f) = \tau^2 \lambda f(0) + f''(0)$ wird in \mathfrak{F}_τ maximal für $f(z) = -\cos \tau z$ mit Maximum $\tau^2 (1 - \lambda)$, falls $\lambda \leq \frac{1}{3}$ ist, dagegen maximal für $f(z) = \pm \cos \{\tau (z^2 + r^2)^{1/2}\}$ mit Maximum $\tau^2 \cdot \max_{0 < \varphi \leq 2\pi} (\varphi^{-1} \sin \varphi - \lambda \cos \varphi)$, falls

$\lambda > \frac{1}{3}$ ist. Auch das Funktional $L(f) = f'(\frac{1}{2}) - f'(-\frac{1}{2})$ der Ordnung 4 läßt sich vollständig behandeln, während sich $L(f) = f'(\frac{1}{2}) + f'(-\frac{1}{2})$ als recht schwierig erweist. Für verschiedene τ -Intervalle hat hier die Extremale verschiedene Darstellungsformen. Schließlich wird gezeigt, daß sich die Methode auch auf solche Funktionale $L(f)$ anwenden läßt, bei denen alle $n_k = 0$ sind, die also von der Form $L(f) = \sum_{k=1}^m \alpha_k f(x_k)$ sind. Will man z. B. $M = \max |f'(\frac{1}{2}) - f'(-\frac{1}{2})|$ für $f \in \mathfrak{F}_\tau$ finden (Bernstein, dies. Zbl. 34, 38) so ergibt sich $M = 2 \sin \frac{1}{2} \tau$ für $0 < \tau \leq \pi$, für $\tau > \pi$ dagegen $M = 2$.

D. Gaier.

Sieklicki, K.: Topological properties of sets admitting the Tschebycheff systems. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 603—606, russ. Zusammenfassg. XLIX (1958).

The author proves the following conjecture of Mazur; if on the space Z , there exists a Tschebycheff system of n functions, then, for even n , the space Z is homeomorphic with the subset of a segment, and for odd n ($n > 1$), the space Z is homeomorphic with the circumference or with a subset of a segment. G. Sunouchi.

Konjuškov, A. A.: Über gewisse Funktionenklassen. I. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 22, 841—870 (1958) [Russisch].

Toutes les fonctions considérés sont périodiques, de période 2π . Par $\Delta_t^{(\kappa)} f(x)$ on désigne la différence symétrique d'ordre κ de la fonction f . Soient: $\varphi(t)$ une fonction positive sur $[0, 2\pi]$, p tel que $1 \leq p \leq \infty$, κ un entier positif et $M > 0$. Considérons les classes suivantes: 1. $H_{\varphi, \kappa, p}$ — la classe des fonctions $f \in L_p(0, 2\pi)$ pour $1 \leq p < \infty$ et $f \in C_{2\pi}$ pour $p = \infty$, telles que

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\|\Delta_t^{(\kappa)} f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} < \infty;$$

2. $H_{\varphi, \kappa, p}^\infty = L_p(0, 2\pi) - H_{\varphi, \kappa, p}$ pour $1 \leq p < \infty$, $H_{\varphi, \kappa, \infty}^\infty = C_{2\pi} - H_{\varphi, \kappa, \infty}$; 3. $D_{w, \kappa, p, \theta}$ — la classe des fonctions $f \in L_p(0, 2\pi)$ pour $1 \leq p < \infty$ et $f \in C_{2\pi}$ pour $p = \infty$, telles que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\|\Delta_t^{(\kappa)} f(x)\|_{L_p}^\beta}{w(t)} dt < \infty$$

où $w(t)$ est positive sur $(0, 2\pi]$ et $\beta > 0$; 4. $D_{w, \kappa, p, \beta}^\infty = L_p(0, 2\pi) - D_{w, \kappa, p, \beta}$ pour $1 \leq p < \infty$ et $D_{w, \kappa, \infty, \beta}^\infty = C_{2\pi} - D_{w, \kappa, \infty, \beta}$. Pour la classe 1. la norme est définie par

$$\|f\|_{H_{\varphi, \kappa, p}} = \|f\|_{L_p} + \sup_{0 < t \leq 2\pi} \frac{\|A_t^{(\kappa)} f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)}.$$

Pour la classe 3. la métrique est définie par

$$\rho(f_1, f_2)_{D_{w, \kappa, p, \beta}} = \|f_1 - f_2\|_{L_p} + \left[\int_0^{2\pi} \frac{\|A_t^{(\kappa)}(f_1 - f_2)(x)\|_{L_p}^\beta}{w(t)} dt \right]^\alpha$$

où $\alpha = 1$ ou $1/\beta$ selon on a $0 < \beta \leq 1$ ou $\beta > 1$. Théorème 1. Pour que $H_{\varphi, \kappa, p}^\infty$ soit non vide il faut et il suffit que (1) $\lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t) = 0$. Dans ce cas $H_{\varphi, \kappa, p}^\infty$ est un ensemble résiduel dans $L_p(0, 2\pi)$ (resp. $C_{2\pi}$, si $p = \infty$). Pour que $H_{\varphi, \kappa, p}$ contienne au moins une fonction qui n'est pas équivalente à une constante il faut et il suffit que

$$(2) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \frac{t^\kappa}{\varphi(t)} < \infty.$$

Si la condition (1) n'est pas remplie, alors $H_{\varphi, \kappa, p}$ coïncide avec $L_p(0, 2\pi)$ si $1 \leq p < \infty$ et avec $C_{2\pi}$ si $p = \infty$; si (1) est remplie, alors $H_{\varphi, \kappa, p}$ est un ensemble de première catégorie dans ces espaces. Si la condition (2) n'est pas remplie, $H_{\varphi, \kappa, p}$ est fermé; si (2) est remplie, alors $H_{\varphi, \kappa, p}$ est du type F_σ mais pas du type G_δ . Le théorème 1 reste en vigueur si on remplace $H_{\varphi, \kappa, p}$ et $H_{\varphi, \kappa, p}^\infty$ par $D_{w, \kappa, p, \beta}$ et $D_{w, \kappa, p, \beta}^\infty$ et les conditions (1) et (2) par

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{w(t)} = \infty, \quad \int_0^{2\pi} \frac{t^{\kappa\beta}}{w(t)} dt < \infty$$

où $w(t)$ est positive et croissante. Théorème 2. Soient: $\varphi(t)$ positive et croissante sur $(0, 2\pi]$, $\varphi_1(t)$ positive sur $(0, 2\pi]$. Pour que l'ensemble $A = H_{\varphi, \kappa, p} \cap H_{\varphi_1, \kappa, p}^\infty$ soit non vide il faut et il suffit que la condition (2) soit remplie et qu'on ait

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \varphi_1(t) / \left\{ t^\kappa \inf_{0 < \tau \leq t} [\tau^{-\kappa} \varphi(\tau)] \right\} = 0.$$

Dans ces conditions, l'intersection A est un résiduel dans $H_{\varphi, \kappa, p}$. A est ouvert dans $H_{\varphi, \kappa, p}$ dès qu'on a

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \frac{t^\kappa}{\varphi_1(t)} = \infty;$$

Si cette condition n'est pas remplie, alors A est du type G_δ mais pas du type F_σ . Théorème 3. Soit $f \in L_p$ si $1 \leq p < \infty$ et $f \in C_{2\pi}$ si $p = \infty$. Si $\varphi(t)$ est positive sur $(0, 2\pi]$ et $t^\kappa/\varphi(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +0$, alors pour que

$$\inf_T \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \frac{\|A_t^{(\kappa)}(f - T)(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} = 0$$

où T est un polynôme trigonométrique quelconque, il faut que

$$(3) \quad \|A_t^{(\kappa)} f(x)\|_{L_p} / \varphi(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +0).$$

Si pour chaque ε tel que $0 < \varepsilon < 2\pi$ on a $\inf_{\varepsilon \leq t < 2\pi} \varphi(t) > 0$, alors la condition (3) est suffisante pour que

$$\sup_{0 < t \leq 2\pi} \frac{\|A_t^{(\kappa)}(f - \sigma_n)(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

où σ_n sont les sommes de Fejer associées à f . Le théorème 4 est l'analogue du théorème 2 pour les classes $D_{w, \kappa, p, \beta}$. Théorème 5. Soit $\varphi(t) \downarrow 0$ pour $t \rightarrow +0$ et supposons que la condition (2) est remplie. Alors l'ensemble $\underline{H}_{\varphi, \kappa, p} = \bigcup_{\varphi_1} H_{\varphi_1, \kappa, p}$,

où la réunion est prise par rapport à toutes les fonctions positives $\varphi_1(t)$ telles que $\varphi_1(t) = o[\varphi^{**}(t)]$ ($t \rightarrow +0$), est fermé et de première catégorie dans $H_{\varphi, \kappa, p}$. (On a désigné par $\varphi^{**}(t)$ la fonction

$$t^{\kappa} \inf_{0 < \tau \leq t} [\tau^{-\kappa} \varphi(\tau)] \quad (0 < t \leq 2\pi).$$

On a aussi $\bigcup_{w_1} D_{w_1, \kappa, p, \beta} = D_{w, \kappa, p, \beta}$ où la réunion est prise par rapport à toutes les fonctions positives $w_1(t)$ telles que $w_1(t)/w(t) \downarrow 0$ pour $t \rightarrow +0$. Les résultats obtenus sont liés à certains résultats antérieurs de E. Tarnawski, W. Orlicz, H. Auerbach et S. Banach, S. Kaczmarcz, A. Plessner, J. Marcinkiewicz, A. Beurling, A. Broman, P. L. Ul'janov, G. Freud et D. Králík, S. B. Stečín, A. Zygmund, G. Hardy et E. Littlewood, S. Banach, F. Hausdorff, S. Mazure et L. Sternbach, A. A. Konjuškov, A. F. Timan et M. F. Timan.

S. Marcus.

• Zygmund, A.: *Trigonometric series*. Vol. 1, 2. 2nd ed. Cambridge: At the University Press 1959. XII, 383; VII, 354 p. 84 s. net each vol.

Das bekannte Standardwerk über trigonometrische Reihen von A. Zygmund, das zum ersten Male im Jahre 1935 in Warschau (dies. Zbl. 11, 17) erschienen war und wegen seiner besonderen Bedeutung nach dem Kriege noch mehrfach (1940, 1952 und 1955) in New York nachgedruckt worden ist, liegt jetzt in einer vom Verf. sorgfältig besorgten Neubearbeitung vor. Der seit dem Erscheinen des Werkes stark angewachsene Stoff wurde nunmehr auf zwei Bände verteilt. Band I enthält im wesentlichen den vollständig neugeschriebenen Stoff des ursprünglichen Werkes: Trigonometrische Reihen und Fouriersche Reihen, Hilfssätze, Fourierkoeffizienten, elementare Sätze über die Konvergenz von $S[f]$ und $\tilde{S}[f]$, Summierbarkeit von Fourierschen Reihen, Funktionenklassen und Fouriersche Reihen, spezielle trigonometrische Reihen, die absolute Konvergenz von trigonometrischen Reihen, komplexe Methoden in der Theorie der Fourierschen Reihen, Divergenz von Fourierschen Reihen, Riemanns Theorie der trigonometrischen Reihen. Der Band II bringt vor allem den bisher noch nicht in Buchform dargestellten Stoff: Trigonometrische Interpolation, Differentiation von Reihen, verallgemeinerte Ableitungen, Interpolation von linearen Operationen, weiteres über Fourierkoeffizienten, Konvergenz und Summierbarkeit fast überall, weiteres über komplexe Methoden, Anwendungen der Littlewood-Paleyschen Funktion auf Fouriersche Reihen, Fouriersche Integrale, ein Abriss über mehrfache Fouriersche Reihen. — Die vermischten Sätze und Beispiele am Ende jedes Kapitels vermitteln überdies dem Leser ein reichhaltiges, mit wertvollen Hinweisen versehenes Übungsmaterial. Die zahlreichen Literaturhinweise sind am Ende jedes Bandes kapitelweise zusammengestellt. In einer umfangreichen (15 S.) Bibliographie ist die wichtigste Literatur (alphabetisch nach Verfassern geordnet) aufgeführt. Dem Verlag ist es gelungen, dem Werk eine dem Gedankenreichtum des Inhalts und der glänzenden Darstellungskunst des Verfassers angemessene äußere Form zu geben, die drucktechnische Wiedergabe und die Ausstattung sind muster-gültig.

V. Garten.

Stein, Elias M.: *A maximal function with applications to Fourier series*. Ann. of Math., II. Ser. 68, 584—603 (1958).

The author succeeds in using of Marcinkiewicz's lemma (J. Marcinkiewicz, this Zbl. 14, 215) to prove a maximal theorem. This is an important contribution. His maximal theorem reads as follows. Let $1 < \lambda \leq 2$, $p = 2/\lambda$, $f(\theta) \in L_p(0, 2\pi)$, $U(\varrho, \theta)$ denote its Poisson integral, and $\delta = 1 - \varrho$. Let

$$M_{\lambda}(f; \theta) = \sup_{1 \geq \varrho > 0} \left(\delta^{\lambda-1} \int_{(\pi \geq t \geq \theta)} \frac{|U(\varrho, \theta + t)|^2}{|t|^{\alpha}} dt \right)^{1/2}.$$

Then (1) $M_{\lambda}(f; \theta)$ is finite for almost every θ , and (2) for $y > 0$, is D_y denoting the

set in $(0, 2\pi)$, where $M_\lambda(f; \theta) > y$, then

$$\|D_\nu\| \leq \frac{A_\lambda}{y^p} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p d\theta.$$

From this, he deduces some maximal theorems concerning Cesàro means of Fourier series of a function of the class H_p ($0 < p \leq 1$) and strong summability of Fourier series of a function of the class L_p ($1 \leq p < 2$). The former theorem was as conjecture of A. Zygmund (this Zbl. 60, 202). G. Sunouchi.

Weiss, Mary and Antoni Zygmund: A note on smooth functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 52–58 (1959).

Suppose that a periodic and continuous function $F(x)$ satisfies the condition

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = o\{h/\log h\},$$

and let $s_n(x)$ and $\sigma_n(x)$ be respectively the partial sums and $(C, 1)$ means of $S'[F]$. Then the authors prove $s_n(x) - \sigma_n(x) \rightarrow 0$, uniformly in x . The proof is short and clear. This theorem implies the main part of Salem's result (this Zbl. 57, 52). G. Sunouchi.

Kumari, Sulaxana: Determination of the jump of a function by its Fourier series. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 24, 204–216 (1958).

Let $f(x) \in L(-\pi, \pi)$, have the period 2π , with the Fourier series $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ and the conjugate Fourier series $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)$ where $B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$. Let $\theta(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) - f(x-t) - 2l]$ and $\theta_\alpha(t) = \frac{\alpha}{t^\alpha} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \theta(u) du$ when $\alpha > 0$ and $\theta_0(t) = \theta(t)$. If $\theta_\alpha(t)$ tends

to zero as $t \rightarrow 0$, the function $f(x)$ is said to have the generalized jump l at the point x in mean of order α . The author proves several theorems relating this generalized jump with the (R, w, k) summability of the series $\sum B_n(x)$ and the sequence $\{n B_n(x)\}$. The series $\sum a_n$ (or the corresponding sequence of partial sums) is said to be summable (R, w, k) to s if $w^{-k} \sum_{n \leq w} (w-n)^k a_n$ tends to s as w tends to infinity. Let $T_k(w)$ and $C_k(w)$ denote the above sum for the sequence $\{n B_n(x)\}$ and the series $\sum B_n(x)$ respectively. The following are some of the typical results proved. Let $\alpha > 0$,

$-1 < \rho < 1$, $\alpha + \rho > 0$ and $\int_0^t |\theta_\alpha(u)| du = O\left\{\frac{t^{\rho+1}}{\log(1/t)}\right\}$ as $t \rightarrow 0$, then

$T_{\alpha+\rho+1}(w) - 2l/\pi = o(w^{-\rho})$ as $w \rightarrow \infty$. If α, ρ be as above, $p > -1$

and $\int_0^t \left[\frac{|\theta_\alpha(u)|}{u}\right] du = O\left\{t^\rho \left(\log \frac{1}{t}\right)^{p+1}\right\}$ as $t \rightarrow 0$, then $T_{\alpha+\rho+1}(w) - \frac{2l}{\pi} =$

$O(w^{-\rho} (\log w)^{p+1})$ as $w \rightarrow \infty$. If $\theta_\alpha(t)$ satisfies the condition in the first result above with $\rho = 0$, then $\lim_{w \rightarrow \infty} [C_\alpha(Hw) - C_\alpha(w)] = \frac{2l}{\pi} \log H$ for $H > 1$.

[Reviewer's note: While the proof given appears to go through with the order terms stated in the first two and similar results in the paper, the result in relation to the finite number l is significant only when $\rho \geq 0$.] V. Ganapathy Iyer.

Srivastava, Pramila: The summability factors of a Fourier series and the series conjugate to it. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A, 24, 196–203 (1958).

In this paper, the problems considered in the paper reviewed this Zbl. 85, 49 for general infinite series are specialized for a Fourier series and its conjugate series. We quote a typical result. Let $f(x)$ be periodic with period 2π and $\in L(-\pi, \pi)$, $\frac{1}{2}a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ be its Fourier series, and $\sum B_n(x)$, $B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$, its conjugate series. Let $\Psi(t) = \Psi_0(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) - f(x-t)]$, $\Psi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \Psi(u) du$, $\alpha > 0$. If $\Psi_\alpha(+0) = 0$ and $\int_0^\pi t^{-\alpha} |d\Psi_\alpha(t)|$

is finite, then $\sum B_n(x) \lambda_n$ is summable $|C, \alpha|$, where the sequence (λ_n) satisfies the conditions, $|\Delta \lambda_n|$ is decreasing, $\sum |\lambda_n|/n$ and $\sum n^{p+1} |\Delta^{p+2} \lambda_n|$ converge, p being the integral part of α . The theorems derived in this paper also generalize several known results regarding summability factors of Fourier series.

V. Ganapathy Iyer.

Mordell, L. J.: On Ingham's trigonometric inequality. Illinois J. Math. 1, 214—216 (1957).

Verf. beginnt mit der folgenden Umgestaltung eines Satzes von A. E. Ingham (dies. Zbl. 37, 329 vgl. 14, 215): Sind in $f(t) = \sum_{r=0}^n a_r e^{-\lambda_r t i}$ die λ_r ($r = 0, 1, 2, \dots, n$) reell und $\lambda_r - \lambda_{r-1} \geq 1$ ($r = 1, 2, \dots, n$), so gilt

$$|a_r| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n),$$

und es gibt keine absolute Konstante $c < 1$ derart, daß

$$|a_r| \leq \frac{c}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n)]$$

gilt. Verf. zeigt unter Benützung der Grundgedanken des Beweises von Ingham, daß es solche, von den λ_p ($p = 0, 1, 2, \dots, n$) abhängige Konstanten $c_r < 1$ doch gibt, genauer gesagt, daß

$$|a_r| \leq \frac{c_r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n)$$

gilt, falls in $f(t) = \sum_{r=0}^n a_r e^{-\lambda_r t i}$ die λ_r ($r = 0, 1, 2, \dots, n$) reell und $\lambda_r - \lambda_{r-1} \geq 1$ ($r = 1, 2, \dots, n$) sind, wo

$$c_r = 1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda_r}{\mu_r} \prod_{p=0}^n \frac{\mu_p}{\lambda_p} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n)$$

mit $\mu_p = \text{sign } \lambda_p \cdot [|\lambda_p|]$. ($[x]$ ist die größte ganze Zahl $\leq x$). [Sind die λ_p alle ganze Zahlen, so sind die Voraussetzungen in trivialer Weise erfüllt und alle $c_r = \frac{1}{2}$.]

J. Aczél.

Bourion, Georges: Sur les cas classiques de convergence des séries de Fourier associées aux fonctions presque-périodiques de Bohr. Bull. math. Soc. Sci. math. phys. R. P. R., n. Sér. 2 (50), 1—4 (1958).

The title refers to two cases considered by Bohr at an early stage of the theory of almost periodic functions: Fourier series of almost periodic functions with positive coefficients or with linearly independent exponents. The note contains nothing very new. In view of the chosen method of proof it would have been natural to quote Bochner for having deduced the two theorems as corollaries of his summation theorem.

E. Følner.

Watari, Chinami: On generalized Walsh Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 10, 211—241 (1958).

In this paper the author proves the theorems stated in his previous paper (C. Watari, this Zbl. 80, 51). The method of proof follows the line of Paley's argument.

G. Sunouchi.

Gupta, D. P.: On the Cesàro summability of the ultraspherical series. I, II. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 24, 269—278, 419—440 (1958).

I. L'A. per la sommabilità di Cesàro delle serie di polinomi ultrasferici estende alcuni risultati ottenuti per le serie di Fourier da F.T. Wang (questo Zbl. 29, 255).

Sia $f(\theta, \Phi)$ una funzione definita sulla sfera unitaria S : $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \Phi \leq 2\pi$ e si consideri la serie di Laplace

$$(*) \quad f(\theta, \Phi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda) \iint_S \frac{f(\theta', \Phi') P_n^{(\lambda)}(\cos \omega) \sin \theta' d\theta' d\Phi'}{[\sin^2 \theta' \sin^2 (\Phi - \Phi')]^{1/2 - \lambda}}$$

dove $P_n^{(\lambda)}(x)$, ($\lambda > 0$), è l' n^{esimo} polinomio sferico di rango λ e $\cos \omega = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\Phi - \Phi')$. Supposto che $f(\theta', \Phi') [\sin^2 \theta' \sin (\Phi - \Phi')]^{\lambda - 1/2}$ sia sommabile L su S , si ponga

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi (\sin \omega)^{2\lambda}} \int_{C_\omega} \frac{f(\theta', \Phi') ds'}{[\sin^2 \theta' \sin^2 (\Phi - \Phi')]^{1/2 - \lambda}},$$

ove l'integrale curvilineo è esteso al cerchio C_ω di centro (θ, Φ) e di raggio sferico ω , e ds' indica l'elemento d'arco di questo cerchio. Sia A una costante e si consideri la funzione $\Phi(\omega) = [f(\omega) - A \Gamma(\lambda)/\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \lambda)] (\sin \omega)^{2\lambda}$ (v. N. Obrechhoff, questo Zbl. 14, 400); se

$$\int_0^t \Phi(u) du = o(t^{(1+2\lambda)/\alpha}) \text{ per } 0 < \alpha < 1, 0 < \lambda < 1,$$

allora la serie (*) è sommabile $(C, \alpha + \lambda)$ nel punto (θ, Φ) ed ha per somma A . — II. L'A. salvo a definire $f(\omega)$ con la relazione

$$f(\omega) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \lambda)}{\Gamma(\lambda) 2\pi (\sin \omega)^{2\lambda}} \int_{C_\omega} \frac{f(\theta', \Phi') ds'}{[\sin^2 \theta' \sin^2 (\Phi - \Phi')]^{1/2 - \lambda}},$$

dimostra che se $F(\omega) = f(\omega) (\sin \omega)^{2\lambda - 1} \in \text{lip}^*(\lambda - \kappa)$ essendo $\lambda - 1 < \kappa < \lambda, 0 < \lambda \leq 1/2$, e ove il simbolo $\text{lip}^*(\lambda - \kappa)$ indica con la notazione di Hardy e Littlewood che $|F(\omega + h) - F(\omega)| = o(|h|^{\lambda - \kappa})$, allora la serie (*) è sommabile (C, κ) in ogni punto (θ, Φ) di S e la sua somma vale $\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega)$. G. Sansone.

Meder, J.: On the summability almost everywhere of orthonormal series by the method of Euler-Knopp. Ann. Polon. math. 5, 135—148 (1958).

The author shows that if the orthonormal series $\sum a_n \varphi_n(x)$ satisfies the condition $\sum a_n^2 < \infty$ and is summable almost everywhere by the (E, q) -method for a certain $q > 0$, then it is summable almost everywhere by the (C, r) -method for every $r > 0$. But he doesn't determine whether there exists an orthonormal series summable by the method (C, r) and not summable by the method (E, q) for any set of positive measure. G. Sunouchi.

Sutherland, A. B.: Series for the distant zeros of exponential polynomials. Proc. London math. Soc., III. Ser. 9, 150—160 (1959).

The values of the zeroes of the "exponential polynomial" or "quasi-polynomial"

$$Q(z) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n Q_{\mu\nu} z^\mu e^{\mu z}$$

are of importance in a number of theories, notably those of linear differential equations and difference-differential equations. Langer [Trans. Amer. math. Soc. 31, 837—844 (1929)] found the approximate position of the distant zeroes and, for the case $m = n = 1$, the reviewer [Bull. Amer. math. Soc. 65, 89—93 (1959); Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 65, 193—203 (1959) and unpublished papers] recently found asymptotic expansions for each distant zero, the first two or three terms of which give a good approximation for every zero except a very few "near" ones. The author here considers the distant zeroes of $Q(z)$ for general m and n . She first constructs an integral function $F(z)$, whose essential factors are of the form

$$\theta_a(z) = \prod_{h=1}^k (z^a e^z - \alpha_{ha}).$$

Each distant zero z_Q of $Q(z)$ is associated with a distant zero z_F of $F(z)$, in the sense

that $z_Q - z_F \rightarrow 0$ as z_Q or $z_F \rightarrow \infty$. The distant zeroes of $F(z)$ can all be calculated by the reviewer's expansions to any required degree of accuracy. The author finds corresponding, but necessarily much more complicated, expansions for the distant zeroes of $Q(z)$. The details of the results are too complicated to be reproduced in an abstract.
E. M. Wright.

Spezielle Funktionen:

Rajagopal, A. K.: A note on the unification of the classical orthogonal polynomials. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A **24**, 309—313 (1958).

Siano m ed n interi positivi, X un polinomio di grado k in x , $k \leq m$, $h(x)$ un polinomio di grado $k-1$,

$$\log \omega = - \int \left[\frac{h(t)}{X(t)} \right] dt.$$

Se X soddisfa l'equazione $X^{(4)} + (nX' + \omega' \omega^{-1} X)^{(3)} = 0$ allora il polinomio $p_m(n, x)$ definito dalla formula di Rodrigues generalizzata

$$p_m(n, x) = [k_m \omega(x)]^{-1} (d/dx)^m (\omega(x) X^n)$$

soddisfa all'equazione differenziale del secondo ordine

$$Xv'' + [(m-n+1)X' - h]v' + [(m+1)(\frac{1}{2}m-n)X'' + nh' - (m-n)(\log \omega)''X]v = 0.$$

Il caso $X = ax^2 + bx + c$ è particolarmente considerato e si ritrovano per tale via i polinomi di Jacobi, Hermite, Laguerre e di Bessel. G. Sansone.

Rossum, H. van: Systems of orthogonal polynomials connected with Bessel functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **61**, 366—375 (1958).

The power series (A) $J_{v+1}(x^{1/2})/2x^{1/2}J_v(x^{1/2}) = s_{0,v} + s_{1,v}x + s_{2,v}x^2 + \dots$, where $J_v(x)$ is the series for the Bessel function of real order v , is studied here. (1) It is shown that the Padé table for the series (A) is normal. (2) Explicit expressions for the numerators and denominators of the Padé fractions $P_{n,n}(x)/Q_{n,n}(x)$ and $P_{n+1,n}(x)/Q_{n+1,n}(x)$ for (A) are given in terms of the functions ${}_2F_3$. They are thus related to the Lommel polynomials

$$R_{n,v}(x) = (\Gamma(v+n)/\Gamma(v)) (x/2)^{-n} {}_2F_3(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}(n-1); v, -n, 1-v-n; -x^2).$$

(3) Several systems of orthogonal polynomials connected with (A) are shown, for example, the polynomials

$$C_n(x, v) \equiv 4(v+1)(\Gamma(v+1)x^{-1/2}/2^{2n+3}\Gamma(v+2n+3)) \cdot R_{2n+1, v+2}(x^{-1/2}) \\ = x^n {}_2F_3(-n, -\frac{1}{2}-n; v+2, -2n-1, -v-2n-2; -x^{-1}).$$

The recurrence relations, weight functions, and orthogonality relations are determined.
E. Frank.

Ragab, F. M.: Series of products of Bessel polynomials. Canadian J. Math. **11**, 156—160 (1959).

Für die Besselschen Polynome $\gamma_n(x, a, b) = {}_2F_0(-n, a+n-1; -x/b)$ werden die folgenden Entwicklungen bewiesen:

$$(1) \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1-a-n-r)}{\Gamma(2-a-r)} (1-a-2r) \gamma_r(x, a, b) \gamma_r(y, a, b) \\ = \left(\frac{x}{b} + \frac{y}{b}\right)^n \gamma_n\left(\frac{xy}{x+y}, a, b\right);$$

$$(2) \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \frac{\Gamma(2-a-n-r)}{\Gamma(4-2a-2n-2r)} \left(\frac{x}{b}\right)^r \gamma_r(x, a, b) = \frac{\Gamma(2-a-n)}{\Gamma(4-a-2n)} \gamma_{2n}(x, 2a-2, b);$$

$$(3) \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{\Gamma(2-a)}{\Gamma(2-a-r)} \left(-\frac{2x}{b}\right)^r \gamma_r\left(\frac{x}{2}, a, b\right) = \gamma_{2n}(x, a-2n, b);$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(1-a-2n+2r) \Gamma(1-a-2n+r)}{r! [(n-r)! \Gamma(2-a-n+r)]^2} [\gamma_{n-r}(x, a, b)]^2 \\
 & = [(n!)^2 \Gamma(2-a)]^{-1} \gamma_{2n}(x, a-2n, b); \\
 (5) \quad & \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{(1+\alpha; r)(1-a-\alpha-n-r; r)(1-a-2r)}{(1-a-n-r; n+1)} \gamma_r(x, a, b) = \gamma_n(x, 1+a+\alpha, b).
 \end{aligned}$$

Vgl. L. Toscano, dies. Zbl. **67**, 295; H. L. Krall und O. Frink dies. Zbl. **31**, 297; Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, Higher transcendental functions, II (dies. Zbl. **52**, 295) S. 10; F. Braffman, dies. Zbl. **51**, 305. *O. Volk.*

Popov, Blagoj S.: On ultraspherical polynomials. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **14**, 105—108 (1959).

Partendo della rappresentazione degli polinomi ultrasferici mediante le funzioni ipergeometriche, si stabilisce la formola di composizione di quelli polinomi, che oltre di generalizzare la di Neumann-Adams relativa al prodotto di due polinomi di Legendre, permette dedurre quella che da il prodotto di due funzioni associate di Legendre di grado e ordine diverso. La formola ottenuta si presta agevolmente alla valutazione

della integrale $\int_{-1}^{+1} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) P_m^{(\beta, \beta)}(x) dx$ che include come casi particolari quelli delle forma $\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) dx$ e $\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) dx$, che alla sua volta, si riducono, quando $\alpha = 0$, ad altre già conosciute. *J. M^a. Orts.*

Carlitz, Leonard: A generating function for the product of two ultraspherical polynomials. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **14**, 6—9 (1959).

Verf. stellt neben die von Watson (dies. Zbl. **7**, 411) gefundene Erzeugende des Produkts zweier Gegenbauerscher Polynome

$$\begin{aligned}
 & 2^{2\nu-1} [\Gamma(\nu)]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! (n+\nu)}{\Gamma(n+2\nu)} z^n C_n^\nu(\cos \alpha) C_n^\nu(\cos \beta) \\
 & = \int_0^\pi \frac{\nu (1-z^2) \sin^{2\nu-1} \omega d\omega}{[1-2z(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \omega) + z^2]^{\nu+1}}, \quad \text{in der } |z| < 1, \Re \nu > 0,
 \end{aligned}$$

eine zweite, neue, nämlich — mit denselben Einschränkungen —

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2^{2\nu-1} [\Gamma(\nu)]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+2\nu)} z^n C_n^\nu(\cos \alpha) C_n^\nu(\cos \beta) \\
 & = \int_0^\pi \frac{\sin^{2\nu-1} \omega d\omega}{\{1-2z[\cos(\alpha+\beta) + (1-\cos \omega) \sin \alpha \sin \beta] + z^2\}^\nu}
 \end{aligned}$$

und berechnet das Integral I rechts mit Hilfe der Gaußschen Reihe zu

$$(2) \quad I = \frac{2^{2\nu-1} [\Gamma(\nu)]^2}{\Gamma(2\nu)} [1-2z \cos(\alpha+\beta) + z^2]^{-\nu} F\left[\nu, \nu; 2\nu; \frac{4z \sin \alpha \sin \beta}{1-2z \cos(\alpha+\beta) + z^2}\right].$$

Der Sonderfall $\alpha = \beta$ dieser Formel gibt für $[\Gamma(2\nu) n! C_n^\nu(x) / \Gamma(n+2\nu)]^2$ eine höhere hypergeometrische Reihe, mit $\nu = 1/2$ also für $[P_n(x)]^2$. Ist $\beta = \pi/2 - \alpha$, so erhält man aus einer mit (1), (2) gleichwertigen Formel

$$\begin{aligned}
 & \frac{n!}{\Gamma(n+2\nu)} C_n^\nu(\cos \alpha) C_n^\nu(\sin \alpha) \\
 & = \frac{1}{[\Gamma(\nu)]^2} \sum_{2s \leq n} (-1)^s \frac{\Gamma(n-s+\nu) \Gamma(n-2s+\nu)}{s! (n-2s)! \Gamma(n-2s+2\nu)} (2 \sin 2\alpha)^{n-2s}.
 \end{aligned}$$

L. Koschmieder.

Weisner, Louis: Generating functions for Hermite functions. Canadian J. Math. **11**, 141—147 (1959).

Questa ricerca segue un procedimento già usato precedentemente dall'A. (questo Zbl. 67, 294). Se x ed n sono numeri complessi le funzioni di Hermite generalizzate, definite dalla relazione

$$H_n(x) = 2^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) x^k}{\Gamma((1-n+k)/2)}$$

soddisfano l'equazione (1) $d^2v/dx^2 - 2x dv/dx + 2nv = 0$ che ammette l'altra soluzione $h_n(x) = e^{x^2} H_{-n-1}(ix)$. Se $v_n(x)$ soddisfa la (1), la funzione $u = y^n v(x)$ annulla l'operatore $L = \partial^2/\partial x^2 - 2x \partial/\partial x + 2y \partial/\partial y$ e questo operatore L è legato al gruppo continuo di Lie generato dalle cinque operazioni $A = y \partial/\partial y$, $B = y^{-1} \partial/\partial x$, $C = y(-\partial/\partial x + 2x)$, $B_2 = \frac{1}{2} y^{-2} (x \partial/\partial x - y \partial/\partial y)$, $C_2 = -\frac{1}{2} y^2 (x \partial/\partial x + y \partial/\partial y + 1 - 2x^2)$ dalle relazioni $-L = CB - 2A$, $-x^2 L = 4C_2 B_2 - A^2 + A$, $4B_2 = B^2 - y^{-2} L$, $4C_2 = C^2 - y^2 L$. Partendo da funzioni che annullano simultaneamente l'operatore L e l'operatore lineare $r_1 A + r_2 B + r_3 C + r_4 B_2 + r_5 C_2 + r_6$, dove r_1, \dots, r_6 sono costanti, l'A. ritrova alcune funzioni generatrici delle funzioni $H_n(x)$ e varie altre nuove.

G. Sansone.

Weisner, Louis: Generating functions for Bessel functions. Canadian J. Math. 11, 148—155 (1959).

Il metodo dell'A. già usato nella memoria precedente per le funzioni di Hermite è ora applicato all'operatore

$$L = x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y^2} - y \frac{\partial}{\partial y} + x^2 = \left(x \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + x^2$$

che si annulla operando sulla funzione $u(x, y) = v(x) y^2$ ove $v(x) = J_n(x)$ è la funzione di Bessel di ordine n soluzione dell'equazione

$$x^2 d^2v/dx^2 + x dv/dx + (x^2 - n^2)v = 0.$$

Il gruppo di Lie a tre parametri generato dalle tre operazioni

$$A = y \partial/\partial y, B = y^{-1} \partial/\partial x + x^{-1} \partial/\partial y, C = -y \partial/\partial x + x^{-1} y^2 \partial/\partial y$$

è legato all'operatore L dalla relazione $-x^2 L = BC - 1$. La ricerca delle funzioni che annullano simultaneamente L e un operatore lineare, o un operatore della forma

$A(B-C) + \frac{1}{2}(B+C) + 4\alpha - 1$, $B^2 + 8CA + 4C$, $A^2 + \alpha(2CA + C) + \beta C^2 - \nu^2$ conduce l'A. a ritrovare la classica formula generatrice delle funzioni di Bessel di ordine intero

$$e^{\frac{1}{2}x(y-y^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) y^n$$

e molte altre ancora.

G. Sansone.

Chapaev, M. M.: Die Entwicklung von hypergeometrischen und ausgearteten hypergeometrischen Funktionen in Reihen nach Besselschen Funktionen. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 13, Nr. 5, 17—22 (1959) [Russisch].

The purpose of the work is to investigate the development of the hypergeometric functions $F(a, c, z)$ into a series of Bessel functions. The author begins with the integral representation of a hypergeometric function containing an exponential term, which is expanded into a series. After some manipulations this leads to a representation of a hypergeometric function in terms of an infinite double series of Bessel functions. It is shown that the above development is valid asymptotically when $a \rightarrow \infty$. Next, the author shows that the solution of a Chebyshev-Hermite equation $H'' - 2zH' + 2\lambda H = 0$ is related to a hypergeometric function and can be developed in a series of Bessel functions. Application of a Laplace transform to a hypergeometric equations having parameters (a, b, c) leads to a hypergeometric function $F(a, b, c, z)$ which is representable in terms of a double series of "degenerated"

hypergeometric functions. In the last section the author discusses the relation between the hypergeometric and Bessel functions. It is shown that the equation $z w'' + (c - z) w' - a w = 0$ leads to a few other equations. A substitution $w = z^{(1-c)/2} u$, $z = \tau^2/4 a$, $c - 1 = \nu$, $1/2 a = \varepsilon$, and next a differentiation with respect to ε with $\partial u / \partial \varepsilon = y$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $u \rightarrow I_\nu$ (Bessel function) leads to the equation

$$y'' + \tau^{-1} y' - (1 + \nu^2/\tau^2) y = \tau I'_\nu - \nu I_\nu.$$

A few similar transformations of this kind are shown, demonstrating the correlation between hypergeometric and Bessel forms.

M. Z. v. Krzywoblocki.

Meligy, A. S.: Expansions for the logarithmic-integral and cosine-integral functions. *Proc. roy. Irish Acad., Sect. A* 59, 25—28 (1958).

Der Integrallogarithmus wird in bekannter Weise durch zwei $W_{k,m}$ -Funktionen dargestellt und die letzteren durch Reihenentwicklungen nach $M_{k,m}$ -Funktionen. Setzt man in die so gewonnene Darstellung die Slatersche Entwicklung der $M_{k,m}$ -Funktionen nach modifizierten Besselfunktionen ein, so ergibt sich eine Entwicklung des Integrallogarithmus nach modifizierten Besselfunktionen mit dem Argument $\log z$. Auf die gleiche Weise erhält man eine ähnliche Entwicklung für den Integralkosinus.

E. Kreyszig.

Meligy, A. S.: On Whittaker functions. *J. London math. Soc.* 33, 456—457 (1958).

Es wird für die konfluente hypergeometrische Funktion Whittakers, die ganze transzendente Funktion $M_{k,m}$, eine Reihenentwicklung hergestellt, deren einzelne Glieder selbst wieder diese Funktionen enthalten, und zwar in der Art, daß nacheinander in diesen Gliedern die Funktionen $M_{\alpha, m+\frac{1}{2}p}$ mit $p = 0, 1, 2, \dots$ auftreten. Der andere, vordere Index α dieser Funktion ist willkürlich. Um diese Entwicklung zu gewinnen, ist nur nötig, von einer bekannten Darstellung der Funktion $M_{k,m}$ durch ein Umlaufintegral auszugehen und in dem Integranden $(-t)^{-1-2m}(1+z/t)^{-\frac{1}{2}-m+k}e^{-t}$ den Faktor $(1+z/t)^k$ durch den Faktor $(1+z/t)^\alpha \cdot (1+z/t)^{k-\alpha}$ zu ersetzen und nunmehr den hinteren Faktor nach Potenzen von (z/t) $(1+z/t)^{-1/2}$ zu entwickeln. Von der Funktion $M_{k,m}$ gelangt man bekanntlich leicht zur Coulombschen Wellenfunktion, indem man $k = i\eta$, $z = i\xi$ und $\alpha = i\lambda$ setzt.

H. Buchholz.

Ragab, F. M.: An expansion involving confluent hypergeometric functions. *Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser.* 6, 52—54 (1958).

Es wird, in Anwendung der Integraldarstellung

$$E(\alpha, \beta; : z) = \Gamma(\alpha) z^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda^{\beta-1} (1+\lambda)^{-\alpha} d\lambda,$$

$\Re(\beta) > 0$, $\Re(z) > 0$, die Entwicklung bewiesen:

$$\frac{\Gamma(\beta) \Gamma(\alpha - \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma) \Gamma(\beta + \gamma)} E(\alpha - \gamma, \beta + \gamma; : z)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\gamma; r) z^{-2r}}{r! \Gamma(\alpha + r) \Gamma(\gamma + r)} E(\alpha + r, \beta + r; : z) E(\gamma + r, \alpha - \beta - \gamma + r; : z),$$

$z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$.

O. Volk.

Ragab, F. M.: Expansion of an E -function in a series of products of E -functions. *Proc. Glasgow math. Assoc.* 3, 194—195 (1958).

Beweis der Formel:

$$\Gamma(\delta - \alpha) \Gamma(\delta - \beta) \Gamma(\alpha + \beta - \delta) [\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)]^{-1} E(\alpha, \beta, \gamma; \delta; z) \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{-2r}}{r! \Gamma(\gamma + r)} E(\gamma + r, \alpha + \beta - \delta + r; : z) E\left(\gamma + r, \delta - \alpha + r, \delta - \beta + r; z\right),$$

$|\arg z| < \pi$, $z \neq 0$, $\Re(\alpha + \beta) > \Re(\delta) > \Re(\alpha) > 0$, $\Re(\delta - \beta) > 0$. O. Volk.

MacRobert, T. M.: Integrals involving hypergeometric functions and E -functions. Proc. Glasgow math. Assoc. 3, 196—198 (1958).

Es werden Integrale der Form ausgewertet:

$$\int_0^1 \lambda^j (1-\lambda)^k F(a, b, c; \lambda) E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; z f(\lambda)) d\lambda,$$

wo $|\text{ampl } z| < \pi$, $f(\lambda) = \lambda^{-l}$ (bei 1. u. 3.) bzw. $\lambda^{-l}(1-\lambda)^{-l}$ (bei 2. u. 4.) ist, l, n positiv und ganz und $j, k, a, b, c, \alpha_r, \varrho_s$ gegeben sind durch:

1. $j = \alpha - 1$, $k = \varrho - \alpha - 1$; $a = -n$, $b = \beta$, $c = \alpha + \beta - \varrho - n + 1$;
 $\alpha_{p+1+\nu} = (\alpha + \nu)/l$, $\alpha_{p+l+1+\nu} = (\varrho - \beta + n + \nu)/l$, $\varrho_{q+1+\nu} = (\varrho - \beta + \nu)/l$,
 $\varrho_{q+l+1+\nu} = (\varrho + n + \nu)/l$, $\nu = 0, 1, \dots, l-1$; $\Re(\varrho) > \Re(\alpha) > 0$;
2. $j = \gamma - 1$, $k = \gamma - 1$, $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1)$; $\alpha_{p+1+\nu} = (\alpha + \nu)/l$,
 $\alpha_{p+l+1+\nu} = (\gamma - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2} + \nu)/l$, $\varrho_{q+1+\nu} = (\gamma - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} + \nu)/l$, $\varrho_{q+l+1+\nu} =$
 $(\gamma - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2} + \nu)/l$, $\nu = 0, 1, \dots, l-1$; $\Re(\gamma) > 0$, $\Re(\gamma - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta) > -\frac{1}{2}$;
3. $j = \gamma - 1$, $k = -\frac{1}{2}$, $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$; $\alpha_{p+1+\nu} = (\gamma + \nu)/l$,
 $\alpha_{p+l+1+\nu} = (\gamma - \alpha - \beta + \frac{1}{2} + \nu)/l$, $\varrho_{q+1+\nu} = (\gamma - \alpha + \frac{1}{2} + \nu)/l$,
 $\varrho_{q+l+1+\nu} = (\gamma - \beta + \frac{1}{2} + \nu)/l$, $\nu = 0, 1, \dots, l-1$; $\Re(\gamma) > 0$;
4. $j = \beta - 1$, $k = \beta - \varrho$, $a = \alpha$, $b = 1 - \alpha$, $c = \varrho$; $\alpha_{p+1+\nu} = (\beta + \nu)/l$,
 $\alpha_{p+l+1+\nu} = (\beta - \varrho + 1 + \nu)/l$, $\varrho_{q+1+\nu} = (\beta + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2} + \nu)/l$, $\varrho_{q+l+1+\nu} =$
 $(\beta - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\varrho + 1 + \nu)/l$, $\nu = 0, 1, \dots, l-1$; $\Re(\beta) > 0$, $\Re(\beta - \varrho) > -1$.

O. Volk.

Wintner, Aurel: On Heaviside's and Mittag-Leffler's generalizations of the exponential function, the symmetric stable distributions of Cauchy-Lévy, and a property of the Γ -function. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 38 (offert en hommage à M. Fréchet), 165—182 (1959).

Die Arbeit betrifft die verallgemeinerten Exponentialfunktionen

$$e_\lambda(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{\Gamma(\lambda + n + 1)}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad 0 < x < \infty$$

und

$$E_\lambda(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{\Gamma(1 + \lambda n)}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad -\infty < x < 0.$$

Der Zusammenhang zwischen $E_\lambda(x)$ und der Cauchy-Lévy'schen Verteilungsfunktion

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-t^\lambda) \cos x t dt, \quad 0 < \lambda \leq 2, \quad 0 < x < \infty$$

wird näher untersucht. Es ergibt sich, daß das Stieltjes-Momentenproblem

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda n+1)} = \int_0^\infty t^n d\varphi_\lambda(t), \quad n = 0, 1, \dots, d\varphi_\lambda(t) \geq 0,$$

für jedes λ in $(0, 1)$ eine monotone Lösung $\varphi_\lambda(t)$ besitzt. Schließlich wird ein direkter Beweis dieser Eigenschaft der Gammafunktion angegeben, bei dem diskrete unendliche Konvolutionen benutzt werden.

E. Kreyszig.

Ragab, F. M.: A formula similar to Barnes' lemma. Ann. Polon. math. 5, 149—152 (1958).

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s) \Gamma(a-s) \Gamma(b-s) \Gamma(p-s) \Gamma(a-p+s) \Gamma(b-p+s) (-1)^s ds$$

$$= \frac{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(a-p/2) \Gamma(b-p/2) \Gamma((a+b-p)/2) \Gamma((1+a+b-p)/2) \Gamma(p/2)}{2^{2+p-a-b} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(a+b-p/2) \exp(-i\pi p/2)},$$

wobei die Realteile von $a, b, p, a-p$ und $b-p$ positiv sind und der Integrationsweg ähnlich wie bei dem bekannten Barnes-Integral zu wählen ist.

E. Kreyszig.

Funktionentheorie:

• Knopp, Konrad: Elemente der Funktionentheorie. (Sammlung Götschen Bd. 1109.) 5. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1959. 144 S. mit 23 Fig. DM 3,60.

Bishop, Errett: Some theorems concerning function algebras. Bull. Amer. math. Soc. 65, 77—78 (1959).

Soit A une algèbre de Banach de fonctions continues (à valeurs complexes) définies sur un espace compact métrisable C (la norme étant la norme usuelle), telle que pour tout couple de points $x \neq y$, $x, y \in C$ il existe $f \in A$ avec $f(x) \neq f(y)$. L'A. introduit la notion de frontière minimale de A : c'est l'ensemble minimal M (non nécessairement fermé) tel que pour chaque $f \in A$ il y ait un $x \in M$ tel que $f(x) = \|f\|$. L'adhérence \bar{M} de M est la frontière de Šilov. A l'aide de cette notion il énonce le résultat important suivant. Si C est un compact à l'intérieur vide du plan complexe la condition nécessaire et suffisante que toute fonction continue à valeur complexes (resp. réelles) sur C puisse être approchée uniformément par des fonctions rationnelles (resp. par les parties réelles de fonctions rationnelles) à pôles dans $-C$ est que la frontière minimale M de A coïncide avec C (ou, autre condition équivalente que $C - M$ soit de mesure Lebesgue nulle). On ne donne aucune démonstration: tous ces résultats sont démontrés de façon détaillée dans un article ultérieur paru au Pacific J. Math. 9, 629—642 (1959). G. Gussi.

Chen, Kien-kwong: Generalizations of Minkowski's inequality with applications to the theory of mean approximation by integral functions. Science Record, n. Ser. 2, 81—85 (1958).

Let $\varphi(t)$ be convex for $t > 0$, $\varphi(+0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$. Let $f(z)$, $g(z)$ and $p(z) > 0$ be functions defined on a domain K_ϱ of index ϱ , $\varrho \geq \frac{1}{2}$ (for the definition of index of a domain in the complex plane see this Zbl. 82, 289). If the number $\|f(z)\|_\varphi = T$ determined by $\varphi(T) = \iint_{K_\varrho} p(z) \varphi(|f(z)|) dx dy$ is finite, f is said to be integrable

$L_\varphi(K_\varrho)$ with weight $p(z)$ where $\iint_{K_\varrho} p(z) dx dy = 1$. If $\varphi'' > 0$, $(\varphi'/\varphi)'' \leq 0$,

$(\varphi'/\varphi)'' \geq 0$ and $(\varphi'/\varphi)' \leq 0$, then it can be shown that $\|cf\|_\varphi \leq c \|f\|_\varphi$ for $0 < c < 1$ and $\|f+g\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$ which is the generalized Minkowski's inequality of the title. For $f \in L_\varphi(K_\varrho)$, the number

$$\omega(\delta; f, K_\varrho)_\varphi = \max_{|h| \leq \delta} \|f(z+h) - f(z)\|_\varphi$$

is called the φ -modulus of continuity of f on K_ϱ with weight $p(z)$, it being understood that $f(z+h) - f(z) = 0$ for $z+h \notin K_\varrho$. Let $G_\sigma^{(\varphi)}$ denote the class of all integral functions of order ϱ and type $\sigma > 0$ and when $\sigma = 0$ let it denote all functions of order not exceeding ϱ and of order ϱ and minimal type. Let $E(f, K_\varrho)_\varphi = \min_{g \in G_\varrho^{(\varphi)}} \|f(z) - g(z)\|_\varphi$ be the φ -degree of approximation. The

author proves several results relating the modulus of continuity and the degree of approximation defined above. The following is a typical result. Let the positive valued function $\Omega(t)$ be such that $0 < t \Omega'(t)/\Omega(t) = O(1)$, $\Omega(t) = O(t^q)$, $q \geq 0$ as $t \rightarrow \infty$ and $\Omega(+0) = 0$. Let K_1 be $(-\infty, \infty)$. If $f(x) = O(|x|^q)$ as $|x| \rightarrow \infty$ and $\omega(\delta; f, K_1)_\varphi < \Omega(\delta)$ then $E_\sigma^{(1)}(f; K_1)_\varphi \leq c \Omega(1/\sigma)$, c being a suitable constant.

V. Ganapathy Iyer.

Carleson, Lennart: An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math. 80, 921—930 (1958).

Theorem. Let $\{z_\nu\}$ be a sequence of complex numbers, $0 < |z_\nu| < 1$. Then the interpolation problem, $f(z_\nu) = w_\nu$, $f(z)$ bounded analytic in $|z| < 1$, is solvable for arbitrary bounded w_ν if and only if

$$\prod_{\nu \neq \mu} |(z_\nu - z_\mu)/(1 - \bar{z}_\nu z_\mu)| \geq \delta > 0, \quad \mu = 1, 2, \dots$$

This theorem, of a more explicit nature than R. Nevanlinna's classical result [Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 13, No. 1 (1920)], is proved and then an application to the ideal structure in the algebra of bounded analytic functions is given.

N. A. Bowen.

Kreyszig, Erwin and John Todd: On the radius of univalence of the function

$\exp z^2 \int_0^z \exp(-t^2) dt$. Pacific J. Math. 9, 123—127 (1959).

Es wird gezeigt, daß der früher [W. Lash Miller and A. R. Gordon, J. Phys. Chem. 35, 2785—2884 (1931)] berechnete Wert $y = \rho = 0,924 \dots$, für den

$$\operatorname{Im} \left(\exp(z^2) \int_0^z \exp(-t^2) dt \right)$$

als Funktion von $z = 0 + iy$ sein Maximum annimmt, der Radius des größten Kreises ist, in dem die betrachtete Funktion schlicht ist.

D. Morgenstern.

Srivastav, R. P.: On zeros, poles and mean value of meromorphic functions. Compositio math. 13, 219—228 (1958).

Im ersten Teil der Arbeit werden für meromorphe Funktionen $f(z)$ der Ordnung $\rho \in (0, \infty)$ einige Relationen zwischen den Größen $n(r; a)$, $N(r; a)$, $T(r)$ (mit den üblichen Bezeichnungen) bewiesen. Bezeichnet T bzw. t den \lim bzw. \liminf von $N(r; a)/r^\rho$, c bzw. d die entsprechenden Grenzwerte für $n(r; a)/r^\rho$, so gelten die Ungleichungen: $d \leq (c/e) e^{d/c} \leq \rho T \leq c$, $d \leq \rho t \leq d(1 + \log(c/d)) \leq c$, $c + d \leq e \rho T$, $e \rho t \leq \rho T + e d$, $c + \rho t \leq e \rho T$. Ist ferner $f(0) \neq 0$ und $|f(re^{i\theta})| > 1$ für $r = r_1, r_2$, so gilt $n(r_1; 0) \log(r_2/r_1) \leq T(r_2) - T(r_1) \leq n(r_2; 0) \log(r_2/r_1)$. — Der 2. Teil enthält u. a. die Sätze: 1. Ist $\rho < 1$ und sind alle Nullstellen und Pole von $f(z)$ negativ reell, so folgt aus $n(r; 0) - n(r; \infty) \sim \lambda \cdot r^\rho$ die Darstellung $f'/f \sim \lambda \cdot x^{\rho-1} \pi \rho \operatorname{cosec} \pi \rho$. 2. Ist $\rho < 2$, $f(z)$ reell für reelles z , alle Nullstellen a_n und Pole b_n positiv reell sowie $a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n+1}$, so sind alle Nullstellen von f' in der Halbebene $\Re z < \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ reell. — Im 3. Teil werden einige Eigenschaften der Funktion $C(r, f) = m(r; \infty) + m(r; 0)$ in Analogie zur Charakteristik $T(r, f)$ untersucht. Jedoch ist die behauptete Relation $O(r, f) = C(r, f - a) + O(1)$ (und die daraus fließende Folgerung) offenbar unrichtig.

P. Seibert.

Belinskij (Belinsky), P. P.: The use of the variation method in solving extremum problems of quasiconformal mappings. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 199—201 (1958) [Russisch].

Let $h(z) = (p(z) - 1)/(p(z) + 1)^{-1} \exp\{2i\theta(z)\}$ ($1 \leq p(z) \leq q$) be the complex characteristic of the q -quasiconformal function $w(z)$, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, which maps $|z| \leq 1$ onto $|w| \leq 1$. The totality of such functions $w(z)$ will be denoted by (q) . Write $w_n = w(z_n)$ for $w(z) \in (q)$ with $|z_n| < 1$, and let $F(z_1, \dots, z_k; w_1, \dots, w_k)$ be real valued and continuously differentiable with respect to w_1, \dots, w_k . The author proves that there exists a unique function $w(z) \in (q)$ which maximizes $F(z_1, \dots, w_k)$, by fixing $z_n \in |z| < 1$. The proof is based upon the author's and Pesin's variation method sketched in Doklady Akad. Nauk SSSR 102, 865—866 (1955). Employing the variation method the author proves that (a) if $w(z) \in (q)$, $q = 1 + \varepsilon$, then

$$(1) \quad |w(z) - z| \leq \varepsilon M = \varepsilon \frac{8}{\pi} \int_0^1 K(r^2) dr \approx 4,5 \varepsilon,$$

$K(t)$ being the complete elliptic integral of the first kind, the constant M is not allowed to be replaced by a smaller one; and that (b) if $|z_1 - z_0| = |z_2 - z_0| < 1 - |z_0|$, then

$$(2) \quad \left| \arg \frac{w(z_1) - w(z_0)}{w(z_2) - w(z_0)} - \arg \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right| < \varepsilon M$$

holds for $w(z) \in (1 + \varepsilon)$, M is defined in (1) and is the best possible constant for (2). Unfortunately the author's statement about the estimation for $|w(z_1) - w(z_0)|/|w(z_2) - w(z_0)|$ is not clear enough to be reviewed. It is worthwhile to add that Sia Dao-shing, in the place of (1), establishes

$$\sup_{w(z) \in (q), q > 1} \frac{|w(z) - z|}{\log q} = \frac{1}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4 = 4,4 \dots,$$

in Science Record, n. Ser. 3, 400—407 (1959), by applying the method of parametric representation of $w(z) \in (q)$.

Chen Kien-Kwong.

Bergman, Stefan: A class of quasi-pseudo-conformal transformations in the theory of functions of two complex variables. J. Math. Mech. 7, 937—956 (1958).

On sait qu'un domaine de Reinhardt quelconque \Re (de l'espace C^2 rapporté aux coordonnées Z_1, Z_2) ne peut pas être mis en correspondance pseudo-conforme (c'est-à-dire définie par Z_1, Z_2 fonctions holomorphes de z_1, z_2 et vice-versa) avec une boule r (de l'espace C^2 rapporté aux coordonnées z_1, z_2). L'A. construit, de la façon suivante, une correspondance T , d'une autre nature, dite quasi-pseudo-conforme, entre r et un domaine de Reinhardt \Re dont l'image, dans le plan rapporté aux coordonnées $R_1 = |Z_1|$, $R_2 = |Z_2|$, est un ensemble convexe \mathcal{Q} : soient \mathcal{I} le secteur image de r dans le plan rapporté aux coordonnées $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, et $R_1 + iR_2 = g(r_1 + ir_2)$ la correspondance conforme entre \mathcal{I} et \mathcal{Q} dans laquelle le segment de droite commun à \mathcal{I} et à l'axe $r_k = 0$ a pour image le segment de droite commun à \mathcal{Q} et à l'axe $R_k = 0$ ($k = 1, 2$); la transformation T est alors définie par $R_1 + iR_2 = g(r_1 + ir_2)$, $\arg Z_k = \arg z_k$ ($k = 1, 2$). L'essentiel du travail est un calcul montrant, moyennant certaines conditions simples sur la frontière de \mathcal{Q} , que le rapport des longueurs non-euclidiennes (définies à partir de la fonction noyau) de deux éléments homologues par T reste compris entre deux nombres fixes quand ces éléments s'approchent des frontières de r et \Re .

M. Hervé.

Hitotumatu, Sin: On quasi-conformal functions of several complex variables. J. Math. Mech. 8, 77—94 (1959).

Définitions. — Une fonction $f(z)$, définie sur un domaine D du plan complexe, est dite „quasi-conforme, sur D , avec dilatation K “ (en abrégé K -Q. C.) si elle est continûment différentiable sur D et vérifie, en chaque point de D , la condition (1) $|\partial f/\partial \bar{z}| \leq [(K-1)/(K+1)] |\partial f/\partial z|$, où $K = \text{const} \geq 1$. Une fonction $f(z_1, \dots, z_n)$, définie sur un domaine D de l'espace C^n , est dite „quasi-conforme par disques, sur D , avec dilatation K “ (en abrégé K -D. Q. C.) si elle est continûment différentiable sur D et si (2) chaque fois que les constantes complexes a_i, b_i sont telles que, pour $|t| < 1$, le point de coordonnées $a_i t + b_i$ soit dans D , alors la fonction composée $f(a_1 t + b_1, \dots, a_n t + b_n)$ est K -Q. C. sur $|t| < 1$. Propriétés des fonctions K -D. Q. C. — A. Si f est K -D. Q. C. sur D , et si les fonctions $\varphi_i(t)$, holomorphes pour $|t| < 1$, sont telles que, pour $|t| < 1$, le point de coordonnées $\varphi_i(t)$ soit dans D , alors la fonction composée $f[\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]$ est K -Q. C. sur $|t| < 1$. — Par suite, la notion de fonction K -D. Q. C. est conservée par une transformation analytique portant sur les variables z_i . B. Si f est K -D. Q. C. sur D , en tout point de D (dit „ordinaire“) où les dérivées partielles $\partial f/\partial z_i$ ne sont pas toutes nulles, on a

$$(3) \partial \bar{f}/\partial z_i = k(z_1, \dots, z_n) \partial f/\partial z_i, \quad (4) |k| \leq (K-1)/(K+1),$$

où la fonction k , indépendante de l'indice i , est appelée „fonction caractéristique de f “. — Par suite, si $f(z_1, z_2)$ est K -D. Q. C. sur un domaine D de l'espace C^2 , un ensemble $f = \text{const}$ est analytique au voisinage de chacun de ses point ordinaires. C. Réciproquement, si la fonction $k(z_1, \dots, z_n)$, continue sur D , vérifie (4) en chaque point de D , et si la fonction $f(z_1, \dots, z_n)$, continûment différentiable sur D , vérifie (3) en chaque point de D , alors f est K -D. Q. C. sur D . Discussion de la notion de fonction K -D. Q. C. — Les fonctions K -D. Q. C. sur un domaine D ne forment pas un espace vectoriel sur le corps complexe; même celles qui ont une fonction

caractéristique donné forment seulement un espace vectoriel sur le corps réel. Par suite, les applications de C^n dans C^n , réalisées par n fonctions K -D. Q. C., dépendent du choix des coordonnées et n'ont pas de caractère intrinsèque; en outre elles ne forment pas un groupe. L'A. montre enfin que l'application d'une boule dans un domaine de Reinhardt, récemment construite par S. Bergman (v. le rapport précédent) sous le nom de „quasipseudo-conforme“, n'est pas en général réalisée par des fonctions K -D. Q. C. Note du Réf. — Il n'a pas compris pourquoi les fonctions K -Q. C. non constantes définissent des transformations intérieures du plan complexe, au sens de Stoilow, ni, par conséquent, pourquoi elles satisfont au principe du maximum.

M. Hervé.

Epstein, Bernard: The kernel-function and conformal invariants. J. Math. Mech. 7, 925—936 (1958).

D étant un domaine du plan complexe, soit H_D (resp.: H'_D) l'espace de Hilbert formé des fonctions holomorphes (donc uniformes) sur D , qui $\in L^2(D)$ (resp.: et dont les primitives sont uniformes sur D). Chaque fonction-noyau K (resp.: K'), somme des carrés des modules d'une suite de fonctions formant une base orthonormale de H_D (resp.: H'_D), donne naissance à des invariants conformes, par exemple la courbure de la métrique invariante $ds^2 = K(z)|dz|^2$: $C = -\frac{1}{2} \Delta(\log K)/K$, et de même C' , $\gamma = \Delta(\log |C|)/K$, et de même γ' (Δ désignant le laplacien). L'A. montre que le module d'un domaine D doublement connexe est déterminé, soit par les valeurs, en un point donné de D , des invariants conformes C' et γ' , soit par la limite, à la frontière de D , d'une expression convenablement construite avec C' et γ' . Les calculs reposent, malheureusement, sur l'expression de K' , pour D doublement connexe, à l'aide des fonctions elliptiques \wp et ζ de Weierstrass, de sorte que la méthode ne s'applique pas aux domaines dont l'ordre de connexion dépasse 2.

M. Hervé.

Look, K. H.: An analytic invariant and its characteristic properties. Science Record, n. Ser. 1, 307—310 (1957).

Die Arbeit bringt eine Zusammenfassung von Ergebnissen der nachstehend besprochenen Arbeit desselben Verf.

F. Kambartel.

Look, K. H.: Schwarz Lemma and analytic invariants. Sci. Sinica 7, 453—504 (1958).

Sei D ein beschränktes, schlichtes, transitives Gebiet im Raum der n komplexen Variablen $z = (z_1, \dots, z_n)$ und $K(z, \bar{z})$ sein Bergmanscher Kern. $T(z, \bar{z})$ bezeichne die Matrix der

$$T_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z}) = \partial^2 \log K(z, \bar{z}) / \partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n.$$

Für die Bergman-Metrik

$$ds^2(z, \bar{z}) = dz T(z, \bar{z}) d\bar{z}' \quad \text{mit } dz = (dz_1, \dots, dz_n)$$

von D gilt dann (Satz 3): Ist $w = f(z)$ eine holomorphe innere Abbildung von D , so gibt es eine positive Konstante k , die nur von D abhängt, so daß die Relation besteht: $ds^2(w, \bar{w}) \leq k^2 ds^2(z, \bar{z})$. Das kleinste positive k mit dieser Eigenschaft wird die Schwarzsche Konstante $k_0(D)$ genannt. $k_0(D)$ ist analytisch invariant (Lemma 2). In subtiler Rechnung werden die Schwarzschen Konstanten für die irreduziblen klassischen Cartanschen Gebiete (s. E. Cartan, dies. Zbl. 11, 123) abgeleitet. Für die Hyperkugel S erhält man $k_0(S) = 1$, für den Polyzylinder P_n ergibt sich $k_0(P_n) = \sqrt[n]{n}$. Da für topologische Produkte $R = R' \times R''$ klassischer Cartanscher Gebiete die Relation $k_0^2(R) = k_0^2(R') + k_0^2(R'')$ gilt, lassen sich die Schwarzschen Konstanten aller klassischen Cartanschen Gebiete rekursiv berechnen. Ist

$$R_{\lambda\alpha\beta\bar{\mu}}(z, \bar{z}) = -\frac{\partial^2 T_{\alpha\lambda}(z, \bar{z})}{\partial z_\beta \partial \bar{z}_\mu} + \sum_{\gamma, \nu=1}^n \frac{\partial T_{\alpha\nu}(z, \bar{z})}{\partial z_\beta} T^{\nu\gamma}(z, \bar{z}) \frac{\partial T_{\gamma\lambda}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_\mu},$$

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, \dots, n,$$

der Hermitesche Krümmungstensor von D und

$$w(z, \bar{z}; u, \bar{u}) = \sum_{\alpha, \beta, \lambda, \mu=1}^n R_{\lambda\alpha\beta\bar{\mu}}(z, \bar{z}) \bar{u}_{\lambda} u_{\alpha} u_{\beta} \bar{u}_{\mu} \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^n T_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) u_{\alpha} \bar{u}_{\beta} \right)^2$$

die Hermitesche Krümmung von D in $z \in D$ mit $u = (u_1, \dots, u_n) \neq 0$, so erhält man in

$$L(D) = \inf_{z \in D, u \neq 0} \omega_D(z, \bar{z}; u, \bar{u}) \text{ und } U(D) = \sup_{z \in D, u \neq 0} \omega_D(z, \bar{z}; u, \bar{u})$$

zwei weitere analytische Invarianten. Man findet (Fundamentalsatz II), daß zwei irreduzible klassische Cartansche Gebiete R und R' genau dann analytisch äquivalent sind, wenn $L(R) = L(R')$ und $k_0(R) = k_0(R')$ gilt. Außerdem gilt für diese Gebiete die Beziehung $U(R) = L(R)/k_0^2(R)$. Die Konstanten $L(R)$ irreduzibler klassischer Cartanscher Gebiete werden berechnet. Für topologische Produkte $R = R' \times R''$ klassischer Cartanscher Gebiete gilt die Relation $L(R) = \min \{L(R'), L(R'')\}$.

F. Kambartel.

Modulfunktionen. Automorphe Funktionen. Fastperiodische Funktionen:

Pjateckij-Šapiro (Pyateckii-Šapiro), I. I.: Singular modular functions. Translat. by Emma Lehmer. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 10, 13—58 (1958).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in diesem Zbl. 70, 78.

Maass, Hans: Über die Verteilung der zweidimensionalen Untergitter in einem euklidischen Gitter. Math. Ann. 137, 319—327 (1959).

Verf. betrachtet ein Problem der Darstellung eines Gitters der Dimension n durch ein Gitter der Dimension m ; das sind Lösungen X der Matrixengleichung $X' A X = B$. Die Unterräume der Dimension n in einem reellen linearen Raum mit der Dimension m bilden eine kompakte Mannigfaltigkeit R_0 . Die Ähnlichkeitsklassen der Gitter der Dimension n bilden eine kompakte Mannigfaltigkeit G_0 . Es seien nun Teilgebiete $R \subset R_0$ und $G \subset G_0$ (mit Riemann meßbarem Inhalt) vorgegeben. Es sei weiter $\alpha_q(S; R, G)$ die Anzahl der n -dimensionalen Gitter S , eingebettet in einen Vektorraum $L(S) \in R$, außerdem möge die Ähnlichkeitsklasse von S zu G gehören, und der Inhalt $|S|$ der Gittermasche unterliege der Bedingung $|S| \leq q$. Im Falle $n = 2$ zeigt Verf.

$$\alpha_q(S; R, G) \sim \frac{I(R) I(G)}{I(R_0) I(G_0)} \frac{(2\pi q)^m}{24 |S|^2 m \Gamma(m-1)} \quad (q \rightarrow \infty).$$

$I(G), \dots$ sind die Inhalte der Mengen G usw., mit passend gewählter Maßbestimmung. Der Beweis benutzt eine Approximation durch charakteristische Funktionen mittels Kugelfunktionen. Zum Studium der zugehörigen Zetafunktionen benützt Verf. eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 82, 66). Die weiteren Überlegungen verlaufen so, wie Roelcke (dies. Zbl. 71, 78) sie im Falle $R = R_0$ angegeben hat.

F. van der Blij.

Tsuji, Ryōhei: On conformal mapping of a hyperelliptic Riemann surface onto itself. Kōdai math. Sem. Reports 10, 127—136 (1958).

Let W be a finite Riemann surface with genus g , having k boundary components and \mathfrak{G} be the group of all conformal mappings of W onto itself. Putting $N(g, k) = \max_w (\text{ord. } \mathfrak{G})$, the values of $N(0, k)$ and $N(1, k)$ have been completely determined by Heins and Oikawa respectively (cf. Oikawa, this Zbl. 72, 77; 73, 68). In the present paper, the author determines the exact value of $N(2, k)$. For this purpose hyperelliptic Riemann surfaces of genus $g (\geq 2)$ are considered. As it is well known a hyperelliptic Riemann surface of genus ≥ 2 is defined by the algebraic equation (1) $y^2 = \prod_{\nu=1}^{2g+2} (x - d_\nu)$, $d_\nu \neq d_\mu$ ($\nu \neq \mu$) and that a closed Riemann surface of genus 2 is always hyperelliptic (cf., e. g., Bliss, Algebraic Functions, New York 1947, pp. 139—143). The method of proof consists of showing that

(i) the x -projection of a transformation $\mathfrak{T} \in \mathfrak{G}$ is an elliptic transformation or the identity map of the x -plane (in the latter case \mathfrak{T} is the involutory map which interchanges two sheets unless it is the identity map); (ii) a finite group G of linear transformations of x -plane which has an invariant point-set (d_1, \dots, d_{2g+2}) is the x -projection of a finite transformation group \mathfrak{G} of W defined by (1) and of order twice that of G . Estimation for $N_h(g, k)$ ($g \geq 3$) is also given. *C. Uluçay.*

Burkill, H.: A note on mean values. *J. London math. Soc.* **34**, 1—4 (1959).

Beweis des Theorems: Wenn $f(x)$ eine C_r -stetige und C_{r-1} P -fastperiodische Funktion ist, dann gibt es ein ξ , für welches

$$f(\xi) = \lim_{X \rightarrow \infty} r X^{-r} \int_0^X (X-x)^{r-1} f(x) dx$$

ist.

O. Perron.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Wintner, Aurel: The Schwarzian derivative and the approximation method of Brillouin. *Quart. appl. Math.* **16**, 82—86 (1958).

Verf. beweist die Gültigkeit der asymptotischen Formeln $y_1 = f^{-1/2} \sin \int_{t_0}^t f dt$, $y_2 = f^{-1/2} \cos \int_{t_0}^t f dt$ für das Fundamentalsystem von Lösungen y_1 und y_2 der Differentialgleichung $y'' + f^2(t)y = 0$ unter den Voraussetzungen: $f(t) > 0$, $f(t) \in C^2$ in (t_0, ∞) und $\int_{t_0}^{\infty} |f^{-1/2} (f^{-1/2})''| dt < \infty$. Im Falle $\int_{t_0}^{\infty} f dt = \infty$ wurde diese Behauptung vom Verf. schon früher bewiesen (dies. Zbl. **29**, 293).

M. Ráb.

Opial, Z.: Nouvelles remarques sur l'équation différentielle $u'' + a(t)u = 0$. *Ann. Polon. math.* **6**, 75—81 (1959).

Diese Abhandlung ist eine Erweiterung früherer Betrachtungen des Verf. und ist Stabilitätsfragen gewidmet. Folgende Sätze werden bewiesen: 1. Es sei die Differentialgleichung (1) $u'' + [a(t) + q(t)]u = 0$ gegeben. Die Funktion $a(t)$ sei positiv und stetig in $J = [0, \infty)$ und strebe monoton gegen Unendlich für $t \rightarrow \infty$; $q(t)$ sei stetig und es gelte (2) $\int_0^{\infty} \frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}} dt < \infty$. Dann sind alle Lösungen von (1) in J beschränkt, und es existiert mindestens eine Lösung von (1) die für $t \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Die Funktion $A(t) = \sqrt{u^2(t) + u'^2(t)/a(t)}$ ist für jede Lösung der Differentialgleichung (1) von endlicher Variation in J . 2. Erfüllen die Funktionen $a(t)$ und $q(t)$ die Voraussetzungen des Satzes 1, ist $\psi(t)$ von endlicher Variation in jedem endlichen Teilintervall von J und erfüllt ψ die Bedingung (3) $\int_0^{\infty} \frac{|d\psi(t)|}{a(t)} < \infty$, dann sind alle Lösungen der Differentialgleichung $u'' + [a(t) + \psi(t) + q(t)]u = 0$ in J beschränkt, und mindestens eine Lösung strebt gegen Null für $t \rightarrow \infty$. Die Voraussetzungen (2) und (3) können nicht durch die Voraussetzungen

$$\int_0^{\infty} \frac{|q(t)|}{[a(t)]^{1+\varepsilon}} dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} \frac{|d\psi(t)|}{[a(t)]^{1+\varepsilon}} < \infty \quad (\varepsilon > 0)$$

ersetzt werden.

M. Ráb.

Atkinson, F. V.: Asymptotic formulae for linear oscillations. *Proc. Glasgow math. Assoc.* **3**, 105—111 (1957).

Durch die Transformation $u = \int_{t_0}^t f^{1/2} dt$ der Differentialgleichung

$$(1) \quad \ddot{x} + [f(t) + g(t)]x = 0 \quad (t \geq t_0)$$

und mit Hilfe eines Ergebnisses von N. Levinson (dies. Zbl. 40, 194) wird folgender Satz bewiesen: Es sei $g(t)$ stetig, $f(t) > 0$, $\dot{f}(t)$ stetig in $J = [t_0, \infty)$ und

$\int_{t_0}^{\infty} |g f^{-1/2}| dt < \infty$. Ist $\dot{f} f^{-3/2} = h(t) + h_1(t)$, wobei $h(t)$ eine Funktion mit stetiger Ableitung bezeichnet, welche die Bedingung $\int_{t_0}^{\infty} |\dot{h}| dt < \infty$, $-4 < h(\infty) < 4$

erfüllt und ist $\int_{t_0}^{\infty} |h_1 f^{1/2}| dt < \infty$, dann gilt für die allgemeine Lösung von (1) die asymptotische Formel

$$x = A f^{-1/4} \cos \left\{ \int_{t_0}^t f^{1/2} \left(1 - \frac{h^2}{16} \right)^{1/2} dt + B + o(1) \right\},$$

wobei A und B beliebige Konstanten bezeichnen. Verf. zeigt, daß dieser Satz viele, bisher bekannte Ergebnisse umfaßt, welche die Differentialgleichung $\ddot{x} + F(t)x = 0$ ($t \geq t_0$) betreffen. Ein neues einfaches Ergebnis wird als eine Folgerung des oben angeführten Satzes abgeleitet.

M. Ráb.

Hsu, C. S.: On simple subharmonics. Quart. appl. Math. 17, 102—105 (1959).

Verf. bezieht sich auf eine Arbeit von Rosenberg (dies. Zbl. 79, 306), in der u. a. einfache subharmonische Schwingungen behandelt werden. Die Bewegungsgleichung $x'' + f(x) = P_0 \cos \omega t$ besitze eine Lösung der Form $x = x_0 \cos(\omega t/r)$ für eine ganze Zahl $r > 1$. Rosenberg zeigte, daß dieser Sonderfall vorliegt, wenn sich die Gleichung folgendermaßen schreiben läßt: $\xi'' + r^{-2} \xi + k \sum_{n=1}^r \alpha_r^{(n)} \xi^n = k \cos \tau$, wobei $\tau = \omega t$, $\xi = x/x_0$ und $k = P_0/x_0 \omega^2$ gesetzt ist. Für $r = 1$ ergibt sich die lineare Gleichung (*) $\xi'' + (1 + k) \xi = k \cos \tau$. Verf. findet nun, daß die von Rosenberg angegebenen Koeffizienten $\alpha_r^{(n)}$ ganz einfach die Koeffizienten der einzelnen Tschebyscheffschen Polynome 1. Art sind, und schreibt demgemäß die Gleichung als (**) $\xi'' + r^{-2} \xi + k T_r(\xi) = k \cos \tau$. Er gibt auch noch andere Gleichungen mit der erwähnten Eigenschaft an. Anschließend setzt er in (*) $\xi = T_r(\eta)$ und leitet für $\xi = \cos \tau$, d. h. $\eta = \cos(\tau/r)$ die Beziehung (**) in η ab. Daraus schließt er auf die Eindeutigkeit der einfachen subharmonischen Lösungen.

R. Reißig.

Lillo, James C.: Linear differential equations with almost periodic coefficients. Amer. J. Math. 81, 37—45 (1959).

L'A. considère quelques cas où l'on peut préciser la structure des solutions des systèmes linéaires à coefficients presque-périodiques. Pour les systèmes dont

la matrice est triangulaire il met en évidence le rôle de la condition $\int_0^t a_{ii}(s) ds =$

$= m_i t + p_i(t)$, où $p_i(t)$ est presque périodique et $m_i \neq m_j$ pour $i \neq j$. On considère ensuite le cas où les fréquences des éléments de $A(t)$ sont du même signe et ne s'accumulent pas vers zéro; il obtient des résultats analogues à ceux obtenus indépendamment par V. G. Štelik (ce Zbl. 82, 298). Le dernier théorème montre que le système $x' = (A + C(t))x + B(t)$ admet une solution presque-périodique

unique si $m - \varepsilon > c \sum_{j=1}^h (p + m_j) (m_j)^2$ où $m = \min |\operatorname{Re} \lambda_j|$, λ_j étant les racines caractéristiques de la matrice A , m_j l'ordre de multiplicité de la racine λ_j , p le nombre des racines complexes, $c = \sup |c_{ij}(t)|$.

A. Halanay.

Bylov, B. F.: Über die Stabilität des größten charakteristischen Exponenten eines Systems linearer Differentialgleichungen mit fastperiodischen Koeffizienten nach oben. Mat. Sbornik, n. Ser. 48 (90), 117—128 (1959) [Russisch].

Es wird das System von Differentialgleichungen

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x + F(t, x)$$

behandelt, wo die Elemente $a_{ik}(t)$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) der Matrix A stetige, fastperiodische Funktionen, die Elemente $F_i(t, x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) der Matrix $F(t, x)$ bei $t \geq 0$ in bezug auf t, x_1, \dots, x_n stetig und die Bedingungen

$$(2) \quad |F_i(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - F_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq \delta \sum_{k=1}^n |\bar{x}_k - x_k|$$

erfüllt sind, wobei $\delta > 0$ eine bekannte Konstante ist. Der größte charakteristische Exponent λ des Systems (3) $\dot{x} = A(t)x$ wird in bezug auf die gedämpften Funktionen F_i nach oben stabil genannt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches δ existiert, daß bei beliebigen, den Gleichungen (2) genügenden Funktionen F_i , der charakteristische Exponent jeder Lösung von (1) den Wert $\lambda + \varepsilon$ nicht übertrifft. Es wird festgestellt, daß wenn die Matrix $A(t)$ gewissen Bedingungen genügt, der größte charakteristische Exponent λ des Systems (3) nach oben stabil ist. Es werden folgende zwei Sätze bewiesen: 1. Damit der Exponent nach oben stabil ist, ist notwendig und hinreichend, daß für ein beliebiges $\alpha > 0$ eine von τ unabhängige Konstante $B(\alpha)$ existiert, so daß

$$\|X(t, \tau)\| \leq B(\alpha) e^{(\lambda + \alpha)(t - \tau)} \left(\|X(t)\| = \max_{ij} \left[\sqrt{\sum_{k=1}^n x_{ik}^2(t)}, \sqrt{\sum_{p=1}^n x_{pj}^2(t)} \right] \right),$$

worin $X(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$ und $X(t)$ die Matrix aus einem beliebigen Fundamentalsystem von Lösungen $x_{ik}(t)$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) der Gleichung (3) ist. 2. Hat die Matrix $A(t)$ von (3) die Eigenschaft, daß für irgendein $\gamma > 0$ eine Folge $\{L_i\} \rightarrow \infty$ aus solchen Zahlen existiert, für welche in jedem Intervall mit der Länge L_i sich wenigstens ein Wert τ_i befindet, für den $\|A(t + \tau_i) - A(t)\| \leq \varepsilon_i$ gilt, wo $\varepsilon_i = \exp(-\gamma L_i)$ ist, so ist der Exponent λ des Systems (3) nach oben stabil.

G. Bradistilov.

• Krasovskij, N. N.: Einige Aufgaben aus der Theorie der Stabilität einer Bewegung. [Nekotorye zadachi teorii ustojčivosti dvizhenija.] Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 211 S. R. 8,70 [Russisch].

Verf. behandelt im vorliegenden Band einige Aufgaben aus der Theorie der Stabilität von Lösungen nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme. Dabei stützt er sich auf eine Reihe eigener Veröffentlichungen, die er in mancher Hinsicht umgearbeitet und ergänzt hat; außerdem benutzt er Arbeiten anderer sowjetischer und ausländischer Autoren. Er widmet sich der direkten Methode von Ljapunov, die in der letzten Zeit stark ausgebaut und auf zahlreiche neue Stabilitätsprobleme ausgedehnt wurde. Insbesondere befaßte man sich eingehend mit der Existenz Ljapunovscher Funktionen und mit der Möglichkeit, die Verfahren auf dynamische Systeme auszudehnen, deren mathematische Beschreibung einen anderen Apparat als gewöhnliche Differentialgleichungen erfordert. Im ersten Teil, der die Kapitel I bis V umfaßt, betrachtet Verf. das Stabilitätsproblem bei Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Während er schon in der Einleitung die grundlegenden Stabilitätsdefinitionen und die Hauptsätze der Stabilitätstheorie zitiert, geht er in Kapitel I zum Umkehrproblem, d. h. zum Problem der Existenz Ljapunovscher Funktionen im Stabilitäts- oder Instabilitätsfall, über. Einige Modifikationen und Verallgemeinerungen der klassischen Sätze von Ljapunov bringen die Kapitel II und III. Kapitel IV befaßt sich mit dem wichtigen Problem, Bedingungen aufzustellen, unter denen aus dem durch Weglassen gewisser Glieder verkürzten Differentialgleichungssystem auf die Stabilität oder Instabilität der Lösungen des vollständi-

gen Systems geschlossen werden kann (Problem der Stabilität nach der ersten oder allgemeiner nach der m -ten Näherung). In Kapitel V findet man schließlich Kriterien für die totale Stabilität und für die asymptotische Stabilität im Ganzen. Dabei wird auch auf die Bildung Ljapunovscher Funktionen in konkreten Fällen eingegangen. In den letzten beiden Kapiteln VI und VII wird die Ljapunovsche Stabilitätstheorie auf Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument übertragen; diese spielen bei der Analyse von Regelkreisen mit Totzeiten eine wichtige Rolle. Das vorliegende Buch kann man als eine wertvolle Ergänzung zu früheren umfassenden Darstellungen (z. B. von Malkin) ansehen; die große Zahl der laufend erscheinenden Publikationen auf dem Gebiet der Stabilitätstheorie unterstreicht die Bedeutung solcher Ergänzungen.

R. Reißig.

• Lehnigk, S.: Über quadratische Formen mit Parametern als Ljapunovsche Trägerfunktionen. (DFL-Bericht Nr. 106.) Braunschweig: Deutsche Forschungsanstalt für Luftfahrt E. V., Institut für Flugmechanik 1958. 41 S. mit 7 Bild. DM 14,70.

Verf. untersucht die triviale Lösung eines Differentialgleichungssystems der Gestalt

$$\ddot{x}_i = a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n + f_i(x_1, \dots, x_n); \quad i = 1, \dots, n$$

hinsichtlich ihrer asymptotischen Stabilität. Die nichtlinearen Funktionen f_i schränkt er durch Ungleichungen der Art

$$q'_{i1} x_1 + \dots + q'_{in} x_n \leq f_i(x_1, \dots, x_n) \leq q''_{i1} x_1 + \dots + q''_{in} x_n$$

ein und fragt nach Bedingungen für die Koeffizienten q', q'' , unter denen asymptotische Stabilität herrscht. Dazu bildet er das lineare Ersatzsystem $\bar{x} = (A + Q)x$ und nimmt als Ljapunovsche Funktion eine positiv-definite quadratische Form $V(x) = x' B x$, deren totale zeitliche Ableitung (mit Hilfe der vorgelegten Differentialgleichung) die quadratische Form $\dot{V} = x' (C + D)x$; $C = A' B + B A$, $D = Q' B + B Q$ wird. Ist diese negativ-definit, d. h. sind bei der Matrix $-(C + D)$ die n Hauptdeterminanten positiv, so ist die triviale Lösung der linearisierten Gleichung asymptotisch stabil. Die Intervallgrenzen für die Koeffizienten q , die asymptotische Stabilität liefern, ergeben die gesuchten Abschätzungen für die nichtlinearen Glieder f . Die hängen noch von der Wahl der Ljapunovschen Funktion V ab. Diese trifft man oft so, daß $C = -E$ und für den Fall $Q = 0$ $\dot{V} = -(x_1^2 + \dots + x_n^2)$. Um unter Umständen eine bessere Abschätzung der Nichtlinearitäten zu bekommen, schlägt Verf. vor, $x' C x = -(p_1 x_1^2 + \dots + p_n x_n^2)$; $p_j > 0$ zu setzen und die Parameter p geeignet zu bestimmen; unter diesen sind $n - 1$ frei verfügbar. Sie gehen in die Bedingung, daß alle Hauptdeterminanten in $C + D$ positiv sein sollen, und daher auch in die Abschätzungen der Funktionen $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ein. Der Bereich des q_{ik} -Raumes, der durch die Bedingung für die positive Definitheit von $C + D$ gegeben ist, wird vom Verf. als L -Gebiet bezeichnet; die Gestalt des L -Gebiets hängt von der Wahl der Parameter p_j ab. Der Verf. veranschaulicht seine Betrachtungen durch eine Reihe von Zahlenbeispielen und einige Skizzen.

R. Reißig.

Sideriades, L.: Systèmes non linéaires du deuxième ordre. J. Phys. Radium 18, 304—311 (1957).

Verf. verallgemeinert eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 79, 302) und betrachtet folgendes Differentialgleichungssystem mit den beiden Variablen x und y :

$$-d\ddot{x} + b\ddot{y} - D\dot{x} + B\dot{y} + \bar{X} = 0, \quad c\ddot{x} - a\ddot{y} + C\dot{x} - A\dot{y} + \bar{Y} = 0,$$

wobei die Koeffizienten a, \dots, D und die Glieder \bar{X}, \bar{Y} analytische Funktionen von x und y sind und die unabhängige Veränderliche (die Zeit t) nicht explizit enthalten. Indem er $\dot{x} = u$, $\dot{y} = v$ setzt, gewinnt er 4 Differentialgleichungen 1. Ordnung. Zunächst konstruiert er in jedem festen Punkt $M(x, y)$ die zugehörigen Geschwindigkeitsintegrale, d. h. die Lösungen der Differentialgleichungen $\dot{u} =$

$$U(u, v)/W(u, v); \dot{v} = V(u, v)/W(u, v) \\ [U = (-aD + bC)u + (a\bar{X} + b\bar{Y}), \quad V = (-cD + dC)u + \\ (cB - dA)v + (c\bar{X} + d\bar{Y}), \quad W = ad - bc].$$

In diesem u - v -Diagramm existiert ein einziger singulärer Punkt, der in den Ursprung übergeht, wenn man $u = X/T + \xi$, $v = Y/T + \eta$ setzt

$$[X = (A\bar{X} + B\bar{Y}), \quad Y = (C\bar{X} + D\bar{Y}), \quad T = (AD - BC)].$$

Demgemäß ergibt sich folgende Konstruktionsvorschrift für die Integralkurven in der xy -Ebene: Man zeichnet zuerst die Hilfskurven, die den Gleichungen $-D\dot{x} + B\dot{y} + \bar{X} = 0$, $C\dot{x} - A\dot{y} + \bar{Y} = 0$ gehorchen, und findet im Punkt $M(x, y)$ die Geschwindigkeit $V_1 = (X/T, Y/T)$. Nun trägt man im Endpunkt des Vektors V_1 das (ξ, η) -Achsenkreuz an, wo man auf der durch die Anfangsbedingungen bestimmten Geschwindigkeitskurve den Punkt $V_2(\xi, \eta)$ sucht. Durch Superposition der beiden Geschwindigkeiten V_1 und V_2 erhält man die Geschwindigkeit V und damit den weiteren Verlauf der betrachteten Phasenbahn. Verf. untersucht eingehend die Topologie der (ξ, η) -Ebene und die singulären Linien in der (x, y) -Ebene, auf denen $X/T = -\xi$, $Y/T = -\eta$ (also $V = 0$) gilt, und behandelt einige Sonderfälle. Danach bringt er Anwendungen aus der Elektronik. R. Reißig.

Schubart, Hans: Über die Grenzamplitude einer Klasse selbsterregter Schwingungen. Ingenieur-Arch. 27, 66—72 (1959).

Ein Integral, das in einer Untersuchung von K. Klotter und dem Ref. (dies. Zbl. 78, 274) über eine Klasse nichtlinearer selbsterregter Schwingungssysteme auftritt, wird in elementarer Weise abgeschätzt. Diese Abschätzung führt zu verbesserten Schranken für die Grenzamplitude der genannten Schwingungen. E. Kreyszig.

Opial, Z.: Sur un théorème de A. Filippoff. Ann. Polon. math. 5, 67—75 (1958).

Es wird die Differentialgleichung (1) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, wo $f(x)$ und $g(x)$ für jedes x stetige ungerade Funktionen sind und $xg(x) > 0$ bei $x \neq 0$ ist, behandelt. Es wird festgestellt: wenn ein solches a existiert, für welches im Intervall $0 \leq x \leq a$

$$\int_0^x \frac{g(\xi)}{|F(\xi)|} d\xi \geq \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) |F(x)| \quad (\varepsilon > 0) \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$$

gilt, so sind alle genügend kleine Anfangswerte besitzenden Integrale der Gleichung (1) periodisch; gilt dagegen für $0 \leq x \leq a$

$$\int_0^x \frac{g(\xi)}{|F(\xi)|} d\xi \leq \frac{1}{4} |F(x)| \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi,$$

so besitzt die Gleichung (1) nichtperiodische Integrale mit beliebig kleinen Anfangswerten. Bei $a = \infty$ sind alle nichttrivialen Integrale dieser Gleichung nichtperiodisch. G. Bradistilov.

Meksyn, David: Sur la position des singularités dans les solutions de l'équation de la couche limite. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2286—2287 (1959).

Verf. betrachtet die Differentialgleichung (*) $f''' + ff'' = \lambda(1 - f'^2)$ der „ähnlichen Lösungen“ der Grenzschichttheorie a) für $\lambda = 0$ (ebene Platte) und b) für $\lambda = 0,199$ (Ablöseprofil) und fragt nach den singulären Stellen von (*). Offenbar erlaubt (*) (nach einer Transformation, vgl. dazu B. Punnis, dies. Zbl. 70, 428) unter den üblichen Anfangsbedingungen $f(0) = f'(0) = 0$ bei a) eine Lösung der Gestalt $\bar{f}(x) = 3/(x + x_1) + x^2 g(x^3)$, unter $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ bei b) eine Lösung $\bar{f}(x) = 6(2 + \lambda)^{-1}(x + x_1)^{-1} + x^3 g(x^4)$, wobei $g(x)$ je eine reguläre Funktion ist. Verf. schließt daraus, daß es im Falle a) unter der Randbedingung $f'(\infty) = 1$ genau eine Polstelle $x = -x_1$ im Reellen gibt und

berechnet die Lage aller Polstellen zu $x \approx (3, 1/a^{1/3}) \omega^n$ ($n = 0, 1, 2$), wo $a = 0,4696$ und $\omega^3 = 1$ ist. Für den Fall b) findet Verf. unter derselben Randbedingung $f'(\infty) = 1$ die Pole mit kleinstem Betrag an der Stelle $x \approx 4,8 e^{i\pi/4} \omega^n$ ($n = 0, 1, 2, 3$; $\omega^4 = 1$). Die Einsicht in die angegebenen Ergebnisse ist durch die Knappheit des vorliegenden Kurzberichts und durch einige sinnstörende Druckfehler (insbesondere in Gleichung (4)) sehr erschwert.

K. Nickel.

Persidskij, K. P.: Abzählbare Systeme von Differentialgleichungen und die Stabilität ihrer Lösungen. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. 7 (11), 52—71 (1959) [Russisch].

Die Arbeit ist der erste Teil eines ausführlichen Artikels über abzählbare Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(1) \quad dx_s/dt = \omega_s(t, x_1, x_2, \dots) \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Es enthält die Besprechung der Haupteigenschaften solcher Systeme. Folgende Voraussetzungen werden angenommen: 1. die ω_s sind für $0 \leq t \leq \tau$, $|x_s| \leq R$ erklärt und stetig bezüglich t , 2. $|\omega_s(t, x'_1, x'_2, \dots) - \omega_s(t, x''_1, x''_2, \dots)| \leq \alpha(t) \Delta x$, wo $\Delta x = \sup(|x'_1 - x''_1|, |x'_2 - x''_2|, \dots)$ und $\alpha(t)$ stetig ist, 3. $|\omega_s(t, 0, 0, \dots)| \leq \beta(t)$, wo $\beta(t)$ stetig ist. Mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximationen wird in § 2 die Existenz und die Eindeutigkeit einer beschränkten Lösung von (1), die durch einen gegebenen Punkt $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$ geht, bewiesen. § 3 enthält den Beweis der Stetigkeit der Lösung $x_s(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$ bezüglich der Anfangswerte $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$. Im § 4 wird eine Methode der Lösung besprochen, die darauf beruht, daß man anstatt System (1) das verkürzte, endliche System

$$(2) \quad du_{sm}/dt = \omega_s(t, u_{1m}, u_{2m}, \dots, u_{mm}, 0, 0, \dots) \quad (s = 1, 2, \dots, m)$$

betrachtet. Dabei wird die Voraussetzung 2. verstärkt; es wird nämlich vorausgesetzt, daß

$$4. \quad |\omega_s(t, x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots) - \omega_s(t, x_1, \dots, x_m, x''_{m+1}, \dots)| \leq \alpha(t) \Delta x_m \varepsilon_s(m),$$

wo $\Delta x_m = \sup(|x'_{m+1} - x''_{m+1}|, |x'_{m+2} - x''_{m+2}|, \dots)$ und $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_s(m) = 0$.

Unter dieser Voraussetzung gilt der folgende Satz: für die Lösung $u_{sm}(t)$ des Systems (2), die die Anfangsbedingungen $u_{sm}(t_0) = x_s^0$ erfüllt, gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{sm}(t) = x_s(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$. Im § 5 wird, außer 1., 3., 4., noch vorausgesetzt, daß ω_s holomorph bezüglich aller Veränderlichen (die jetzt komplex sind) ist. Dann ist die Lösung $x_s(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \dots)$ in Bezug auf alle Veränderlichen holomorph.

J. Szarski.

Bogdanov, Ju. S. (Yu. S.): Some tests for the absence of closed trajectories. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 939—940 (1958) [Russisch].

Certain sufficient conditions for the absence, in a plane domain, of closed trajectories of the system (D) $dx_i/dt = p_i(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2$) are given, where $p_i(x_1, x_2)$ are supposed to be of class C^2 in an open set X . Introduce following notations: $x = (x_1, x_2)$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $p(x) = (p_1(x), p_2(x))$, X_D the set of all singular points of (D), V a bounded subset of X , h diameter of V , G a subset of X , $G' = G - X_D$,

$$k(x) = p_1^2(x) \partial p_2(x) / \partial x_1 + p_1(x) p_2(x) (\partial p_2(x) / \partial x_2 - \partial p_1(x) / \partial x_1) - p_2^2(x) \partial p_1(x) / \partial x_2$$

$$k(x, t) = |k(x)| - t \|p(x)\|^3, \quad m(x) = p(x) \partial(k(x) / \|p(x)\|^3) / \partial x \quad \text{for } x \in G',$$

$$\Delta(x) = [0, \|p(x)\|^2 / k(x)] \quad \text{for } k(x) \neq 0, \quad \Delta(x) = (-\infty, +\infty) \quad \text{for } k(x) = 0,$$

$$\xi(G) = \bigcup_{x \in G'} \bigcup_{t \in \Delta(x)} (x + t(-p_2(x), p_1(x))),$$

$$\eta(G) = \bigcup_{x \in G'} \bigcup_{t \in (-\infty, +\infty)} (x + t(-p_2(x), p_1(x))).$$

With these notations the following theorem holds true: 1. each of the following conditions is sufficient for the absence of a closed trajectory of (D) contained in G and containing V in its interior: a) $k(x, 2/h) > 0$ for $x \in G'$, b) $k(x) \neq 0$ for $x \in G'$ and $\xi(G) \cap V \neq V$, c) $\eta(G) \cap V \neq V$; 2. if $k(x, 2/h) < 0$ for $x \in V$, then there is no closed trajectory contained in V ; 3. if $m(x) \neq 0$ for $x \in G'$, then there is no closed trajectory contained in G' . J. Szarski.

Sidériadès, Lefteri: Méthodes topologiques dans un espace à trois dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 911—913 (1958).

L'A. présente une étude topologique, basée sur le concept des valeurs propres, des points singuliers du système d'équations

$$dx/dt = X(x, y, z), \quad dy/dt = Y(x, y, z), \quad dz/dt = Z(x, y, z),$$

où X, Y, Z sont des fonctions holomorphes. Considérons le jacobien

$$|D(X, Y, Z)/D(x, y, z)|$$

en un point singulier. Les racines de l'équation caractéristique $S^3 + \xi S^2 + \eta S + \zeta = 0$ de ce jacobien sont les valeurs propres correspondant au point singulier. Introduisons ensuite les quantités

$$\Sigma = \xi \eta - \zeta, \quad \Phi = 27 \zeta^2 - 2 \xi (9 \eta - 2 \xi^2) \zeta + \eta^2 (4 \eta - \xi^2).$$

Suivant les signes des quantités ζ, Φ, Σ l'A. dénombre, pour l'espace à trois dimensions, 27 points singuliers. Par exemple pour $\Phi < 0, \Sigma \zeta < 0$ le point singulier est un col instable. J. Szarski.

Mikolajska, Z.: Sur l'existence de solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre dépendant d'un paramètre. Ann. Polon. math. 6, 51—68 (1959).

This paper develops the proof of an existence theorem concerning the differential equation $X'' = g(t, X, X', \lambda)$ where g is continuously differentiable with respect to its last three arguments and continuous with respect to the four, whatever be their values. Further it is periodic (of period T) with respect to t and a periodic solution $\psi(t)$ is assumed to exist when $\lambda = 0$. It is shown that a periodic solution $\psi(t, \lambda)$ exists for values of λ such that $|\lambda| < L$ (therefore λ not sufficiently small as in the well known theory), under the following conditions

$$\max(|g'_X|, |g'_{X'}|, |g'_\lambda|) < M, \quad \left| \int_0^T g'_x dt \right| > m, \quad m > (MT)^2 (3T + \frac{7}{2}).$$

$\psi(t, \lambda)$ is continuous for $|\lambda| < L$ and hölderian in λ . The proof is obtained by a skilful application of Schauder's fixed point theorem. First a change of variable $x = X + \psi(t)$ reduces the equation to a simpler form. Then the following Banach spaces are introduced. E is the space of the continuous functions $\psi(t, \lambda)$ defined in $0 \leq t \leq T$, $|\lambda| < L$, with the usual norm; and \mathcal{L} is the space of the continuous functions $a(\lambda)$ for $|\lambda| < L$ with the usual norm. In E the subset Z , convex and closed is defined by the conditions that ψ should be hölderian with respect to λ and that

$$\max_{\tau \in (0, t)} \left\{ e^{\mu \tau} \left[|\psi(\tau, \lambda)| + \left| \int_0^\tau \psi(s, \lambda) ds \right| \right] \right\} \leq k \text{ for } |\lambda| < L$$

In \mathcal{L} a subset A is defined by the conditions that $a(0) = 0$, $\|a(\lambda)\| < r$ and $|a(\lambda') - a(\lambda'')| < N |\lambda' - \lambda''|$. In Z a transformation V is defined as follows: let the given equation in x be of the form $x'' = f(t, x, x', \lambda)$. The conditions imposed on f are such that the equation $F(\lambda, u) = 0$, where

$$F(\lambda, u) = \int_0^T f \left[t, u + \int_0^t \psi(s, \lambda) ds, \psi(t, \lambda), \lambda \right] dt$$

has a solution $u = a(\lambda)$ for $|\lambda| < L$. This solution is unique and one sets: $a(\lambda) =$

$V[\psi(t, \lambda)]$. In $Z \times A$ a transformation U is defined as follows:

$$U[a(\lambda), \psi(t, \lambda)] = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^s f \left[\tau, a(\lambda) + \int_0^\tau \psi(\xi, \lambda) d\xi, \psi(\tau, \lambda), \lambda \right] d\tau ds \\ + \int_0^t f \left[\tau, a(\lambda) + \int_0^\tau \psi(\xi, \lambda) d\xi, \psi(\tau, \lambda), \lambda \right] d\tau.$$

Lastly a transformation W is defined in Z , being of the form $W(\psi) = U[V(\psi(t, \lambda)), \psi(t, \lambda)]$. It is shown that U is continuous in $A \times Z$ and W maps the subset Z into itself, $W(Z)$ being compact. Therefore Schauder's theorem applies and this yields the existence theorem. A few interesting examples are summarily studied.

C. Racine.

Naftalevič, A. G.: Über ein System zweier linearer Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Mat. Sbornik, n. Ser. 46 (88), 421—432 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet ein System von zwei Differenzgleichungen $\sum_{k=1}^n a_k A^k f(z) = g(z)$, $\sum_{l=1}^m b_l B^l f(z) = h(z)$, wobei a_k, b_l komplexe Zahlen ($a_n = b_m = 1$), $g(z)$ und $h(z)$ vorgegebene meromorphe Funktionen der komplexen Veränderlichen z sind und $f(z)$ eine gesuchte meromorphe Funktion darstellt. Die Operatoren A und B sind definiert als $A f(z) = f(z + \alpha)$, $B f(z) = f(z + \beta)$, wobei α und β komplexe Zahlen ($\text{Im } \alpha/\beta \neq 0$) sind. Mit Rücksicht auf die Produktdarstellungen für die charakteristischen Polynome

$$\prod_{k=1}^n a_k t^k = \prod_{j=1}^s (t - \lambda_j)^{k_j}, \quad \prod_{l=1}^m b_l t^l = \prod_{i=1}^r (t - \mu_i)^{h_i}$$

erhält man für das System auch die Form

$$\prod_{j=1}^s (A - \lambda_j E)^{k_j} f(z) = g(z), \quad \prod_{i=1}^r (B - \mu_i E)^{h_i} f(z) = h(z),$$

wobei E den Identitätsoperator bezeichnet, $E f(z) = f(z)$. Verf. zeigt zunächst, daß die allgemeine Lösung des homogenen Systems [$g(z) = h(z) = 0$] eine eindeutig bestimmte Zerlegung $f(z) = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r \varepsilon_{i,j}(z)$ zuläßt, worin die Funktion $\varepsilon_{i,j}(z)$ eine beliebige Lösung des Elementarsystems $(A - \lambda_j E)^{k_j} f(z) = 0$, $(B - \mu_i E)^{h_i} f(z) = 0$ bildet. Diese Lösung gibt Verf. in der Gestalt an:

$$\varepsilon_{i,j}(z) = \varphi_{i,j}(z) \sum_{\rho=0}^{h_j-1} \sum_{\sigma=0}^{k_j-1} \xi^\sigma(z) \eta^\rho(z) \varepsilon(z);$$

hierbei ist $\varphi_{i,j}(z)$ eine nichttriviale Lösung des mit $k_j = h_i = 1$ gebildeten Elementarsystems, $\varepsilon(z)$ ist eine beliebige elliptische Funktion mit den Perioden α, β , und $\xi(z), \eta(z)$ sind Lösungen der Systeme $(A - E) \xi(z) = 1$, $(B - E) \xi(z) = 0$; $(A - E) \eta(z) = 0$, $(B - E) \eta(z) = 1$. Verf. beweist dann den Satz: Das vorgelegte Differenzgleichungssystem ist dann und nur dann lösbar, wenn die Identität

$$\prod_{i=1}^r (B - \mu_i E)^{h_i} g(z) \equiv \prod_{j=1}^s (A - \lambda_j E)^{k_j} h(z)$$

besteht. Schließlich studiert Verf. noch eingehend die Struktur der Lösungen und die Bedingungen, unter denen das inhomogene sowie das homogene Gleichungssystem Lösungen aus der Klasse der ganzen Funktionen besitzen. R. Reißig.

Naftalevič, A. G.: Über ein System zweier Differenzgleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 47 (89), 131—140 (1959) [Russisch].

Verf. betrachtet das Gleichungssystem

$$f(z + n\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(z) f(z + k\alpha) + a(z), \quad f(z + m\beta) = \sum_{l=0}^{m-1} q_l(z) f(z + l\beta) + b(z),$$

$p_0(z) \neq 0$, $q_0(z) \neq 0$, $\operatorname{Im} \alpha/\beta \neq 0$. Hierbei ist z eine komplexe Variable, und die Funktion $f(z)$ wird in den Punkten eines gewissen Gitternetzes $z_0 + i\alpha + j\beta$ gesucht, wenn man die Anfangswerte für $i = 0, \dots, n-1$; $j = 0, \dots, m-1$ vorgibt. Verf. beginnt mit dem einfachen Sonderfall $n = m = 1$ und zeigt, daß die Bedingungen

$q_0(z + \alpha) p_0(z) \equiv p_0(z + \beta) q_0(z)$; $q_0(z + \alpha) a(z) + b(z + \alpha) \equiv p_0(z + \beta) b(z) + a(z + \beta)$ für die Lösbarkeit notwendig und hinreichend sind. Im allgemeinen Fall bestehen folgende Lösbarkeitsbedingungen:

$$q_l(z + n\alpha) p_k(z + l\beta) = p_k(z + m\beta) q_l(z + k\alpha); \quad 0 \leq l \leq m-1, 0 \leq k \leq n-1;$$

$$\sum_{l=0}^{m-1} q_l(z + n\alpha) a(z + l\beta) + b(z + n\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(z + m\beta) b(z + k\alpha) + a(z + m\beta).$$

Wenn im Sonderfall die Lösbarkeitsbedingungen erfüllt und $p_0(z)$, $q_0(z)$, $a(z)$, $b(z)$ meromorphe Funktionen sind, besitzt das System meromorphe Lösungen. Verf. widmet sich dann der Differenzengleichung

$$P(z) f(z + \alpha) + Q(z) f(z + \beta) = R(z) f(z),$$

wo $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ vorgegebene meromorphe Funktionen sind und die Bedingung

$$P(z) Q(z + \alpha) R(z + \beta) = Q(z) R(z + \alpha) P(z + \beta)$$

erfüllen. Er bezeichnet mit $M(z)$ eine meromorphe Lösung des Hilfssystems $P(z) f(z + \alpha) = R(z) f(z)$, $Q(z) f(z + \beta) = R(z) f(z)$ und setzt $f(z) = M(z) F(z)$, so daß auf Grund der obigen Gleichung $F(z + \alpha) + F(z + \beta) = F(z)$ gilt. Alle meromorphen Lösungen $E_\mu(z)$ des Systems $F(z + \alpha) = \mu F(z)$; $F(z + \beta) = (1 - \mu) F(z)$ sowie Summen der Art $E_{\mu_1}(z) + E_{\mu_2}(z) + \dots$ und deren Grenzfunktionen werden zu einem Funktionalraum Φ zusammengefaßt. Verf. beweist, daß eine beliebige meromorphe Lösung der Ausgangsgleichung dem Raum Φ angehört. Schließlich geht er noch kurz auf die Lösungen der inhomogenen Differenzengleichung $(A + B) f(z) = f(z) + H(z)$ ein, wobei $A f(z) = f(z + \alpha)$, $B f(z) = f(z + \beta)$ und $H(z)$ eine vorgegebene meromorphe Funktion ist.

R. Reißig.

Baumol, William J.: Topology of second order linear difference equations with constant coefficients. *Econometrica* 26, 258—285 (1958).

In dieser Mitteilung beschreibt Verf. geometrische Verfahren, mit denen man Differenzengleichungen 2. Ordnung qualitativ untersuchen kann. Die Verfahren erläutert er am linearen Sonderfall und deutet an, wie einige nichtlineare Probleme in ähnlicher Weise behandelt werden können. Er geht von der Gleichung $Y_{t+1} = a Y_t + b Y_{t-1} + c$ aus, deren allgemeine Lösung die Form $Y_t = u X_1^t + v X_2^t + Z$ hat, wenn X_1, X_2 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, Z eine partikuläre Lösung und u, v beliebige konstante Koeffizienten bedeuten. Zunächst beschränkt sich Verf. auf die homogene Gleichung und konstruiert in einer Phasenebene (Y_t, Y_{t+1}) die in Parameterdarstellung vorliegenden Bahnen. Dabei unterscheidet er die verschiedenen Fälle je nach der Beschaffenheit der charakteristischen Wurzeln. Im Falle komplexer Wurzeln ergeben sich Spiralen oder Ellipsen. Um aus dem Phasenbild die „Zeitbahn“ der Veränderlichen Y , d. h. die den Zeitpunkten $0, 1, 2, \dots$ entsprechende Punktfolge zu erhalten, greift Verf. die dem Anfangspunkt $A(Y_0, Y_1)$ entsprechende Bahn heraus und zeichnet die Winkelhalbierende des 1. Quadranten ein, die er von A aus horizontal erreicht und vertikal verläßt, um den Bahnpunkt $B(Y_1, Y_2)$ zu finden, usw. Er stellt einige Regeln über den Zusammenhang zwischen dem Wachstum von Y und der Gestalt und Lage der Phasenbahn auf. Bei reellen charakteristischen Wurzeln erscheinen im Fall $|X_1| > 1, |X_2| > 1$ oder $|X_1| < 1, |X_2| < 1$ Phasenbahnen vom parabolischen Typ und im Fall $|X_1| < 1, |X_2| > 1$ oder $|X_1| > 1, |X_2| < 1$ Bahne vom hyperbolischen Typ. Wieder wird die Konstruktion der Zeitbahn erörtert.

Danach betrachtet Verf. die inhomogene Gleichung, die eine stationäre Lösung $k = c/(1 - a - b)$ besitzt, und geht auch auf die Lösung bei zeitlich veränderlichem Glied $c(t)$ ein. Zum Schluß bringt er als Anwendungsbeispiel ein nichtlineares Modell aus der Wirtschaftswissenschaft.

R. Reißig.

Muračev (Muraviev), P. A.: Integration of a system of linear mixed-difference differential equations with constant coefficients. Ukrain. mat. Žurn. 9, 432—441, engl. Zusammenfassg. 441 (1957) [Russisch].

Eine sehr allgemeine Klasse von dynamischen Systemen mit Totzeitgliedern läßt sich durch eine vektorielle Differenzen-Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + \dots + A_r x(t - \tau_r) + F(t)$$

beschreiben. Hierbei ist $x(t)$ der Vektor der n Zustandsgrößen $x_1(t), \dots, x_n(t)$ und $F(t)$ ein Vektor, dessen Komponenten bekannte Zeitfunktionen sind; A_k ist eine konstante $n \times n$ -Matrix mit den Elementen $a_{ij}^{(k)}$; die Verzögerungszeiten τ_k ; $0 < \tau_1 < \dots < \tau_r$ sind konstant. Die Anfangsbedingung des Systems lautet $x(t) \equiv 0$; $t < 0$, $x(+0) = (l_1, \dots, l_n)$. Man fragt nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $x(t)$ des Problems und nach einem Verfahren zur Konstruktion dieser Lösung. Dazu schlägt Verf. die Anwendung der Laplace-Transformation vor. Zuerst behandelt er den Sonderfall $r = 1$ und bestimmt die Lösung durch Iteration; er beginnt mit der Funktion $x_{(0)}(t)$; $x_{(0)}(0) = 1$, die der Differentialgleichung $x'_{(0)}(t) = A_0 x_{(0)}(t) + F(t)$ genügt. Diese Funktion stimmt über $[0, \tau_1]$ mit der gesuchten Lösung $x(t)$ überein. Für die k -te Iterierte gilt

$$x'_{(k)}(t) = A_0 x_{(k)}(t) + A_1 x_{(k-1)}(t - \tau_1) + F(t) \text{ sowie } x_{(k)}(k \tau_1) = x_{(k-1)}(k \tau_1);$$

dann stellt sie im Intervall $[k \tau_1, (k+1) \tau_1]$ die exakte Lösung dar. Auf der Grundlage dieser Iterierten bis zur q -ten Ordnung bildet Verf. eine Funktion $\hat{\varphi}_q(t)$, die die Lösung $x(t)$ bis zum Zeitpunkt $(q+1) \tau_1$ richtig wiedergibt; ihre Laplace-

Transformierte bezeichnet er mit $\bar{x}_t(p) = \left\{ \sum_{k=0}^{[t/\tau_1]} m_1^k \right\} x_{(0)}(p)$, wobei

$$x_{(0)}(p) = A^{-1}(F(p) + 1), \quad A = pE - A_0, \quad m_1 = A^{-1}A_1 e^{-p\tau_1}.$$

In entsprechender Weise zeigt er die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $x(t)$ für den allgemeinen Fall der r Totzeitglieder. Er untersucht noch eingehend die Gestalt der Matrizen A^{-1} und $\bar{x}_t(p)$. Dann wendet er sich dem Studium partikulärer Lösungen in den Sonderfällen $F(t) = M e^{\lambda t}$, $M \cos \omega t + N \sin \omega t$, $\sum_k M_k \cos k \omega t + N_k \sin k \omega t$ zu und behandelt ein Regelungsproblem aus der Praxis. Die Resultate sind in mehreren Sätzen zusammengefaßt, deren Beweise aus Platzmangel weggelassen wurden.

R. Reißig.

Kamenskij (Kamensky), G. A.: On the general theory of equations involving a deviating argument. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 697—700 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet Differentialgleichungen mit abweichendem Argument vom Typ $\Phi(t; y(\alpha_0(t)), \dots, y^{(m_0)}(\alpha_0(t)); y(\alpha_1(t)), \dots, y^{(m_1)}(\alpha_1(t)); \dots; y(\alpha_n(t)), \dots, y^{(m_n)}(\alpha_n(t))) = 0$, wobei die stetigen Funktionen $\alpha_0(t), \dots, \alpha_n(t)$ vorgegeben sind. Er setzt $\alpha(t) = \max_i \alpha_i(t)$ und unterteilt die t -Achse in Intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, in denen $\alpha(t) = \alpha_i(t)$ und monoton ist. Wenn z. B. $\alpha = \alpha_0$ gilt, setzt Verf. $x = \alpha_0(t)$ und findet $\alpha_i(t) = x - \Delta_i(x)$; $\Delta_i(x) \geq 0$ sowie $F(x; y(x), \dots, y^{(m_0)}(x); y(x - \Delta_1(x)), \dots, y^{(m_1)}(x - \Delta_1(x)); \dots; y(x - \Delta_n(x)), \dots, y^{(m_n)}(x - \Delta_n(x))) = 0$. Sei $\mu = \max_{1 \leq i \leq n} m_i$ und x_0 ein Anfangspunkt; dann bestimmt jede Funktion

$\Delta_i(x)$ eine x -Menge E_0^i , über der $x \geq x_0$ sowie $x - \Delta_i(x) \leq x_0$. Über $E_0 = \bigcup_{i=1}^n E_0^i$ wird eine μ -mal differenzierbare Anfangsfunktion $\varphi(x)$ vorgegeben, wobei $\varphi^{(i)}(x_0) = y_i$. Für $\mu < m_0 - 1$ werden zusätzlich die Werte $y_{\mu+1}, \dots, y_{m_0-1}$ festgelegt; wenn x_0 in E_0 isoliert ist, sind y_0, \dots, y_{m_0-1} willkürliche Werte. Die über $[x_0, x_1]$ definierte

Funktion $y(x)$ heißt Lösung mit den Anfangsdaten $\varphi(x), y_0, y_1, \dots, y_{m_0-1}$, wenn $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(m_0-1)}(x_0) = y_{m_0-1}$ sowie $y^{(j)}(x - \Delta_i(x)) = \varphi^{(j)}(x - \Delta_i(x))$ für $x \geq x_0, x - \Delta_i(x) < x_0$ und wenn ferner über $[x_0, x_1]$ die Differentialgleichung erfüllt ist. Verf. nimmt an, daß sich diese nach der Ableitung $y^{(m_0)}(x)$ auflösen läßt. Er unterscheidet folgende Fälle je nach dem Wert $\lambda = m_0 - \mu$: Gleichungen mit verzögertem Argument ($\lambda > 0$), vom neutralen Typ ($\lambda = 0$), mit voreilem Argument ($\lambda < 0$). In den ersten beiden Fällen beweist er die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sowie die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten. Dazu benutzt er die Methode der sukzessiven Integration und führt im zweiten Fall, wenn diese Methode nicht anwendbar ist, eine zusätzliche Überlegung durch.

R. Reißig.

Rjabcev, I. I.: Über veränderliche Retardierung. *Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat.* 1 (8), 164—173 (1959) [Russisch].

Verf. betrachtet in einer sehr allgemeinen Klasse von komplexwertigen Funktionen der reellen Veränderlichen t Differentialgleichungen der Art

$$[x^{(n)}(t) + \alpha_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_{n-1} x'(t) + \alpha_n x(t)] + [\beta_0 x^{(n)}(t-s(t)) + \beta_1 x^{(n-1)}(t-s(t)) + \dots + \beta_{n-1} x'(t-s(t)) + \beta_n x(t-s(t))] = f(t)$$

mit konstanten komplexen Koeffizienten α, β und behandelt sie mit Hilfe der Operatorenrechnung; dazu verwendet er Resultate von Mikusiński. Über die Verzögerungsfunktion $s(t)$ setzt er voraus, daß sie längs der Halbachse $0 \leq t_1 \leq t < \infty$ stetig sein soll, wobei $t-s(t)$ streng monoton wächst und $t_1 - s(t_1) = 0$. Den Differentiationsoperator bezeichnet Verf. wie üblich mit p , und den Verschiebungsoperator definiert er wie folgt: $\downarrow f = 0$ für $t < t_1$; $f(t-s(t))$ für $t \geq t_1$. Als Anfangsbedingungen für die gesuchte Lösung $x(t)$ wählt er: $x(t) = y(t)$ für $t^- = \inf_{t \geq 0} (t-s(t)) \leq t \leq 0$; $x^{(m)}(+0) = x_m$; ferner setzt er $y_m(t) = y^{(m)}(t-s(t))$ für $0 \leq t < t_1$; 0 für $t \geq t_1$. Dann erhält er mit den Abkürzungen

$P(p) = p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} p + \alpha_n$, $Q(p) = \beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} p + \beta_n$ die Beziehung

$$\left(1 + \downarrow_s \frac{Q(p)}{P(p)}\right) P(p) \left\{x(t) - x_0 - x_1 \frac{t}{1!} - \dots - x_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = f - \sum_{m=0}^{n-1} \left(\varkappa_m + \lambda_m \downarrow_s\right) \frac{t^m}{m!} - \sum_{m=0}^n \beta_{n-m} y_m; \varkappa_m = \alpha_n x_m + \dots + \alpha_{m+1} x_{n-1},$$

$\lambda_m = \beta_n x_m + \dots + \beta_{m+1} x_{n-1}$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$). Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung folgt aus Abbildungssätzen der Operatorenrechnung. Der Verf. zeigt noch, wie die Lösung berechnet wird, und führt einige Beispiele an.

R. Reißig.

Hahn, Wolfgang: Über geometrische Differenzengleichungen von unendlicher Ordnung. *Math. Nachr.* 18, H. L. Schmid-Gedächtnisband, 19—35 (1958).

L'A. che in precedenza si era occupato dello studio delle equazioni alle differenze geometriche di ordine finito (questo Zbl. 38, 50) prosegue le sue interessanti ricerche passando alle equazioni alle differenze geometriche di ordine infinito

$$(*) \quad \sum_{r=0}^{\infty} (B_r - A_r x) y^r f(x q^r) = 0$$

dove x è una variabile complessa. $\{A_r\}, \{B_r\}$ sono due assegnate successioni di costanti complesse, tali che le serie di potenze $\sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r, \sum_{r=0}^{\infty} B_r z^r$ convergono per $|z| < R$, y è un parametro reale ed $f(z)$ la funzione incognita che l'A. costruisce rappresentandola con un integrale $\int_C z^t F(t) dt$ esteso ad un contorno curvilineo C . L'A. mostra anche l'analogia dell'equazione (*) con le equazioni differenziali di ordine infinito.

G. Sansone.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

● Sauter, Fritz: *Differentialgleichungen der Physik*. (Sammlung Göschen Band 1070.) 3. durchges. und ergänzte Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1958. 147 S. mit 16 Fig. DM 3,60.

(2. ed. v. questo Zbl. 36, 63). L'A. discute le più notevoli equazioni differenziali lineari avendo di mira le applicazioni alla Fisica e più particolarmente coffermandosi, piuttosto che a chiarire i principi su cui si fondano i metodi di integrazione, a sviluppare su esempi concreti la tecnica del calcolo delle soluzioni.

G. Lampariello.

● Tychonoff, (Tychonov), A. N. und A. A. Samarski (Samarskij): *Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. (Hochschulbücher für Mathematik. Bd. 39.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959. 660 S. Ln. DM 42,—.

(La recensione dell'originale vedi in questo Zbl. 44, 93). — Questa notevole opera trae origine dalle lezioni che A. N. Tychonov ha tenute alla Facoltà fisica dell'Università Lomonosov di Mosca. Dicono gli A. che come è essenziale l'interpretazione geometrica nella presentazione del calcolo differenziale e integrale, altrettanto essenziale è l'interpretazione fisica nella teoria delle equazioni alle derivate parziali. Lo sviluppo dei metodi fondamentali per la risoluzione dei problemi al contorno riguardanti le equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine procede sempre dal punto di vista fisico. Stabilità nel Cap. 1° la classificazione delle equazioni del 2° ordine in iperboliche, paraboliche, ed ellittiche si passa nei sei capitoli successivi allo studio approfondito dei problemi più importanti dal punto di vista fisico di ciascuna delle tre specie di equazioni. Particolare pregio danno all'opera le questioni proposte alla fine di ciascuno dei capitoli e le applicazioni relative ai metodi presentati nei capitoli II—VII. La discussione di codeste applicazioni permette di interpretare nella maniera più efficace le teorie fisiche generali e per questa ragione l'opera costituisce uno strumento prezioso per chiunque voglia approfondire i metodi della Fisica matematica.

G. Lampariello.

Volpato, Mario: *Sul problema di Cauchy per equazioni differenziali quasi lineari alle derivate parziali del primo ordine*. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 28, 244—262 (1958).

L'A., che in una memoria precedente aveva risolto il problema di Cauchy per equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine (cfr. questo Zbl. 82, 88), risolve ora il problema di Cauchy per l'equazione quasi lineare

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{r=1}^n f_r(x, y_1, \dots, y_n, z, \lambda) \frac{\partial z}{\partial y_r} = f_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n, z, \lambda),$$

dove z è funzione delle variabili indipendenti x, y_1, \dots, y_n , del parametro λ , e dell'ascissa ξ che individua il piano portante i dati. Le funzioni $f_i(x, u_1, \dots, u_n, z, \lambda)$, ($i = 1, \dots, n+1$) siano definite nel campo $S: a \leq x \leq b, -\infty < u_1, \dots, u_n, z, \lambda < +\infty$, siano integrabili rispetto a x (in tutto il lavoro l'integrazione è intesa nel senso di Lebesgue) sulle sezioni di S con le parallele all'asse x , e su quasi tutte le sezioni di S con i piani $x = \text{cost.}$ soddisfino le

$$\begin{aligned} & |f_i(x, u_1, \dots, u_n, z, \lambda) - f_i(x, U_1, \dots, U_n, Z, A)| \\ & \leq P_i(x) \left\{ \sum_{r=1}^n |u_r - U_r| + |z - Z| + |\lambda - A| \right\}, \quad (i = 1, \dots, n+1), \end{aligned}$$

qualunque siano le $(n+2)$ -ple $(u_1, \dots, u_n, z, \lambda)$, (U_1, \dots, U_n, Z, A) , dove le $P_i(x)$, ($i = 1, \dots, n+1$) sono funzioni non negative e integrabili nell'intervallo $a \leq x \leq b$. La funzione $\Phi(u_1, \dots, u_n, \lambda)$ sia definita per tutti i valori reali di u_1, \dots, u_n, λ , sia continua e soddisfi la

$$|\Phi(u_1, \dots, u_n, \lambda) - \Phi(U_1, \dots, U_n, A)| \leq h \left\{ \sum_{r=1}^n |u_r - U_r| + |\lambda - A| \right\},$$

qualunque siano le $(n+1)$ -ple $(u_1, \dots, u_n, \lambda)$, (U_1, \dots, U_n, A) , h essendo una costante non negativa tale che

$$3(h+1) \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n+1} P_i(t) \right) dt < 1.$$

In queste ipotesi esiste una e una sola funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, definita nel campo S' : $a \leq x, \xi \leq b, -\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty$, ivi continua, lipschitziana in y_1, \dots, y_n, λ , assolutamente continua rispetto a x e rispetto a ξ , essendo le derivate z'_x, z'_ξ integrabili in S' , la quale soddisfa l'equazione (1) in quasi tutto S' , e soddisfa identicamente la $z(\xi, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda)$. L'esistenza di tale funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ è provata sfruttando sia i risultati anteriori dell'A., sia considerazioni di analisi funzionale, l'unicità è provata con considerazioni dirette.

M. Cinquini-Cibrario.

Protasov, V. I.: On linear partial differential equations of infinite order with constant coefficients. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 594—597 (1958) [Russisch].

In the first part of the paper a number of theorems are stated on the existence and uniqueness of the solution of the infinite, linear system of ordinary differential equations with constant coefficients

$$(1) \quad y_k^{(m)}(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\nu)} y_{n+k}^{(\nu)}(x)$$

satisfying the initial conditions (2) $y_n^{(\nu)}(0) = c_n^{(\nu)}$, $n = 0, 1, \dots; \nu = 0, 1, \dots, m-1$.

For instance, Theorem 4 reads as follows: If $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, where

$$a_n = \max_{0 \leq \nu \leq m-1} \{ |a_n^{(\nu)}| \},$$

is holomorphic in the circle $|z| < R$ and if the initial values satisfy the inequalities

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|c_n^{(\nu)}|}}{R} < 1$, then there exists a unique solution of (1), (2) which is composed of entire functions. In the second part of the paper a linear partial differential equation of infinite order with constant coefficients

$$(3) \quad \frac{\partial^m u}{\partial x^m} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\nu)} \frac{\partial^{\nu+n} u}{\partial x^\nu \partial z^n}$$

and with initial conditions (4) $(\partial^\nu u / \partial x^\nu)|_{x=0} = v_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$, is dealt with. A series of theorems (which may be obtained by means of the results concerning problem (1), (2)) are stated on the existence and uniqueness of the solution of the problem (3), (4). For example, Theorem 9 runs as follows: If $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is holomorphic in the circle $|z| < R$ and if the functions $v_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$, are entire of first order and of type less than R , then there exists a unique solution $u(x, z)$ of (3), (4) which is an entire function with respect to both variables.

J. Szarski.

Günther, Paul: Über einige spezielle Probleme aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 102, 50 S. (1957).

Une equation linéaire aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique normal s'appelle d'après M. Mathisson équation à ondes pures (e. o. p.) si la solution de tout problème de Cauchy dépend, dans un point O , seulement des données initiales portées par la variété intersection du cône caractéristique rétrograde ayant le sommet dans O avec la variété qui porte les données du problème de Cauchy. Une e. o. p. s'appelle triviale si par des transformations des variables ou par multiplication de l'équation ou de l'inconnue par des facteurs convenablement choisis

elle peut-être réduite à l'équation des ondes. Dans les quatre premiers §§ du travail l'A. considère des équations de la forme $(1) \partial^2 u / \partial t^2 - L[u] + C u = 0$ où $L[u]$ est un opérateur différentiel linéaire du second ordre dans x^1, \dots, x^n . Après avoir donné des conditions nécessaires et suffisantes afin qu'une équation linéaire du second ordre soit triviale ou réductible à la forme (1) par les mêmes transformations, l'A. montre que pour $n = 3$ une e. o. p. (1) est triviale si $\Delta_x R \leq 0$ (R est le scalaire de courbure de l'espace de Riemann V_n associé à $L[u]$ et Δ_x est l'opérateur de Laplace dans V_n). Dans la solution de certains problèmes de Cauchy pour les e. o. p. (1) autoadjointes interviennent les moyennes $u(t, x)$ des fonctions arbitraires $\varphi(x)$, définies dans V_n , sur les sphères S_t^x (de centre x et rayon t) de V_n . Dans les §§ 5—7 l'A. démontre que si V_n est un espace harmonique (pour tout point $x \in V_n$ l'équation de Laplace admet une solution fonction seulement de la distance géodésique au point x) ces moyennes sont les solutions du problème aux limites

(2) $\partial^2 u / \partial t^2 + f(t) \partial u / \partial t - \Delta_x u = 0, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial u(0, x) / \partial t = 0$
 $f(t) = (n-1)/t + \dots$ étant déterminé par la métrique de V_n . De plus, si le problème (2) admet une solution de la forme

$$u(t, x) = \int_{S_t^x} v(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

et si $n = 2$ ou $n = 3$ et $\frac{1}{2} f'(t) + \frac{1}{4} f^2(t) = \text{const}$, V_n est à courbure constante. En connexion avec ces résultats le dernier § contient deux théorèmes de moyenne pour les solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques autoadjointes du second ordre.

T. Hangan.

Hartman, Philip and Richard Sacksteder: On maximum principles for non-hyperbolic partial differential operators. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 6, 218—232 (1957).

Es sei $Lz \equiv Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} + Dz_x + Ez_y$ ein in einem beschränkten Gebiet T der (x, y) -Ebene erklärter Differentialoperator mit reellen Koeffizienten A, \dots, E , die in T den Ungleichungen $AC - B^2 \geq 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0$ und $A \geq 0$ genügen. Außerdem sei $z = z(x, y)$ eine reelle, in T zweimal stetig differenzierbare und für $T + T'$ stetige Funktion mit $Lz \geq 0$, und es sei $m = \max_{T+T'} z(x, y)$. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt: Wenn $z(x, y) \equiv m$ auf jeder offenen Teilmenge von T ausfällt und die Gleichung $z = m$ in einem Punkt $(x_0, y_0) \in T$ erfüllt ist, dann gibt es eine charakteristische Kurve, die durch (x_0, y_0) geht und auf der $z = m$ gilt.

E. Heinz.

Díaz, Plácido Jordán: Eine vektorielle Methode zur Bestimmung der Charakteristiken eines hyperbolischen Systems quasilinearer partieller Differentialgleichungen. Revista Soc. Cubana Ci. fis. mat. 4, 91—94 (1958) [Spanisch].

Si determinano per via vettoriale le condizioni di direzione e di compatibilità atte a definire le caratteristiche di un sistema iperbolico quasi lineare, cioè lineare nelle derivate parziali delle funzioni incognite.

G. Sestini.

Avila, Geraldo Severo de Souza: Simultaneous propagation of waves of more than one type. Notas Mat. Nr. 15, 29 p. (1959).

L'A. studia il problema di caratterizzare una soluzione di una particolare equazione iperbolica del tipo

$$(\partial/\partial t + c_1 \partial/\partial x)(\partial/\partial t + c_2 \partial/\partial x)u + m(\partial/\partial t + a \partial/\partial x)u = 0$$

essendo c_1, c_2, a, m quattro costanti ed inoltre c_1, c_2 tali che $c_2 < 0 < c_1$, soddisfacente alle condizioni $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ per $x > 0$, $u(0, t) = f(t)$ per $t > 0$. Per $c_1 = -c_2 = c, m = 0$ l'equazione si riduce all'equazione delle corde vibranti. L'A. riesce a caratterizzare l'andamento della soluzione al variare di t mediante un'interessante applicazione del metodo operativo (trasformazione di Laplace).

G. Lampariello.

Žitomirskij, Ja. I.: Das Cauchysche Problem für parabolische Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit wachsenden Koeffizienten. Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 1 (8), 55—74 (1959) [Russisch].

L'A. construit la matrice, constituant une solution fondamentale d'un système parabolique au sens de Petrovskij

$$(1) \quad \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = \sum_{r=0}^p \sum_{j=1}^N \sum_{k_s=p-r} A_{rij}^{(k_1, \dots, k_n)}(x) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u_j(x, t)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

($i = 1, \dots, N$; $x = (x_1, \dots, x_n)$) dont les coefficients $A_{0ij}^{(k_1, \dots, k_n)}(x)$ sont continus et bornés ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $p+1$ et les coefficients $A_{rij}^{(k_1, \dots, k_n)}(x)$ ($r = 1, \dots, p$) admettent les dérivées premières continues et satisfont aux inégalités

$$|D_x^m A_{rij}^{(k_1, \dots, k_n)}(x)| \leq K \left(\sum_{s=1}^n |x_s|^{k_r} + 1 \right) \quad (m = 0, 1; r = 1, \dots, p)$$

pour $-\infty < x_s < +\infty$ ($s = 1, \dots, n$), (D_x^m désignant la dérivation de l'ordre m par rapport aux variables x_i et $D_x^0 F$ étant la fonction F elle-même) l'exposant k_r étant inférieur à $r/(p-1)$. Soit $\Phi(x, \xi; t, \tau)$ cette matrice fondamentale. Si un vecteur-fonction $u_0(x) = \{u_0^{(1)}(x), \dots, u_0^{(N)}(x)\}$ satisfait à l'inégalité

$$|u_0(x)| \leq H \exp \left[h \sum_{s=1}^n |x_s|^{p'} \right] \quad (\text{où } p' = p/(p-1)),$$

la vecteur-fonction

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, \xi; t, 0) u_0(\xi) d\xi$$

constitue la solution de (1) satisfaisant à la condition initiale (2) $u(x, 0) = u_0(x)$. Cette solution est déterminée dans une couche $-\infty < x_s < +\infty$ ($s = 1, \dots, n$), $0 \leq t \leq T$, le nombre T dépendant de h , de l'ordre de (1) et de ses coefficients. Dans la classe de fonctions satisfaisant à l'inégalité

$$|u(x, t)| \leq H_1 \exp \left[h_1 \sum_{s=1}^n |x_s|^{p'} \right]$$

(H_1 et h_1 étant des nombres constants qui dépendent en général de la fonction $u(x, t)$) c'est la seule solution de (1) satisfaisant à la condition (2). Un tel théorème est inexact si l'on a $k_s > r/(p-1)$.

M. Krzyżański.

Krzyżański, M.: Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 131—135, russ. Zusammenfassg. X—XI (1959).

Consider the parabolic equation

$$(*) \quad \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(X, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^m b_j(X, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(X, t) u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(X, t)$$

in an unbounded domain D contained in the strip $0 < t < T$ of the $m+1$ -dimensional space of the variables $X, t \equiv x_1, x_2, \dots, x_m, t$. Let Σ be the part of the boundary of D , which does not lie on the characteristic hyperplane $t = T$ of (*) and suppose that Σ is nowhere tangent to any characteristic hyperplane $t = \text{const.}$ and that the form $\sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$ is positive defined in D . Under the assumption that the coefficients $a_{ij}(X, t)$ are bounded in D and $c(X, t), b_j(X, t)$ satisfy the inequalities $c(X, t) \leq \alpha \sum_{j=1}^m x_j^2 + \beta$, $|b_j(X, t)| \leq \alpha \sum_{j=1}^m |x_j| + \bar{\beta}$, $j = 1, \dots, m, (X, t) \in D$, where $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$, are non negative constants, the author shows that if u is a solution

of class C^2 in D of (*), continuous in $D + \Sigma$, which satisfies the inequality $|u(X, t)| \leq M \exp K \sum_{j=1}^m x_j^2$, $(X, t) \in D + \Sigma$, with M and K positive constants, then from the inequalities $f(X, t) \leq 0$ in D , $u(X, t) \geq 0$ on Σ , follows $u(X, t) \geq 0$ in D . This result enables the author to remove certain hypothesis from the statement of a theorem which he had previously proved [this Zbl. 84, 302, theorem III].

L. Cattabriga.

Mizohata, Sigeru: Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre. Proc. Japan Acad. 34, 687—692 (1958).

In der vorliegenden Arbeit wird die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem für eine große Klasse elliptischer Differentialgleichungen vierter Ordnung bewiesen. Diese Klasse umfaßt die folgenden Differentialoperatoren als Spezialfall: $P = P_1 P_2 - Q$. Dabei sind P_1 und P_2 elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit reellen Koeffizienten und Q ist ein Differentialoperator dritter Ordnung. Weiter wird gezeigt, daß die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem für alle elliptischen Differentialoperatoren vierter Ordnung mit konstantem Hauptteil gesichert ist. Die Beweise schließen sich eng an eine frühere Arbeit von Calderón an (dies. Zbl. 80, 303).

E. Heinz.

Mizohata, Sigeru: Le problème de Cauchy pour le passé pour quelques équations paraboliques. Proc. Japan Acad. 34, 693—699 (1958).

In der vorliegenden Arbeit wird die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Problem für eine parabolische Differentialgleichung der Form

$$\left(\frac{d}{dt} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, t) \right) u(x, t) = 0$$

bewiesen. Dabei sind die Koeffizienten $a_{ij}(x, t)$ reell und genügen für $x \in R^n$ und $0 \leq t \leq h$ der Ungleichung $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \delta^2 |\xi|^2$ ($\delta > 0$). Die Beweise schließen sich an eine frühere Arbeit des Verf. an (vgl. vorstehende Referat).

E. Heinz.

Frankl, F. I.: Ein Eindeutigkeitssatz für die Lösung einer Randwertaufgabe für die Gleichung $u_{xx} + \partial(u_y/y)/\partial y = 0$. Izvestija vysš. učebn. Zaved., Mat. 1 (8), 212—217 (1959) [Russisch].

The author refers to the Laval shaft problem, when the first critical velocity is passed and the partial differential equation for the bending, u , in the $\{x, y\}$ -plane should give the unique solution $u \equiv 0$. It is precisely the proof of the uniqueness of the equation which is subject of the present paper. The author superimposes upon the problem the proper boundary, uses the equation of the characteristic and puts some bounds upon the magnitudes of the first partial derivatives of u . The construction of the proof is based upon the method of Protter-Morawetz (C. S. Morawetz, this Zbl. 56, 319). The starting point is a double integral involving the equation in question and two functions, whose forms are determined in the process of constructing the proof. An integration by parts furnishes an expression consisting of five terms, which are treated separately. In the proof the author refers to Tricomi's equation and to the maximum-minimum principle. An extensive use is made of the fundamental technique of the function analysis. The boundary conditions require that $u \equiv 0$ on the curve associated with the physical representation of the rotating and bent shaft and that $u(x, y)$ for $y \rightarrow \infty$ approaches zero uniformly for all x admissible in the domain in question. Step by step the author deals with the five terms, mentioned above, showing separately that $u_x \equiv u_y \equiv 0$ and moreover that $u \equiv 0$ for $y \rightarrow 0$ (boundary condition), which must result in $u \equiv 0$ everywhere in the domain under consideration.

M. Z. v. Krzywoblocki.

Lieberstein, H. M.: A mixed problem for the Euler-Poisson-Darboux equation. *J. Analyse math.* **6**, 357—379 (1958); **Remark.** *Ibid.* **7**, 188 (1959).

The author considers the equation $u_{xx}^{[k]} = u_{yy}^{[k]} + k y^{-1} u_y^{[k]}$ with the initial conditions: $\lim_{y \rightarrow 0} u^{[k]}(x, y) = f_k(x)$, $u^{[k]}(x, x) = g_k(x)$. The solution has to be determined in the triangle T of vertices $(0, 0)$, $(a, 0)$ and $(a/2, a/2)$ so as to be twice continuously differentiable in a triangle containing T in its interior, except perhaps the side $y = 0$. Inspired by the research work of A. Weinstein [*Summa Brasil. Math.* **3**, 125—146 (1955)] the author solves the problem by an application of recursion formulas due to L. E. Payne, namely: $u^{[k]} = y u_y^{[k+2]} + (k+1) u^{[k+2]}$. He shows, first of all, that given a negative real number k , and a positive integer N such that $k + 2 \cdot N = \sigma$, where $-2 < \sigma \leq 0$, if $u^{[\sigma]}$ is a solution of the above mentioned equation, then

$$u^{[k]} = \sum_{j=0}^N b_{jN} y^j \frac{\partial^j u^{[\sigma]}}{\partial y^j}$$

where the b_{jN} are defined by recursion formulas. Now the problem under consideration depends on a solution for the values of σ just defined. It is easily seen that, with respect to the initial conditions, $f_k(x) = f_\sigma(x)$. But $g_\sigma(x)$ depends on $g_k(x)$ in a more complicated manner. The dependence is determined by the following recursion formula:

$$\frac{1}{2} x^{k+1} g_{k+2}(x) = \binom{k+2}{2} \int_0^x \xi^k g_k(\xi) d\xi - \binom{k+1}{2} x \int_0^x \xi^{k-1} g_k(\xi) d\xi + B + Cx,$$

B and C being constants. But it must be assumed that, for $-1 < \sigma \leq 0$: $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(2N)}(0) = 0$, and $g(\xi)$ possesses continuous derivatives up to the order $2N+1$ for $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}a$. For $-2 < \sigma \leq -1$ one must assume that $g^{(2N+1)}(0)$ also vanishes and that $g(\xi)$ is, for the same values of ξ , $(2N+2)$ -times continuously differentiable. The case $k = -2N$ is the object of a section. In this case the general methods apply but one must assume that $f(x)$ is $(N+2)$ -times continuously differentiable for $0 \leq x \leq a$, that $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(N)}(0) = 0$, that $g(x)$ is $(2N+1)$ -times continuously differentiable for $0 \leq x \leq a/2$ and that $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(2N)}(0) = 0$. The author, referring to Weinstein's results and his own, makes the remark that a study of the conditions of validity, in such questions, of the Huygens, or a generalized Huygens, principle might give a clue "as to why, or if, our physical world is four dimensional". The particular case of $-\infty < k < 0$ is discussed in some detail. Next it is shown that, in the case of $0 < k < 1$, the methods developed in the preceding sections are still available. The case of $k = 1/3$ is of particular interest on account of its application to the theory of transonic flow. In a last paragraph the author considers the non singular mixed problem when $k = -2N$ and when the initial conditions are $u^{[k]}(x, \beta) = F(x)$, $u^{[k]}(x, x) = 0$ where $\beta > 0$ and $F(\beta) = 0$, $F(x)$ being twice continuously differentiable. It is shown that the case of a non singular solution to the singular boundary problem does not arise when $k > 1$.

C. Racine.

Ladyženskaja, O. A.: Lösung des ersten Randwertproblems im Ganzen für quasilineare parabolische Gleichungen. *Trudy Moskovsk. mat. Obsč.* **7**, 149—177 (1958) [Russisch].

Le travail contient le développement des considérations concernant les résultats exposés dans une note récente (v. ce Zbl. **70**, 94).

M. Krzyżański.

Výborný, Rudolf: Über einige Eigenschaften der Lösungen von Randwertaufgaben einer parabolischen partiellen Differentialgleichung. *Czechosl. math. J.* **8** (83), 537—551, deutsche Zusammenfassg. 551 (1958) [Russisch].

Considérons l'opérateur

$$L_1[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u''_{x_i x_j} + \sum_{r,s=1}^m b_{rs}(x,t) u''_{t_r t_s} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) u'_{x_i} + \sum_{r=1}^m b_r(x,t) u'_{t_r} + c(x,t) u \quad (x = (x_1, \dots, x_n), t = (t_1, \dots, t_m))$$

aux coefficients bornés dans un domaine G de l'espace à $n + m$ dimensions du point $P(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m)$, où l'on a

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \lambda_i \lambda_j \geq m_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad \sum_{r,s=1}^m b_{rs}(x,t) \mu_r \mu_s \geq 0, \quad c(x,t) \leq 0$$

et son cas particulier

$$L_2[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) u'_{x_i} - u'_t + c(x,t) u.$$

Soit $K \subset G$ une sphère de rayon R et de centre à l'origine, $P_1(x^1, t^1)$ un point situé sur la surface \dot{K} de K , tel que $|x^1| > 0$. Soit $f(x,t) \leq 0$ une fonction déterminée à l'intérieur de K et $u(x,t)$ une fonction continue dans K et telle que $u(P_1) \leq 0$, $u(P) > u(P_1)$ pour $P \in K$, $P \neq P_1$. Si $L_1[u] = f(x,t)$ à l'intérieur de K , on a $\lim_{P \rightarrow P_1} \frac{u(P) - u(P_1)}{|P - P_1|} > 0$ lorsque P tend vers P_1 suivant une demi-droite

issue de P_1 et formant avec la normale à \dot{K} au point P_1 un angle inférieur à $\frac{1}{2}\pi$. On en déduit des théorèmes sur les extrema et des théorèmes d'unicité des solutions du second et troisième problèmes aux limites pour l'équation de la forme $L_2[u] = F(x,t)$ analogues à ceux de Giraud (ce Zbl. 5, 354), E. Hopf (ce Zbl. 48, 78), O. Olejnik (ce Zbl. 46, 104); voir aussi C. Miranda, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico (1955, ce Zbl. 65, 85). Ces théorèmes s'étendent à l'équation non linéaire

$$u'_t = F(x_i, t, u, u'_{x_j}, u'_{x_k x_l}) \quad (i, j, k, l = 1, \dots, n).$$

Dans la seconde partie du travail l'A. établit certaines évaluations des solutions de ces problèmes dans le cas de l'équation linéaire. Ces évaluations permettent de démontrer que les solutions des problèmes correspondants dépendent d'une manière continue des coefficients de l'équation $L_2[u] = F$, de la fonction F et des fonctions intervenant aux conditions aux limites.

M. Krzyżaniński.

Heinz, Erhard: On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. Analyse math. 5, 197—272 (1957).

Verf. untersucht Differentialgleichungssysteme der Gestalt

(*) $\Delta x_m = Q_m(\partial x_1/\partial u, \dots, \partial x_n/\partial u; \partial x_1/\partial v, \dots, \partial x_n/\partial v; x_1, \dots, x_n; u, v)$ ($m = 1, \dots, n$), wobei die Q_m quadratische Polynome in den Ableitungen $\partial x_1/\partial u, \dots, \partial x_n/\partial v$ sind, deren Koeffizienten von den x_1, \dots, x_n und u, v in hinreichend regulärer Weise abhängen. Solche Systeme treten bei den verschiedensten Problemen in der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen und in der Differentialgeometrie auf. Von den Lösungen wird zweimalige stetige Differenzierbarkeit in einem Gebiet D der (u, v) -Ebene gefordert. Der Beweis der Existenz von Lösungen beruht auf Apriori-Ungleichungen, in denen die Ableitungen $\partial x_1/\partial u, \dots, \partial x_n/\partial v$ durch die absoluten Beträge von x_1, \dots, x_n abgeschätzt werden. Für Normierungszwecke wird $x_1(u, v)^2 + \dots + x_n(u, v)^2 \leq 1$ angenommen. Mit den Abkürzungen

$$X(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_n(u, v)) \quad \text{und} \quad |X| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

können von (*) dann die für $(u, v) \in D$ gültigen Ungleichungen (1) $|X(u, v)| \leq 1$ und (2) $|\Delta X| \leq a(|X_u|^2 + |X_v|^2) + b$ gefolgert werden. Hinsichtlich der Apriori-Abschätzungen formuliert Verf. drei Probleme. Problem P_1 (Abschätzungen im Inneren): (1) und (2) seien erfüllt, und es sei B ein Teilbereich von D . Zu beweisen, daß eine Abschätzung der Form $|X_u| + |X_v| \leq \gamma_1(a, b, B)$ gilt. Problem P_2 :

D sei die Einheitskreisscheibe der (u, v) -Ebene. (1) und (2) seien erfüllt, und $X(u, v)$ sei stetig in \bar{D} . Zu beweisen, daß sich der Stetigkeitsmodul von X durch a, b und den Stetigkeitsmodul von $\bar{X}(q) = X(\cos q, \sin q)$ abschätzen läßt. Problem P_3 : Unter den Voraussetzungen von P_2 und der Annahme, daß $\bar{X}(q)$ genügend regulär ist, soll in D eine Ungleichung der Form $|X_u| + |X_v| \leq \gamma_2(a, b, \bar{X}(q))$ hergeleitet werden. Alle drei Probleme können offensichtlich für harmonische Funktionen ($Q_m = 0$) gelöst werden. Hinsichtlich dieser Probleme liegen in der Literatur verschiedene Ergebnisse vor, insbesondere von S. Bernstein [Math. Ann. **69**, 82–136 (1910)], E. Hopf (dies. Zbl. **2**, 340), J. Schauder (dies. Zbl. **8**, 255), M. Nagumo (dies. Zbl. **57**, 82), Verf. (dies. Zbl. **55**, 153), H. Werner (dies. Zbl. **77**, 349). Unter Benützung der dort entwickelten Methoden, potentialtheoretischer Hilfssätze (die mitbewiesen werden), des Ähnlichkeitsgesetzes von L. Bers und I. N. Vekua und einer Reihe scharfsinniger neuer Abschätzungen beweist Verf., daß die Probleme P_1, P_2, P_3 im Falle einer Dimension für alle positiven a und b und im Falle $n \geq 2$ für die folgenden Wertebereiche lösbar sind: P_1 für $a < 1$, alle b ; P_2 und P_3 für $a < \frac{1}{2}$, alle b . Auf diese Sätze gestützt, untersucht Verf. im weiteren den Fall $n = 2$ (wo dann x_1, x_2 durch x, y ersetzt werden) unter der Annahme, daß D der Einheitskreis ist, und daß die Abbildung $(u, v) \rightarrow (x, y)$ eindeutig ist. Für ein bei seinem Studium Monge-Ampèrescher Gleichungen auftretendes spezielles System der Form (*) hatte H. Lewy das Nicht-Verschwinden der Funktionaldeterminante $x_u y_v - x_v y_u$ bewiesen (dies. Zbl. **17**, 159). Unglücklicherweise läßt sich deren Betrag im allgemeinen nicht von unten abschätzen. Dagegen ist es, wie Verf. zeigt, möglich, für die Quadratsumme $x_u^2 + y_u^2 + x_v^2 + y_v^2$ in jedem Teilbereich B von D universelle Abschätzungen von unten zu finden. Im Falle harmonischer Abbildungen hatte Verf. eine solche Abschätzung schon früher hergeleitet (dies. Zbl. **48**, 154), welche später von P. Berg (dies. Zbl. **79**, 299) auf die Abbildungen durch Lösungen linearer elliptischer Differentialgleichungen verallgemeinert wurde. Der letzte Teil der Arbeit ist dem Studium des (im Falle analytischer Koeffizienten schon von H. Lewy betrachteten) Systems

$$\begin{aligned} \Delta x &= h_1(x, y)(x_u^2 + x_v^2) + h_2(x, y)(x_u y_u + x_v y_v) + h_3(x, y)(y_u^2 + y_v^2) + h_4(x, y)(x_u y_v - x_v y_u) \\ \Delta y &= \bar{h}_1(x, y)(x_u^2 + x_v^2) + \bar{h}_2(x, y)(x_u y_u + x_v y_v) + h_3(x, y)(y_u^2 + y_v^2) + h_4(x, y)(x_u y_v - x_v y_u) \end{aligned}$$

gewidmet. h_1, \dots, h_4 sind stetig differenzierbare Funktionen von x und y . Von den Lösungen wird dabei noch vorausgesetzt, daß ihr Dirichlet-Integral beschränkt ausfällt:

$$\iint_{u^2 + v^2 < 1} (x_u^2 + y_u^2 + x_v^2 + y_v^2) du dv \leq N < \infty.$$

Es gelingt Verf., Abschätzungen der Form $|x_u y_v - x_v y_u| \geq \lambda > 0$ herzuleiten. Die Schranke λ hängt im besonderen Falle, wo $h_1 = \bar{h}_2, h_2 = \bar{h}_3, h_3 = \bar{h}_1 = 0$ sind, von dem absoluten Betrag der Koeffizienten h , von N und vom Abstand des Punktes (u, v) vom Rande des Einheitskreises ab. Im Falle allgemeiner Koeffizienten tritt auch noch der Betrag ihrer Ableitungen hinzu.

Johannes Nitsche.

Bergendal, Gunnar: Sur la convergence et la sommabilité des transformations de Fourier associées à un opérateur différentiel elliptique. C. r. Acad. Sci., Paris **247**, 1820–1822 (1958).

Es sei S eine offene Punktmenge im R^n und $a(D) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha D^\alpha$ ein für $f(x) \in C_0^\infty(S)$ erklärter elliptischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Ferner sei A eine halbbeschränkte Fortsetzung von a und $\{E_\lambda\}$ die zu A gehörige Spektralschar. Dann ist $E_\lambda f(y) = \int_S e(\lambda; x, y) f(x) dx$, wobei der Integral-kern $e(\lambda; x, y)$ zum Carlemanschen Typus gehört. In der vorliegenden Arbeit

wird das Verhalten der Spektralfunktion $e(\lambda; x, y)$ für $\lambda \rightarrow \infty$ untersucht, und es werden Abschätzungen gewonnen, die in jeder kompakten Teilmenge von S bzw. $S \times S$ gelten.
E. Heinz.

Zaidman, S.: Sur la presque-périodicité des solutions de l'équation des ondes non homogène. J. Math. Mech. 8, 369—382 (1959).

Soit L un opérateur autoadjoint elliptique d'ordre 2 dans un ouvert Ω de R^n avec la frontière Γ . Soit H la complétée de $D(\Omega)$ pour la norme $(Lu, u)^{1/2}[(\cdot, \cdot), \text{ le produit scalaire dans } L^2(\Omega)]$. On sait classiquement (Muckenhoupt, Bochner, Bochner et v. Neumann, Sobolev) que les solutions u de l'équation des ondes homogène: $u_{tt} + Lu = 0$, avec la condition aux limites: $u|_{\Gamma} = 0$, sont presque-périodiques au sens de Bochner (voir ce Zbl. 7, 112) considérées comme fonctions à valeurs dans H . Dans cet article on étend ces résultats au cas de l'équation des ondes non homogène: Théorème. Soit u une solution de l'équation: $u_{tt} + Lu = f$, f étant presque-périodique comme fonction à valeurs dans $L^2(\Omega)$, avec la même condition aux limites, telle que la trajectoire de u soit relativement compacte dans H . Alors u est presque-périodique comme fonction à valeurs dans H . La démonstration utilise un résultat antérieur de l'A., dans le cas abstrait [voir Rend. Mat. e Appl. 16, 197—206 (1957)]. L'A. donne aussi un exemple qui montre qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse de compacité du théorème, dans le cas non homogène. J. Peetre.

Bouligand, G.: Sur quelques problèmes non linéaires. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 38 (offert en hommage à M. Fréchet), 201—212 (1959).

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit einigen nichtlinearen Problemen der Analysis, insbesondere solchen, die eine „lineare Resolvente“ besitzen (d. h. auf ein lineares Problem zurückführbar sind). Im 1. Teil wird die Aufgabe betrachtet, eine in einem (hinreichend regulären) Gebiet $D \subset R^n$ harmonische Funktion u zu

finden, für die $\sum_1^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2$ vorgeschriebene Randwerte $\varphi(s)$ annimmt. Für $n = 2$ erhält

man eine lineare Resolvente wie folgt: Man bestimmt eine in D holomorphe Funktion f , so daß $\operatorname{Re} \log f'(z) = \log |f'(z)|$ die Randwerte $\frac{1}{2} \log \varphi(s)$ ($\varphi > 0$) annimmt. Der Realteil (ebenso wie der Imaginärteil) von f ist dann eine Lösung der Randwertaufgabe. Für $D = \{z: |z| < 1\}$ führt mit f auch jedes $g: g'(z) = z^p f'(z)$ (p eine natürliche Zahl) zu einer Lösung, was die Vielfalt möglicher Lösungen demonstriert. Im 2. Teil wird auf die Riccatische Differentialgleichung hingewiesen, und das Prinzip der „linearen Resolvente“ an Beispielen aus Hydrodynamik und Differentialgeometrie (Minimalflächen, Isometrie von Flächen) mit Hinweisen auf das Werk von Darboux erläutert. [Bem. des Ref.: Die aus dem oben genannten Randwertproblem hergeleitete Integrodifferentialgleichung (ef), p. 202, ist mit diesem nicht, wie Verf. behauptet, äquivalent. Beispiel: $D = \{z: |z| < \frac{1}{2}\}$, $n = 2$, die vorgegebenen Randwerte seien $= 1 + x$ auf $|z| = \frac{1}{2}$. u mit $u(x, y) = \frac{2}{3}(1 + x)^{3/2}$ genügt (ef), ist aber nicht harmonisch in D].
H. Schaefer.

Gask, H. and J.-E. Roos: A simple model from potential theory. Nordisk mat. Tidskrift 6, 5—20, engl. Zusammenfassg. 55 (1958) [Schwedisch].

Les distributions de charge considérées sont des mesures ponctuelles $e = e_x$ à support compact contenu dans l'ensemble des points $x = n \delta$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) de la droite réelle, où $\delta > 0$ est fixe. La force attirante entre deux points, qui sont à une distance r et qui portent les charges e et f respectivement, est $K = -ef\psi(r)$, où $\psi(r)$ tend vers 0 en décroissant lorsque $r \rightarrow \infty$. On place la charge unité E_0 à l'origine; par définition, le travail nécessaire pour mouvoir la charge unité de $x + \delta$ en x est égal à $\delta\psi(|x|)$. Le potentiel engendré par E_0 est alors $\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \delta\psi(|x| + h\delta)$. La fonction $\varphi(x)$ est paire, $\varphi(x) < \varphi(0)$ si $x \neq 0$,

$\varphi(x)$ est convexe pour $x > 0$ et $\varphi(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \infty$. Le potentiel engendré par une distribution de charges e est $P(x) = \sum_y \varphi(x-y) e_y$ et l'énergie de e est $I(e) = \frac{1}{2} \sum_x P(x) e_x = \frac{1}{2} \sum_{x,y} \varphi(x-y) e_x e_y$. Cette énergie possède la propriété fondamentale du cas newtonien: $I(e) \geq 0$ et $I(e) = 0$ si et seulement si $e = 0$ [cf. H. Cartan, Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math. phys., II. Ser. 22, 221–280 (1947; ce Zbl. 36, 342), voir p. 234]. On définit un espace préhilbertien en posant $(e|f) = I(e, f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} \varphi(x-y) e_x f_y$ et on démontre que l'ensemble des distributions qui ont leurs supports dans un compact fixe est complet. D'ici on déduit, en utilisant la méthode de projection de Cartan (loc. cit., p. 239) des résultats analogues à ceux de la théorie du potentiel newtonien: l'existence d'une distribution d'équilibre sur un conducteur et le principe du maximum (loc. cit., p. 234). Le potentiel d'équilibre est constant sur le conducteur et la distribution d'équilibre d'une charge totale positive ne comporte pas de charges négatives. Finalement si $\varphi(x)$ est linéaire dans un intervalle $0 \leq x \leq l$ et la longueur du conducteur est $\leq l$, alors la distribution d'équilibre ne charge que les deux extrémités du conducteur [cf. Frostman, Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. 3 (1935; ce Zbl. 13, 63), p. 39]. J. Horváth.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Mysovskich, I. P.: Ein Brief an die Redaktion. Mat. Sbornik, n. Ser. 47 (89), 143— (1959) [Russisch].

Verf. korrigiert einige kleine Druckfehler seiner Arbeit: „Eine Darstellung der Resolvente der Summe zweier Kerne“ (vgl. dies. Zbl. 83, 328), die aber die Lesbarkeit seiner Arbeit nicht beeinträchtigt. H. Pachale.

Dol'berg, M. D.: The development of a positive kernel into a bilinear series. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 945—948 (1958) [Russisch].

L'A. dimostra il seguente teorema I. Ogni nucleo simmetrico, positivo e continuo $K(x, s)$, $a \leq x, s \leq b$, è sviluppabile in una serie bilineare

$$(a) \quad K(x, s) = R(x, s) + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b R_{i-1}(x, t) dp_i(t) \int_a^b R_{i-1}(s, t) dp_i(t)}{\int_a^b \int_a^b R_{i-1}(x, s) dp_i(x) dp_i(s)},$$

uniformemente convergente in ambedue variabili. Il nucleo $R(x, s)$ lo è pure simmetrico, positivo e continuo ed hanno luogo le uguaglianze $\int_a^b R(x, s) dp_i(s) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, ove $\{p_i(x)\}$ è una successione di funzioni a variazione limitata e

$$(b) \quad R_0(x, s) = K(x, s), R_n(x, s) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} K(x, s) & \Phi_1(x) \cdots \Phi_n(x) \\ \Phi_1(s) & \\ \vdots & \\ \Phi_n(s) & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta_n \\ \end{vmatrix}, n > 0,$$

$$(c) \quad \Phi_i(x) = \int_a^b K(x, s) dp_i(s), a_{ij} = \int_a^b \Phi_i(x) dp_j(x), \Delta_n = |a_{ij}|_{i,j=1}^n \neq 0, n = 1, 2, \dots$$

Si discute poi il problema di notevole importanza nel calcolo numerico concernente la scelta della successione $\{p_i(x)\}$ in modo che la convergenza della serie (a) sia (in un certo senso che si precisa e che ne trae l'origine in un noto teorema del massimo-minimo del R. Courant) la migliore possibile. D. J. Mangerson.

Pokornyj (Pokorny), V. V.: On the convergence of formal solutions of non-linear integral equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 711—714 (1958) [Russisch].

L'A. s'occupe de l'équation d'Urysohn $\varphi(x) = \int_0^1 k(x, y, \varphi(y); \alpha) dy$, en supposant que k admet un développement formel:

$$k(x, y, z, \alpha) \equiv k(x, y) z - \sum_i k_i(x, y) \alpha_i + \Gamma(x, y, z, \alpha)$$

où
$$\Gamma(x, y, z, \alpha) = \sum_{k_0 + k_1 + \dots + k_n \geq 2} k_{k_0 k_1 \dots k_n} z^{k_0} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n}.$$

Il démontre que si 1 n'est pas une valeur propre de $k(x, y)$, l'équation

$$\varphi(x, \alpha) = \int_0^1 k(x, y) \varphi(y, \alpha) dy + \sum_i \alpha_i \int_0^1 k_i(x, y) dy + \int_0^1 \Gamma(x, y; \varphi(y, \alpha); \alpha) dy$$

admet une solution formelle unique

$$\varphi(x, \alpha) = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m \geq 1} \varphi_{k_1 k_2 \dots k_m}(x) \cdot \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_m^{k_m}.$$

Le cas où 1 est une valeur propre est lui aussi pris en considération. Pour $m = 1$, si $|k_{k_0 k_1}(x, y)| \leq A < +\infty$ (A const) et si 1 est une valeur propre simple de $k(x, y)$, alors chaque solution formelle est une solution de l'équation, pour des valeurs assez petites de α .

A. Haimovici.

Miller, J. B.: A continuum of Hilbert spaces in L^2 . Proc. London math. Soc., III. Ser. 9, 208—226 (1959).

Teil I: \mathfrak{G}_λ^p ($\lambda > 0$) ist die Klasse der Funktionen $f(x)$, zu denen es Funktionen $f^{(\lambda)}(t)$ gibt derart, daß $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^\infty (t-x)^{\lambda-1} f^{(\lambda)}(t) dt$ und $t^\lambda f^{(\lambda)}(t) \in L^p(0, \infty)$ ist. Für $\lambda = 0$ soll $\mathfrak{G}_0^p = L^p$ sein. Die Derivierten beliebiger Ordnung α von $f(x)$ werden definiert durch $f^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda-\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\lambda-\alpha-1} f^{(\lambda)}(t) dt$. Sie existieren für $\alpha < \lambda$. $f(x)$ und seine Derivierten erfüllen „klein o “-Lipschitzbedingungen (so ist z. B. $f(x+h) - f(x) = o(h^{\lambda-1/p})$ für $1/p < \lambda < 1 + 1/p$) und integrierte Lipschitzbedingungen. Eine Bedingung der letzteren Art ist auch hinreichend dafür, daß $f(x) \in \mathfrak{G}_\lambda^p$: Wenn $f(x) \in L^p$ und $\int_0^\infty x^{\lambda p} |f(x+h) - f(x)|^p dx = O(h^{\mu p})$ für ein $\mu > \lambda$, $1 - 1/p < \lambda < 1$, ist, so ist $f(x) \in \mathfrak{G}_\lambda^p$. Teil II handelt speziell von \mathfrak{G}^2 . Mit dem skalaren Produkt

$$(f, g)_\alpha = \int_0^\infty t^\alpha f^\alpha(t) \overline{t^\alpha g^\alpha(t)} dt, \quad 0 \leq \alpha \leq \lambda,$$

ist \mathfrak{G}_λ^2 für $\alpha = \lambda$ ein Hilbert-Raum. Die \mathfrak{G}_λ^2 mit dem reellen Parameter λ bilden also ein Kontinuum von Hilbert-Räumen (daher die Überschrift). Wenn die Folge $f_n(x) \in \mathfrak{G}_\lambda^2$ im Sinne der Metrik von \mathfrak{G}_λ^2 ($\lambda > \frac{1}{2}$) konvergiert, so existiert $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ im Sinne der punktweisen Konvergenz und gehört zu \mathfrak{G}_λ^2 . Dies erklärt das von früher her bekannte Resultat, daß \mathfrak{G}_λ^2 nicht bloß gegen die Transformation $T^* f(x) = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N}^N f(t) k(xt) dt$ ($k = \text{Watson-Kern}$), sondern auch gegen $T f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N}^N f(t) k(xt) dt$ invariant ist. T ist in dem Hilbert-Raum \mathfrak{G}_λ^2 ($\lambda > \frac{1}{2}$) eine abgeschlossene, selbstadjungierte unitäre Transformation.

G. Doetsch.

Lax, Peter D.: Translation invariant spaces. Acta math. 101, 163—178 (1959).

Let h denote the space of complex valued square integrable functions $u(x)$ defined for real x and vanishing for $x < 0$ and let H denote the space of Fourier

transforms $U(z)$ of functions of h . It is known that every function U of H can be extended to be holomorphic in the upper half plane so that

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^*(i\tau + \sigma) U(i\tau + \sigma) d\sigma$$

is bounded for positive τ and conversely, where $U^*(z) = \overline{U(\bar{z})}$. The author gives a representation theorem for the subspace R of H corresponding to the subspace r of h which is translation invariant to the right, that is if $g(x) \in r$ then $g(x+s) \in r$ for all positive s . It is proved, by using Hilbert space techniques, that every non-empty closed subspace R of H consisting of the Fourier transforms of a right translation invariant subspace r of h is of the form FH where $F(z)$ is holomorphic in the upper half plane, $|F(z)| \leq 1$ and $= 1$ when z is real and is uniquely determined by R but for a multiplicative complex constant of modulus one. A corresponding result is proved for vector valued functions, the values of the functions being in a finite dimensional Hilbert space over the complex number field. The representation theorems are used to reduce the problem of division in the ring of analytic functions bounded in the upper half plane to the Boolean algebra of r spaces. An interesting application to the proof of the Titchmarsh convolution theorem is given, namely, that if $c_1(x)$ and $c_2(x)$ are functions of $L_1(0, \infty)$ and $c(x) = \int_0^{\infty} c_1(y) c_2(x-y) dy$, then $d = d_1 + d_2$ where d, d_1, d_2 are respectively the largest numbers such that the supports of c, c_1 and c_2 are contained in $x \geq d, d_1$ and d_2 .

V. Ganapathy Iyer.

Hirschman jr., I. I.: On multiplier transformations. Duke math. J. 26, 221—242 (1959).

Wird einer Funktion $F^\wedge(\vartheta)$ ihr Fourier-Koeffizient $F(n) = \int_{\mathfrak{I}} F^\wedge(\vartheta) e^{-2\pi i n \vartheta} d\vartheta$ (\mathfrak{I} = die reellen Zahlen mod. 1) zugeordnet, so ist dem Produkt zweier Funktionen F^\wedge und T^\wedge die Faltung ihrer Koeffizienten F und T' zugeordnet: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n-k) T'(k)$.

Diese ist also gleich $\int_{\mathfrak{I}} T^\wedge(\vartheta) F^\wedge(\vartheta) e^{-2\pi i n \vartheta} d\vartheta$. Das letztere Integral wird als eine durch T^\wedge definierte, auf die Folge $F(n)$ ausgeübte Transformation T aufgefaßt, die als „Multiplikator-Transformation“ symbolisch $(TF)(n)$, bezeichnet wird. Dabei werden für $F(n)$ und T^\wedge folgende Klassen zugrunde gelegt: Es sei

$L^p(\mathfrak{I})$ der Raum der Folgen $F(n)$ mit $\|F\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n)|^p \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$.

Für $F(n) \in L^2(\mathfrak{I})$ ist $F^\wedge(\vartheta) = \text{l.i.m.} \sum F(n) e^{2\pi i n \vartheta}$. T^\wedge sei eine auf \mathfrak{I} beschränkte meßbare Funktion. Die Transformation T ist dann definiert für $F(n) \in L^2(\mathfrak{I}) \cap L^p(\mathfrak{I})$, ihre Norm ist in üblicher Weise $\|T\|_p = \sup \|TF\|_p / \|F\|_p$. Wenn $\|T\|_p < \infty$, so hat T eine eindeutige Erweiterung als beschränkte Transformation auf ganz $L^p(\mathfrak{I})$. Es werden nun Bedingungen aufgestellt, unter denen T auf $L^p(\mathfrak{I})$ beschränkt ist, z. B. Theorem 2a: Wenn $T^\wedge(\vartheta) \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$), so ist T auf $L^p(\mathfrak{I})$ beschränkt für $2/(1+2\alpha) < p < 2/(1-2\alpha)$. Theorem 2f: T^\wedge heißt von beschränkter β -Variation, wenn $\sum_{k=0}^{n-1} |T^\wedge(\vartheta_{k+1}) - T^\wedge(\vartheta_k)|^\beta$ für alle

$\vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_n = \vartheta_0 + 1$ beschränkt ist. Wenn T^\wedge diese Eigenschaft für $\beta \geq 1$ hat, so ist T beschränkt auf $L^p(\mathfrak{I})$ für $2\beta/(\beta+1) < p < 2\beta/(\beta-1)$. — In einem 2. Teil wird eine analoge Transformation für Funktionen definiert, die umgekehrt darauf basiert, daß dem Produkt der Fourier-Koeffizienten zweier Funktionen die Faltung der Funktionen zugeordnet ist. Es werden die Analoga zu einigen Sätzen des ersten Teils bewiesen.

G. Doetsch.

Korenbljum, B. I.: Wiensers Verallgemeinerung des Tauberschen Satzes und harmonische Analyse der rasch zunehmenden Funktionen. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. **7**, 121—148 (1958) [Russisch].

Diese Abhandlung enthält einen vollständigen Bericht des Themas einer Reihe früherer Artikel [dies. Zbl. **50**, 60; **67**, 290; Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 280—282 (1956); **115**, 226—229 (1957); Uspechi mat. Nauk **12**, Nr. 1 (73), 201—203 (1957)]. Es sei $L(-\infty, \infty; \chi)$ ($\chi > 0$) die Banachsche Algebra aller meßbaren komplexwertigen Funktionen auf $]-\infty, \infty[$, für welche

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{\chi|t|} dt < \infty, \text{ und } f * g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-t) g(t) dt.$$

Es sei $F(x + iy)$ die Fourier Transformierte von $f \in L(-\infty, \infty; \chi)$:

$$F(x + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(x+iy)t} dt, \quad |y| \leq \chi.$$

Zuerst bemerkt Verf., daß

$$\gamma^{\pm}(f) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\log |F(x)|}{\exp(\pi |x|/2\chi)}$$

endlich und ≤ 0 ist. [Für dieses Resultat gibt er keinen Beweis: es folgt nicht ganz trivialerweise aus Satz B der Abhandlung von Ahlfors und Heins (vgl. dies. Zbl. **36**, 46)]. Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit ist folgendes. Es sei M eine Untermenge von $L(-\infty, \infty; \chi)$ und I_M das von M erzeugte abgeschlossene Ideal in $L(-\infty, \infty; \chi)$. Es gilt $I_M = L(-\infty, \infty; \chi)$ dann und nur dann, wenn: 1. für jede komplexe Zahl $x + iy$, $|y| \leq \chi$, es ein $f \in I_M$ gibt, für welches $F(x + iy) \neq 0$; 2. $\gamma^+(M) = \gamma^-(M) = 0$, wobei $\gamma^{\pm}(M) = \sup \{\gamma^{\pm}(f) : f \in M\}$. Hierin weist die Algebra $L(-\infty, \infty; \chi)$ einen wichtigen Unterschied von $L(-\infty, \infty)$ auf: nach einem berühmten Satz von N. Wiener stimmt ein abgeschlossenes Ideal I in $L(-\infty, \infty)$ mit $L(-\infty, \infty)$ dann und nur dann überein, wenn es für jede reelle

Zahl x ein $f \in I$ gibt, für welches $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt \neq 0$. Der Beweis des Hauptsatzes

ist ziemlich lang, und einige Einzelheiten der Rechnung sind nicht vollständig klar. Ein unwesentlicher Fehler: für das letzte e^{itx} auf Zeile 9, Seite 129, ist $e^{i(\xi+in)x}$ zu lesen. Aus dem Hauptsatz zieht Verf. verschiedene Folgerungen, z. B. neue Sätze vom Tauberschen Typ, eine Definition des Spektrums für raschzunehmende Funktionen, einen Satz vom Beurlingschen Typ über Translationen von raschzunehmenden Funktionen. E. Hewitt.

Watanabe, Yoshikatsu and Yoshihiro Ichijô: Zur Laplace'schen asymptotischen Formel. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math. **9**, 1—17 (1958).

Im Anschluß an eine Note von Y. Ichijô (s. dies. Zbl. **66**, 46) geben Verff. asymptotische Formeln für das Integral $\int_a^b \varphi(x) [f(x)]^n dx$, $n \rightarrow \infty$, unter der Voraussetzung, daß $f(x) \geq 0$ ist und $F(x) = \log f(x)$ sein Maximum im unteren Randpunkt a , bzw. im oberen Randpunkt b , bzw. in einem inneren Punkt c erreicht. So ergibt sich z. B. in dem ersten Fall, wenn $F'(a) \neq 0$ ist, der Ausdruck

$$\frac{\exp[nF(a)]}{-nF'(a)} \left\{ \varphi(a) - \frac{1}{nF'(a)} \left[\varphi'(a) - \varphi(a) \frac{F''(a)}{F'(a)} \right] + \dots \right\},$$

wobei die Glieder mit n^{-2} und n^{-3} explizit angegeben sind. Die Methode wird durch zahlreiche Beispiele illustriert, unter denen sich die Stirlingsche Formel und die in der Statistik wichtige Fischersche Formel finden. G. Doetsch.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Veksler (Vexler), A. I.: On Archimedean principle in semiordered factor lineals. Doklady Akad. Nauk SSSR **121**, 775—777 (1958) [Russisch].

Le résultat principal énoncé dans la Note est le suivant: Soit X un K -idéale archimédien et N son sous-idéal normal; alors la condition pour que le linéal X/N soit archimédien est équivalente à la suivante: (A_1) soient $x_n \in N$, $x_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) et la suite $\{x_n\}$ bornée dans X , $\lambda_n \geq 0$ et $\lambda_n \rightarrow 0$; alors si $x \in X$ et $0 \leq x \leq y$ étant la borne supérieure de $\{\lambda_n x_n\}$, il s'ensuit $x \in N$. On énonce encore cinq résultats constituant des cas particuliers du théorème principal. *A. Haimovici.*

Rajkov, D. A.: Über eine Eigenschaft der nuklearen Räume. Uspechi mat. Nauk **12**, Nr. 5 (77), 231—236 (1957) [Russisch].

L'A. démontre qu'un espace localement convexe complet E dont la topologie est donnée par une suite de normes $\{\|\cdot\|_n\}$ et qui est nucléaire au sens de Grothendieck est aussi nucléaire au sens de Gel'fand, c'est-à-dire que pour toute série de fonctionnelles linéaires et continues, faiblement absolument convergente, il existe un entier n_0 tel que $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{n_0} < \infty$. *G. Marinescu.*

Pârvu, Monica Pavel: Sur des espaces linéaires. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. **20**, 27—30, russ. und französ. Zusammenfassg. 31 (1958) [Rumänisch].

L'A. observe que certains théorèmes concernant l'équation résolvente dans les algèbres de Banach restent valables, sans aucune modification, ni dans les énoncés, ni dans les démonstrations, si l'on remplace la condition $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ par $\|\lambda x\| = |\lambda|^r \|x\|$, avec $0 < r \leq 1$. *G. Marinescu.*

Gelbaum, Bernard R.: Conditional and unconditional convergence in Banach spaces. Anais Acad. Brasil. Ci **30**, 21—27 (1958).

Soient E un espace de Banach, (x_n) une base de E , $\Delta = \{-1, +1\}$, $G = \Delta \times \Delta \times \dots$, μ_{∞} la mesure de Haar sur G . Pour $x = \sum \xi_n x_n \in E$, soit $C(x)$ l'ensemble des $g = (\varepsilon_n(g)) \in G$ tels que $\sum \varepsilon_n(g) \xi_n x_n$ existe. Soit $C = \bigcap_{x \in E} C(x)$. Alors, $\mu_{\infty}(C) = 0$ ou $C = G$. Autres résultats sur C et sur des sous-ensembles analogues de G . *J. Dixmier.*

Gelbaum, Bernard R.: Notes on Banach spaces and bases. Anais Acad. Brasil. Ci. **30**, 29—36 (1958).

Soit $0 < \varepsilon \leq 1$. Dans tout espace de Banach de dimension infinie, il existe un sous-espace vectoriel fermé E de dimension infinie et une suite de vecteurs (x_n) engendrant E possédant la propriété suivante: pour tout n , la boule unité du sous-espace engendré par (x_1, \dots, x_n) est à une distance $\geq 1 - \varepsilon$ du sous-espace engendré par $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$. Autres remarques concernant diverses notions de bases. *J. Dixmier.*

Pelezyński, A.: On the isomorphism of the spaces m and M . Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **6**, 695—696, russ. Zusammenfassg. LV (1958).

Soient m l'espace des suites bornées réelles $x = (a_n)$ avec la norme $\|x\| = \sup_n |a_n|$ et M l'espace des classes d'équivalence des fonctions numériques bornées et mesurables, au sens de Lebesgue, dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ avec la norme $\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$. Dans ce travail l'A. prouve que les deux espaces ci-dessus sont isomorphes (i. e. il existe une application linéaire et biunivoque de m sur M , qui conserve la topologie). L'A. énonce aussi la conjecture que deux espaces de Banach X_i ($i = 1, 2$), tels que pour tout espace de Banach $X'_i \supseteq X_i$ il existe une projection (i. e. un opérateur linéaire et idempotent) P_i de X'_i sur X_i avec $\|P_i\| \leq 1$, sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension linéaire (i. e. l'espace X_1 est isomorphe à un sous-espace de X_2 et X_2 est isomorphe à un sous-espace de X_1). *A. Mallios.*

Singer, Ivan: Sur un dual du théorème de Hahn-Banach et sur un théorème de Banach. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 25, 443—446 (1959).

Einige einfache ergänzende Bemerkungen zu vom Verf. früher bewiesenen Sätzen (dies. Zbl. 82, 109) sowie kürzere Beweise [vgl. hierzu auch die Note des Ref., Arch. der Math. 10, 366—372 (1959)].
H. Günzler.

Silverman, R. J. and Ti Yen: The Hahn-Banach theorem and the least upper bound property. Trans. Amer. math. Soc. 90, 523—526 (1959).

Ein teil-geordneter reeller linearer Raum V hat die Hahn-Banach-Erweiterungseigenschaft HBE, falls jedes V -wertige lineare Funktional f , das auf einem linearen Teilraum X eines reellen linearen Raumes Y definiert ist und für das $f \leq p$ mit positiv-homogenem, subadditivem $p: Y \rightarrow V$, linear und $\leq p$ auf Y fortgesetzt werden kann mit Werten aus V . V heißt beschränkt-vollständig, wenn jede nach oben beschränkte Menge $\subset V$ in V ein (ev. nicht eindeutiges) sup besitzt. Bekannt ist, daß beschränkt-vollständige V die HBE besitzen. Hier wird umgekehrt bewiesen: V ist genau dann beschränkt vollständig, wenn V die HBE besitzt und linien-abgeschlossen ist. V heißt dabei linien-abgeschlossen (lineally closed), falls jede Gerade den positiven Kegel $K = \{v: v \geq 0\}$ von V in einer abgeschlossenen Strecke oder überhaupt nicht schneidet. Ein Beispiel zeigt, daß ohne die Voraussetzung „ V linien-abgeschlossen“ aus der HBE allein nicht „ V ist beschränkt-vollständig“ folgt.
H. Günzler.

Silverman, R. J. and Ti Yen: Addendum to invariant means and cones with vector interiors. Trans. Amer. math. Soc. 88, 327—330 (1958).

Es wird gezeigt, daß die Voraussetzung „der positive Kegel des Werteraumes hat einen Kernpunkt“ der im Titel erwähnten Arbeit (dies. Zbl. 81, 331) überflüssig ist. Der Fortsetzungssatz lautet nunmehr: Ist H eine Halbgruppe, so sind äquivalent (1) H hat die Hahn-Banach-Erweiterungseigenschaft, (2) H hat die monotone Erweiterungseigenschaft, (3) H besitzt ein invariantes Mittel. Die Bezeichnungen sind dabei dieselben wie im oben erwähnten Referat mit dem Zusatz, daß (1) z. B. bedeutet, das System $[H, V]$ hat die Hahn-Banach-Erweiterungseigenschaft für jeden beschränkt-vollständigen reellen Vektorverband V mit spitzem positiven Kegel. Als Folgerung erhält man eine Verallgemeinerung eines Satzes von Krejn und Rutman über die Existenz positiver linearer invarianter Funktionale, d. s. allen adjungierten Operatoren h^* , $h \in H$, gemeinsame Eigenvektoren: Ist Y ein reeller t -geordneter linearer Raum, dessen positiver Kegel C einen Kernpunkt y_0 hat, ist H eine Halbgruppe linearer Operatoren $h: Y \rightarrow Y$ mit $h(C) \subset C$ und $hy_0 = \mu_h y_0$, $h \in H$, $\mu_h > 0$, und besitzt H ein invariantes Mittel, so existiert ein positives lineares Funktional $F \neq 0$ auf Y mit $F(hy) = \mu_h F(y)$, $h \in H$, $y \in Y$. (Bei der vom Verf. verwendeten Definition des Vektorverbandes — vgl. oben erwähntes Referat — ist zu beachten, daß hier die Existenz von $x \vee y$ nicht gefordert wird, das ist der Grund für die — sonst überflüssig scheinende — Fallunterscheidung „ K reproducing bzw. nicht“).
H. Günzler.

Dinculeanu, Nicolae: Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 8, 343—412, russ. und französ. Zusammenfassg. 402—411 (1957) [Rumänisch].

This paper is divided in five chapters. Chapter I: Let Z be a locally compact space, m a positive Radon measure on Z and $\mathcal{E} = (E(z))_{z \in Z}$ a family of Banach spaces. Let $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ be the vector space of all vector fields $x = (x(z)) \in \prod_{z \in Z} E(z)$ and $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(\mathcal{E})$ a fundamental family (see R. Godement, this Zbl. 42, 346). Let $\mathcal{E}' = (E'(z))_{z \in Z}$ be the family of the duals of the Banach spaces $E(z)$. It is assumed that: (A) there is a fundamental family $\mathcal{A}' \subset \mathcal{O}(\mathcal{E}')$ such that the mapping $z \rightarrow \langle x(z), x'(z) \rangle$ is continuous for every $x \in \mathcal{A}$, $x' \in \mathcal{A}'$. Let $M_{\mathcal{A}}$ be the vector space of all $x \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ which are measurable with respect to \mathcal{A} (see R. Gode-

ment, loc. cit) and $M_{\mathcal{A}}^0$ the vector space of all $x \in M_{\mathcal{A}}$ such that $\{z \mid x(z) \neq 0\}$ is contained in a countable union of measurable parts of Z of finite measure. Analogous definitions for $M_{\mathcal{A}'}$ and $M_{\mathcal{A}'}^0$. It is shown that for every $x \in M_{\mathcal{A}}^0$ and $a \in (0, 1)$ there is $x' \in M_{\mathcal{A}'}^0$ such that $a \|x(z)\| \leq \langle x(z), x'(z) \rangle$ and $a \leq \|x'(z)\| \leq 2 - a$ for almost every $z \in Z$ for which $x(z) \neq 0$. Chapter II: Let φ be a mapping of $[0, \infty)$ into $[0, \infty]$ which is increasing, left continuous and which satisfies the relations $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 0$ and $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$. Let $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\varphi}$ be the set of all $x \in M_{\mathcal{A}}$ such that the mapping $z \rightarrow \varphi(\|x(z)\|)$ is integrable; for each $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\varphi}$, $|x|_{\varphi} = \int_Z \varphi(\|x(z)\|) dm(z)$.

The set $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\varphi}$ is a vector subspace of $M_{\mathcal{A}}$ if the following condition is satisfied: (B) There is a constant L such that $\varphi(2u) \leq L \varphi(u)$ for each $u \in [0, \infty)$ (obviously this condition is satisfied if $\varphi(u) = u^p$). Chapter III: Let φ and ψ be two functions complementary in the sense of Young such that $0 < \varphi(u) < \infty$ if $u \in (0, \infty)$. For each $x \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$ let $\|x\|_{\varphi} = \sup \int_Z \langle x(z), x'(z) \rangle dm(z)$, the supremum being taken over all $x' \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}'}^{\psi}$ such that $\|x'\|_{\psi} \leq 1$. Analogous definition for $\|x'\|_{\psi}$, $x' \in \mathcal{O}(\mathcal{L}')$. The space $L_{\mathcal{A}}^{\varphi}$ is the set of all $x \in M_{\mathcal{A}}^0$ such that $\|x\|_{\varphi}$ is finite. If $\varphi(v) > 0$ for every $v > 0$ then the space $L_{\mathcal{A}'}^{\psi}$ is the set of all $x' \in M_{\mathcal{A}'}^0$ such that $\|x'\|_{\psi}$ is finite; if $\psi(v_0) = 0$ for an $v_0 > 0$ then the space $L_{\mathcal{A}'}^{\psi}$ is the space of all $x' \in M_{\mathcal{A}'}^0$ such that $\|x'\|_{\psi}$ is finite. The spaces $L_{\mathcal{A}}^{\varphi}$ and $L_{\mathcal{A}'}^{\psi}$ have the following properties: 1. $L_{\mathcal{A}}^{\varphi}$ is a vector space and $L_{\mathcal{A}}^{\varphi} \supset \mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\varphi}$. 2. The mapping $x \rightarrow \|x\|_{\varphi}$ is a semi-norm on $L_{\mathcal{A}}^{\varphi}$ and $\|x\|_{\varphi} \leq |x|_{\varphi} + 1$ for each $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\varphi}$. 3. $L_{\mathcal{A}}^{\varphi}$ is complete for the semi-norm $x \rightarrow \|x\|_{\varphi}$. 4. The mapping $z \rightarrow \langle x(z), x'(z) \rangle$ is integrable and $\int_Z \langle x(z), x'(z) \rangle dm(z) \leq \|x\|_{\varphi} \|x'\|_{\psi}$. 5. A vector field $x \in L_{\mathcal{A}}^{\varphi}$ if and only if $x \in M_{\mathcal{A}}^0$ and $z \rightarrow \langle x(z), x'(z) \rangle$ is integrable for every $x' \in L_{\mathcal{A}'}^{\psi}$. 6. If condition (B) is satisfied then $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\varphi} = L_{\mathcal{A}}^{\varphi}$. Chapter IV: Let $(\mathcal{F} = (F(z))_{z \in Z})$ be a family of Banach spaces and $(\mathcal{F}' = (F'(z))_{z \in Z})$ the family of the dual spaces. It is supposed that there exist fundamental families $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(\mathcal{F})$ and $\mathcal{B}' \subset \mathcal{O}(\mathcal{F}')$ satisfying (A) and that: (G) There is a countable part $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ such that $\{x(z) \mid x \in \mathcal{A}_0\}$ is dense in $E(z)$, for each $z \in Z$. Let φ_1, ψ_1 and φ_2, ψ_2 be two pairs of functions complementary in the sense of Young. A mapping $T: L_{\mathcal{A}}^{\varphi_1} \rightarrow L_{\mathcal{B}}^{\varphi_2}$ is decomposable if for every $z \in Z$ there is a linear continuous mapping $T(z): E(z) \rightarrow F(z)$ such that $T(z)x(z) = T x(z)$ almost everywhere on Z , for each $x \in L_{\mathcal{A}}^{\varphi_1}$. The following results are proved: (T_I) A continuous linear mapping $T: L_{\mathcal{A}}^{\varphi_1} \rightarrow L_{\mathcal{B}}^{\varphi_2}$ is decomposable if and only if $Tfx = fTx$ for every f bounded and measurable. If T is decomposable and $\varphi_1 = \varphi_2$, then $\|T\| = m$ -maximum of the mapping $z \rightarrow \|T(z)\|$ (see also J. v. Neumann, this Zbl. 34, 61, R. Godement, loc. cit., and a paper by the reviewer, this Zbl. 65, 348). (T_{II}) If φ satisfies condition (B) then for every continuous functional f on $L_{\mathcal{A}}^{\varphi_1}$ there is a vector field $x'_f \in \mathcal{O}(\mathcal{L}')$ such that $f(x) = \int_Z \langle x(z), x'_f(z) \rangle dm(z)$ for each $x \in L_{\mathcal{A}}^{\varphi_1}$ and $\frac{1}{2} \|x'_f\|_{\psi} \leq \|f\| \leq \|x'_f\|_{\psi}$. If \mathcal{A}' satisfies the condition (G) then x'_f coincides locally almost everywhere with an element of $L_{\mathcal{A}'}^{\varphi_1}$. The proof of theorem (T_{II}) uses essentially theorem (T_I) (see also the reviewer, loc. cit., and N. Dinculeanu, this Zbl. 77, 102; 78, 102).

C. Ionescu Tulcea.

Matuszewska, W. and W. Orlicz: On a class of Saks spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 611—614 (1957).

Soit $u \rightarrow \varphi(u)$ ($u \geq 0$) une fonction convexe continue, telle que $\varphi(u) > 0$ pour $u > 0$, $\varphi(u)/u \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow 0$, $\varphi(u)/u \rightarrow \infty$ quand $u \rightarrow \infty$. Si x est une fonction mesurable sur $(-\infty, \infty)$, soit $\mathfrak{F}_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(|x(t)|) dt$. Soit L^φ l'ensemble des x telles que $\mathfrak{F}_\varphi(kx) < \infty$ pour un $k > 0$. Soit M^φ l'ensemble des $x \in L^\varphi$ qui sont bornées. Pour $x \in M^\varphi$, soient A l'ensemble des $l > 0$ tels que $\mathfrak{F}_\varphi(x/l) \leq 1$, et $\|x\|^* = \inf A$. Alors, l'ensemble des $x \in M^\varphi$ tels que $\|x\|_\infty \leq 1$, muni de la distance $\|x - x'\|^*$, est un espace de Saks dont les AA. donnent quelques propriétés.

J. Dixmier.

Lamperti, John: On the isometries of certain function-spaces. Pacific J. Math. 8, 459—466 (1958).

The author proves and improves some well known theorems concerning the characterization of norm preserving linear operators on L_p for positive $p \neq 2$. He then generalizes as follows: Let (X, F, μ) be a finite measure space; let $\Phi(t)$ be a continuous strictly increasing function for $t \geq 0$ such that $\Phi(\sqrt[t]{t})$ is a convex function of t . In addition it is assumed that L_Φ , the set of all μ -measurable functions f such that $I\{f\} = \int_X \Phi(|f(x)|) d\mu(x) < \infty$ is a linear space. It is proved that every linear mapping U which preserves "norm" (i. e. $I\{Uf\} = I\{f\}$) arises from a regular set isomorphism on (X, F, μ) . It is also shown that under certain hypotheses a set isomorphism induces an "isometry" on L_Φ .

A. B. Simon.

• **Schwartz, L.:** Théorie des distributions, Tome II. (Actualités scientifiques et industrielles. 1122.) (Publ. de l'Institut de Math. de l'Université de Strasbourg). Paris: Hermann 1959. 173 p.

(Band I s. dies. Zbl. 78, 110.) — Der Text stellt einen unveränderten Abdruck der ersten Auflage von 1951 dar (s. dies. Zbl. 42, 114). Nur die Literaturhinweise in den Fußnoten sind auf den neuesten Stand gebracht. Der „Index Bibliographique“ ist ebenfalls vervollständigt und umfaßt jetzt 10 (früher 5) Seiten. *G. Doetsch.*

König, Heinz: Eine Charakterisierung der Distributionen endlicher Ordnung. Math. Ann. 136, 240—244 (1958).

L'A. donne ici une caractérisation des distributions S d'ordre fini, en termes de croissance de leurs régularisées $S * \varphi$. Pour tout $\varrho > 0$, \mathfrak{D}_ϱ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur R^n , nulles pour $|x| \geq \varrho$. L'A. démontre le théorème suivant: Pour qu'une distribution S de Schwartz sur R^n soit d'ordre fini, il faut et il suffit que, pour tout $\varrho > 0$, il existe une fonction H croissante sur R , telle que $(S * \varphi)(x) = O(H(|x|))$ pour $|x| \rightarrow \infty$, quelle que soit $\varphi \in \mathfrak{D}_\varrho$.

J. Sebastião e Silva.

McKibben, John J.: Singular integrals in two dimensions. Amer. J. Math. 81, 23—36 (1959).

Verf. stellt die Frage, ob es unter den temperierten Distributionen (L. Schwartz) außer den lokalintegrierbaren Funktionen noch andere einfache gibt und zeigt, daß z. B. die Inversen der reellen Polynome $q(x_1, x_2)$ (x_1, x_2 reell) temperierte Distributionen sind. Zum Beweis benützt er die konstruktive Methode der „Parties finies“ von Hadamard. Aus dem Ergebnis folgt eine einfache Konstruktion der elementaren „temperierten Lösung“ der Gleichung $q(D) \cdot S = \delta$, wobei $q(D)$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten (zwei Variable) und δ die Dirac-Funktion ist. Verf. verweist auf die allgemeineren aber unkonstruktiven Beweise der Lösbarkeit obiger Gleichung von Malgrange, Ehrenpreis und Hörmander.

G. Krumbach.

Roumieu, Charles: Sur la transformation de Fourier des distributions généralisées. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 511—513 (1959).

On énonce des nouveaux théorèmes sur la structure des distributions généralisées considérées par l'A. dans ses notes antérieures [C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 678—680 (1958) et ce Zbl. **83**, 108]. *G. Marinescu.*

Fung, Kang: Generalized Mellin transforms. I. Sci. Sinica **7**, 582—605 (1958).

Le but essentiel de ce travail est de prolonger la transformation classique de Mellin

$$f(s) = \mathfrak{M} F(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} F(x) dx, \quad s = \sigma + it,$$

aux distributions définies dans l'ouvert $]0, +\infty[$. L'A. désigne par P' l'espace de ces distributions, dual fort de l'espace P des fonctions indéfiniment dérivables à support compact contenu dans $]0, +\infty[$. L'image vectoriel-topologique de P par \mathfrak{M} est l'espace (que l'A. désigne par Q) des fonctions entières $\varphi(s)$ à décroissance rapide sur les verticales et du „type exponentiel“ sur les horizontales, muni d'une topologie convenable. Q s'identifie à l'espace Z^1 de Gel'fand-Šilov par la rotation $s \rightarrow -is$; donc Q' est un espace de „fonctions généralisées“ ou „ultra-distributions“ (nommées Q -distributions par l'A.), contenant l'espace des distributions tempérées sur l'axe imaginaire. La transformation de Mellin pour les Q -distributions, se définit aussitôt par dualité: $\langle \mathfrak{M} F, \psi \rangle = \langle F, \mathfrak{M}^{-1} \psi \rangle$, pour toute $F \in P'$, $\psi \in Q$. Cela posé, l'A. généralise plusieurs propriétés de la transformation de Mellin classique, et donne des caractérisations simples des images par \mathfrak{M} de plusieurs sous-espaces de P' . Enfin, il fait une étude détaillée des convolutions multiplicatives prolongées à des couples de sous-espaces de P' , et de l'effet de \mathfrak{M} sur ces convolutions. Le changement de variable $x = e^u$ effectué sur les distributions $F \in P'$ définit un isomorphisme de P' sur \mathfrak{D}' , qui fait correspondre à \mathfrak{M} la transformation de Fourier sur \mathfrak{D}' suivie de la rotation $s \rightarrow -is$. Alors on voit, comme l'A. l'observe dans l'introduction, que la théorie de la transformation de Mellin équivaut à celle de la transformation de Fourier (prolongée à \mathfrak{D}' par Gel'fand-Šilov et par Ehrenpreis). En particulier, les convolutions multiplicatives sont remplacées par les convolutions additives, dans le passage de P' à \mathfrak{D}' . *J. Sebastião e Silva.*

Guy, Roland: Sur une extension d'un théorème de F. Riesz. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 2098—2101 (1958).

Soit B un espace de Banach, B^* son dual, $L(B)$ l'anneau des endomorphismes de B et C le $L(B)$ -module des fonctions faiblement continues, définies sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs dans $L(B)$. Soit $A: f \rightarrow A(f)$ une application $L(B)$ -linéaire de C dans $L(B)$, telle que

$$|\langle A(f)x, x^* \rangle| \leq M \max_{a \leq t \leq b} |\langle f(t)x, x^* \rangle|$$

pour tout $f \in C$, $x \in B$, $x^* \in B^*$, avec M indépendant de f , x et x^* . Alors il existe $F \in C$, à variation faiblement bornée (c.-à.-d. la fonction numérique $t \rightarrow \langle F(t)x, x^* \rangle$

est à variation bornée pour tout $x \in B$, $x^* \in B^*$), telle qu'on ait $A(f) = \int_a^b f(t) dF(t)$

pour tout $f \in C$, où l'intégrale se définit comme la limite faible d'expressions de la forme $\sum_{i=1}^p f(\xi_i) \{F(t_i) - F(t_{i-1})\}$. *J. Horváth.*

Biglov, Z. I.: An expansion in eigenfunctions of a system of second order differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR **112**, 797—799 (1957) [Russisch].

Suite d'une note antérieure (ce Zbl. **56**, 344). On considère l'opérateur différentiel $-y'' + P(x)y$ dans l'intervalle $[0, \infty[$ avec la condition aux limites: $y'(0) - \theta y(0) = 0$, $P(x)$ étant une fonction matricielle réelle et symétrique, inté-

grable dans $[0, \infty[$, θ une matrice hermitienne. L'A. établit la représentation spectrale (formule de Parseval) pour l'opérateur autoadjoint correspondant dans l'espace hilbertien $L_n^2([0, \infty[)$ des fonctions vectorielles de carré intégrable dans $[0, \infty[$. La démonstration utilise une méthode de Najmark. *J. Peetre.*

Sz.-Nagy, Béla et Ciprian Foiaş: Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III. *Acta Sci. math.* **19**, 26—45 (1958).

(Teil II s. dies. Zbl. **80**, 328). — Es sei T eine Kontraktion des Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} . Dann gibt es nach einem Resultat von B. Sz.-Nagy einen Hilbertraum $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$ und einen in \mathfrak{K} unitären Operator U mit $T^n = \text{Pr } U^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). \mathfrak{K} wird durch die Elemente der Form $U^n h$ ($h \in \mathfrak{H}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) aufgespannt. In der vorliegenden Arbeit werden die funktionalen und spektralen Beziehungen zwischen den Operatoren T und U untersucht und die erlangten Resultate auf Halbgruppen von Kontraktionen angewandt. Anschließend wird mit Hilfe des von J. v. Neumann stammenden Begriffes der Spektralmenge eine Erweiterung des obigen Theorems auf allgemeine beschränkte Operatoren bewiesen. *E. Heinz.*

Foiaş, Ciprian: On strongly continuous semigroups of spectral operators in Hilbert space. *Acta Sci. math.* **19**, 188—191 (1958).

Soit $t \rightarrow T_t$ ($t > 0$) un semi-groupe fortement continu d'opérateurs du type scalaire au sens de Dunford dans un espace hilbertien H . Soit $\sigma \rightarrow E_t(\sigma)$ la mesure spectrale de T_t . On suppose $\|E_t(\sigma)\| \leq M$ pour tout $t > 0$ et tout ensemble borélien σ . Alors il existe un opérateur inversible A dans H tel que les $AT_t A^{-1}$ soient normaux. L'hypothèse $\|E_t(\sigma)\| \leq M$ est inutile si le spectre des T_t est porté par le cercle $|\lambda| = 1$. *J. Dixmier.*

Tsuji, Kazô: W^* -algebras and abstract (L) -spaces. *Bull. Kyushu Inst. Technol., Math. nat. Sci.* **3**, 11—13 (1957).

Kennzeichnung der kommutativen B^* -Algebren A mit treuen W^* -Darstellungen durch die Existenz gewisser Unterräume der dualen Räume A' . Zum allgemeineren Problem der Kennzeichnung von W^* -Algebren vgl. J. v. Neumann, dies. Zbl. **15**, 245; Steen, dies. Zbl. **22**, 232; Rickart, dies. Zbl. **60**, 271; Najmark, dies. Zbl. **33**, 67; Kaplansky, dies. Zbl. **42**, 124; Dixmier, dies. Zbl. **50**, 115; Kadison, dies. Zbl. **71**, 115; Sakai, dies. Zbl. **72**, 124. *H. Leptin.*

Berberian, S. K.: The regular ring of a finite AW^* -algebra. *Ann. of Math.* **II. Ser.** **65**, 224—240 (1957).

Soit A une AW^* -algèbre finie. Une suite (e_n) de projecteurs de A est un SDD si $e_n \uparrow 1$. Un OWC consiste en deux suites (x_n) , (e_n) avec $x_n \in A$, (e_n) un SDD, tels que $m < n \Rightarrow x_n e_m = x_m e_m$ et $x_n^* e_m = x_m^* e_m$. On définit une relation d'équivalence entre OWC; les classes sont dites des CO (closed operators) de A ; lorsque A est une algèbre de von Neumann, on peut identifier les CO aux opérateurs mesurables affiliés à A au sens de Segal. Par analogie avec ce cas, on définit sur l'ensemble C des CO une structure d'algèbre involutive, dans laquelle A se plonge, puis la transformation de Cayley sur C et une structure d'ordre sur C ($x \geq 0$ si $x = y^* y$ pour un $y \in C$). Si $x \in C$ est tel que $x^* x \leq 1$, alors $x \in A$. En particulier, les projecteurs de C sont ceux de A , et forment donc une lattice complète. L'anneau C est un anneau $*$ -régulier complet. Si A' est une autre AW^* -algèbre finie et C' l'anneau des CO de A' , les $*$ -isomorphismes $C \rightarrow C'$ et les $*$ -isomorphismes $A \rightarrow A'$ sont en correspondance biunivoque par l'opération de restriction. Correspondance entre sous-anneaux de C et ceux de A , commutants dans C et dans A . Les conditions; 1. C est une algèbre involutive contenant A ; 2. C est régulier; 3. $x^* x + y^* y + z^* z = 1$ dans $C \Rightarrow x, y, z \in A$ caractérisent C et le plongement de A dans C . *J. Dixmier.*

Nakamura, Masahiro and Zirô Takeda: On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras. *Proc. Japan Acad.* **34**, 489—494 (1958).

Soient A un facteur fini, G un groupe dénombrable d'automorphismes g de A , extérieurs pour $g \neq 1$. Les AA. définissent, en se référant à Turumaru, [Tôhoku math. J., II. Ser. 10, 355—365 (1958)] l'algèbre de v. Neumann $G \otimes A$, par analogie avec la construction classique dans la théorie des algèbres simples. Théorème 1: $G \otimes A$ est un facteur fini. Théorème 2: toute sous-algèbre de v. Neumann de $G \otimes A$ contenant A est de la forme $F \otimes A$, F étant un sous-groupe de G . *J. Dixmier.*

Nakamura, Masahiro and Zirô Takeda: On certain examples of the crossed product of finite factors. I, II. Proc. Japan. Acad. 34, 495—499, 500—502 (1958).

Soient G un groupe dénombrable, Δ le groupe à 2 éléments, X l'espace compact Δ^G muni de sa mesure de Haar, Γ le produit incomplet $\Delta^{(G)}$ qui est un groupe dénombrable. Γ agit ergodiquement sur X par $(x_g)(\gamma_g) = (x_g + \gamma_g)$. Appliquant à cette situation la construction de Murray-v. Neumann, on obtient un facteur hyperfini A . Les AA. définissent un groupe d'automorphismes de A isomorphe à G ; ces automorphismes g sont extérieurs pour $g \neq 1$. Alors $G \otimes A$ est un facteur fini, d'après l'article résumé ci-dessus ou d'après une construction explicite, non hyperfini quand G est le groupe libre à 2 générateurs. *J. Dixmier.*

Hewitt, Edwin and Herbert S. Zuckerman: Structure theory for a class of convolution algebras. Pacific J. Math. 7, 913—941 (1957).

Soit G un ensemble totalement ordonné, muni de la topologie usuelle pour laquelle les intervalles ouverts contenant un point forment un système fondamental de voisinages de ce point; G est supposé compact pour cette topologie. On définit sur G une structure de monoïde associatif en posant $xy = \sup(x, y)$, loi continue en (x, y) . Les AA. décrivent en détail les propriétés d'„Analyse harmonique“ pour ce monoïde: ils déterminent les homomorphismes bornés de G dans le corps des nombres complexes (pour la multiplication de ces derniers), les idéaux maximaux de l'algèbre de Banach $\mathcal{M}(G)$ des mesures sur G (pour la convolution), prouvent que cette dernière algèbre est sans radical et étudient son spectre du point de vue topologique. Il est intéressant de remarquer que lorsque G est l'intervalle $[0, 1]$ de la droite réelle, le spectre de $\mathcal{M}(G)$ est un espace compact non métrisable qui avait été construit autrefois par Alexandroff et Urysohn. *J. Dieudonné.*

Hewitt, Edwin: The asymmetry of certain algebras of Fourier-Stieltjes transforms. Michigan math. J. 5, 149—158 (1958).

Bekanntlich ist die Gruppenalgebra $\mathcal{L}^1(G)$ einer abelschen lokal kompakten Gruppe G eine symmetrische involutorische Banach-Algebra mit der durch $f^*(x) = f(-x)$, $f \in \mathcal{L}^1$, $x \in G$, definierten Involution $f \rightarrow f^*$. „Symmetrisch“ bedeutet hierbei, daß jedes reguläre maximale Ideal von \mathcal{L}^1 bei der Involution in sich übergeht oder, hierzu äquivalent, daß für die Fourier-Transformation $f \rightarrow \hat{f}$ die Beziehung $\hat{f}^* = \hat{f}$ gilt. Betrachtet man statt der \mathcal{L}^1 -Algebra die Faltungsalgebra $\mathcal{M}(G)$ aller beschränkten regulären komplexen Borelschen Maße auf G , so hat auch $\mathcal{M}(G)$ eine (und nur eine) natürliche Involution $\mu \rightarrow \mu^*$. Wie jedoch Šrejder (dies. Zbl. 38, 273) gezeigt hat, ist $\mathcal{M}(R)$, R = reelle Zahlen, nicht mehr symmetrisch. Verf. verallgemeinert dieses Ergebnis und beweist: Enthält jede Umgebung der Null in G Elemente unendlicher Ordnung, so gilt: (*) $\mathcal{M}(G)$ enthält ein nicht symmetrisches maximales reguläres Ideal, d. h. ein maximales Ideal M mit $M \neq M^*$. — Der Beweis zerfällt in zwei Teile. Zunächst wird gezeigt, daß (*) für $\mathcal{M}(G)$ gilt, falls G eine zum Cantorsche Diskontinuum homöomorphe Menge P enthält, deren Elemente bis auf höchstens abzählbar viele über den ganzen Zahlen voneinander unabhängig sind. Sodann wird gezeigt, daß Gruppen mit beliebig kleinen Elementen unendlicher Ordnung dieser Bedingung genügen. (Siehe das folgende Referat.)

H. Leptin.

Rudin, Walter: Independent perfect sets in groups. *Michigan math. J.* 5, 159—161 (1958).

Verf. gibt einen Beweis für die Existenz Cantorscher Mengen aus unabhängigen Elementen in lokal kompakten abelschen Gruppen mit beliebig kleinen Elementen unendlicher Ordnung, der wesentlich einfacher als der in der vorhergehend referierten Arbeit von Hewitt enthaltene und außerdem etwas schärfer ist, da hier gezeigt wird, daß man die Cantorsche Menge $P \subset G$ so wählen kann, daß alle Elemente aus P unabhängig sind. Der Beweis beruht im wesentlichen auf einer geschickten, der Cantorschen analogen Konstruktion der Menge P in dem Falle, daß G auch noch metrisierbar ist.

H. Leptin.

Rudin, Walter: Idempotent measures on abelian groups. *Pacific J. Math.* 9, 195—209 (1959).

In this paper the author studies the idempotent measures on a locally compact abelian group G . A complete description of such measures is given in the cases $G = T^r$ and G discrete. The main definitions and results are the following: Consider a locally compact abelian group G , let \hat{G} be its dual and for each closed subgroup $H \subset G$ let $N(H)$ be the set of all $\hat{x} \in \hat{G}$ such that $\hat{x}(x) = 1$ for $x \in H$. Denote by $M(G)$ the convolution algebra of all complex Radon measures on G ; the product of two measures $\mu \in M(G)$, $\nu \in M(G)$ is denoted by $\mu * \nu$. Let $P(G)$ be the set of all idempotent measures $\mu \in M(G)$ ($\mu * \mu = \mu$) and $F(G)$ the set of all $\mu \in M(G)$ such that $\hat{\mu}$ is integer-valued. For each $\mu \in P(G)$ we write $S(\mu) = \{\hat{x} | \hat{\mu}(\hat{x}) = 1\}$. If G is compact, we say that a compact subgroup $K \subset G$ is associated with the measure $\mu \in M(G)$ if $|\mu|(K + x) = 0$ for each $x \notin K$ and $|\mu|(H) \leq |\mu|(K)$ for every compact subgroup $H \subset K$, $H \neq K$. A measure $\mu \in M(G)$ is said to be irreducible if either $\mu \neq 0$ and there is precisely one compact subgroup associated with μ or if $\mu = 0$. We shall state now the following results proved in this paper: (I) Each $\mu \in P(G)$ is concentrated on a compact subgroup $K \subset G$. (II) Suppose G is discrete. Then: 1) If $\mu \in P(G)$, then μ is concentrated on a finite subgroup H of G , $N(H)$ is an open and closed subgroup of \hat{G} and $S(\mu)$ is a finite union of equivalence classes of $\hat{G}/N(H)$; 2) for every open and closed part $U \subset \hat{G}$ there is $\mu \in P(G)$ such that $U = S(\mu)$. (III) Suppose G is compact and let $\mu \in P(G)$. Then, there exist irreducible measures $\mu_1, \dots, \mu_n \in P(G)$ and numbers a_1, \dots, a_n such that $\mu = a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n$. (IV) Suppose G is compact and denote by \mathfrak{B} the smallest ring containing all the equivalence classes corresponding to all subgroups of \hat{G} . For every set $A \in \mathfrak{B}$ there is $\mu \in P(G)$ such that $A = S(\mu)$. If $G = T^r$ then $S(\mu) \in \mathfrak{B}$ for each $\mu \in P(G)$.

C. Ionescu Tulcea.

Aubert, K. E.: Convex ideals in ordered group algebras and the uniqueness of the Haar measure. *Math. Scandinav.* 6, 181—188 (1958).

Let G be a locally compact abelian group, m the Haar measure of G and L^1 the corresponding group algebra. Let L_R^1 be the set of all real-valued functions $f \in L^1$; L_R^1 is a real Banach algebra. For two functions $f \in L_R^1$, $g \in L_R^1$ we shall write $f \geq g$ if and only if $f(x) \geq g(x)$ for almost every $x \in G$. An ideal $I \subset L_R^1$ is said to be convex if $f \in I$, $g \in I$ and $f \leq h \leq g$ implies $h \in I$. An ideal $I \subset L_R^1$ is said to be absolutely convex if $f \in I$, $g \in L_R^1$ and $|g| \leq |f|$ implies $g \in I$. The main results proved by the author in this paper are the following: (I) The only convex, regular, maximal ideal in L_R^1 is the set of all functions $f \in L_R^1$ such that $\int_G f dm = 0$.

The algebra L_R^1 does not contain any absolutely convex, proper, maximal ideal which is either closed or regular. (II) Let u be an order-preserving ring representation of L_R^1 onto an ordered field \mathcal{K} . Then, \mathcal{K} is isomorphic to the field R of real numbers and the restriction of u to $\mathcal{K}(G)$ is the Haar measure of G . (III) An ideal $I \subset L_R^1$

which is equal to the intersection of a non-void family of regular maximal ideals in L_R^1 is convex if and only if it is contained in the ideal of all functions $f \in L_R^1$ satisfying the equation $\int_G f dm = 0$. (IV) The ordered group algebra $L_R^1(G \neq \{e\})$ cannot be imbedded as an ordered ring in a direct product of totally ordered rings.

C. Ionescu Tulcea.

Cohen, Paul J.: Factorization in group algebras. Duke math. J. 26, 199—205 (1959).

The main results of this paper are the following: (I) Let X be a Banach algebra having the following property: There is a constant C_X such that for every $\varepsilon > 0$ and $x_1, \dots, x_p \in X$ there exists $u \in X$ satisfying the relations $\|u\| \leq C_X$ and $\|u x_i - x_i\| \leq \varepsilon$, $i = 1, \dots, p$. Let $z \in X$ and $\eta > 0$. Then, there are $x \in X$, $y \in X$ such that: 1) $z = xy$; 2) y belongs to the closed left ideal spanned by z ; 3) $\|z - y\| \leq \eta$ (see Rudin, this Zbl. 79, 133). (II) Let z be a continuous function on a compact group G and $\eta > 0$. Then, there are $x \in L^1(G, m)$, $y \in L^1(G, m)$ (m = the Haar measure of G) satisfying 1), 2), 3) and: 4) $x \geq 0$; 5) y is continuous and $\|z - y\|_\infty \leq \eta$; 6) if z is real-valued then y is real-valued. (III) There is a continuous positive function h , with compact support, defined on the real line R , which is not the convolution of two positive functions $f \in L^1(R, m)$, $g \in L^1(R, m)$.

C. Ionescu Tulcea.

Stinespring, W. Forrest: Integration theorems for gages and duality for unimodular groups. Trans. Amer. math. Soc. 90, 15—56 (1959).

L'A. poursuit l'étude de „l'intégration non commutative“ au sens de Segal (ce Zbl. 51, 342). Soit l une forme linéaire positive centrale sur une algèbre auto-adjointe d'opérateurs A dans un espace hilbertien. Moyennant des conditions simples, le th. 1 assure que l se prolonge en une trace sur l'adhérence faible de A . Le th. 2 étudie, dans un cas particulier, le cas des formes non centrales. Sur un „gage space“ l'A. complète les notions de convergence presque partout et de convergence en moyenne, en introduisant la convergence en mesure (pour laquelle il généralise les propriétés classiques) et la convergence grossière (qui est impliquée par la convergence presque partout ou la convergence en mesure, et est équivalente à cette dernière si la trace de base m est finie). Plusieurs théorèmes de convergence dominée sont établis; par exemple: si les opérateurs mesurables A_n convergent grossièrement vers un opérateur mesurable A , et si $A_n^* A_n \leq B$ pour tout n (B , opérateur intégrable), alors A est de carré intégrable et $A_n \rightarrow A$ en moyenne quadratique. Analogie du lemme de Fatou. Si $m(1) = 1$ et si $A_n \rightarrow A$ en mesure (A_n, A auto-adjoints mesurables), $\varphi(A_n) \rightarrow \varphi(A)$ en moyenne quadratique pour φ continue à support compact. Démonstration d'un théorème de passage à la limite monotone (où la convergence est définie par la considération des formes quadratiques associées aux opérateurs auto-adjoints). Définition du produit tensoriel de deux „gage spaces“, du produit tensoriel de deux opérateurs non bornés; théorème de Fubini. Soient G un groupe localement compact unimodulaire, $H = L^2(G)$, L_a (resp. L_f) l'opérateur de translation à gauche (resp. de convolution à gauche) dans H défini par $a \in G$ (resp. par $f \in L^1(G)$). Les L_a , ou les L_f , engendrent une algèbre de von Neumann \mathcal{L} munie d'une trace canonique m , d'où un „gage space“ Γ . L'A. considère l'application $f \rightarrow L_f$ comme la transformation de Fourier globale. Pour $F \in L^1(\Gamma)$, soit f continue bornée sur G définie par $f(x) = m(L_x^* F)$. L'application $F \rightarrow f$ transforme le produit $*$ en le produit usuel, le produit $*$ sur $L^1(\Gamma)$ étant défini par

$$m((F * G) T) = (m \otimes m)((F \otimes G) \Phi(T)) \text{ pour tout } T \in \mathcal{L}$$

(Φ est l'isomorphisme de \mathcal{L} sur l'algèbre de von Neumann engendrée par $L \otimes L$, tel que $\Phi(L_a) = L_a \otimes L_a$ pour $a \in G$). De nombreux résultats d'analyse harmonique sont établis dans ce cadre. Exemples: 1. si $f \in L^1(G)$ et $F = L_f \in L^1(\Gamma)$,

alors $f(x) = m(L_x^* F)$ presque partout. 2. Les caractères de l'algèbre de Banach commutative involutive $L^1(I)$ sont en correspondance biunivoque canonique avec les points de G (bidualité).

J. Dixmier.

Stinespring, W. Forrest: Integrability of Fourier transforms for unimodular Lie groups. *Duke math. J.* **26**, 123—131 (1959).

Let G be a unimodular Lie group. If $f \in L_1(G)$, let L_f denote the left convolution operator $g \rightarrow f * g$ on $L_2(G)$. Now suppose the T is a right invariant elliptic differential operator on G such that $T > 1$. Regard T as an unbounded operator on $L_2(G)$. Then it is shown that each self-adjoint extension of the inverse of T is of the form L_k , where $k \in L_1(G) \cap L_2(G)$. The example

$$T = T_r = (1 - X_1^2 - \dots - X_n^2)^r$$

is studied in more detail and applied to representations U of G which are contained in the regular representation of G . The author defines the character χ of U as a certain linear functional on the space of suitably differentiable functions on G . χ is defined in terms of the dual gage space of G (I. E. Segal, this Zbl. **45**, 385). It is shown that $\chi = T_r \psi$ (in the sense of distributions), where $r = [n/4] + 1$ and ψ is a suitable function in $L_2(G)$.

S. Helgason.

Dixmier, Jacques: On unitary representations of nilpotent Lie groups. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **43**, 985—986 (1957).

In dieser Note werden die hauptsächlichsten Ergebnisse der nachfolgend referierten Arbeit angekündigt.

E. Thoma.

Dixmier, Jacques: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents II. *Bull. Soc. math. France* **85**, 325—388 (1957).

(Teil I, s. vorstehendes Referat). Es sei Γ eine reelle Liesche Gruppe und \mathfrak{g} die Liesche Algebra von Γ . $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ sei die universelle, einhüllende Algebra von \mathfrak{g} und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ das Zentrum von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Da $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ nullteilerfrei ist, kann man $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ in seinen Quotientenkörper einbetten. A sei der Antihomomorphismus von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, dessen Beschränkung auf \mathfrak{g} die Abbildung $x \rightarrow -x$ ist. A läßt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ invariant. Eine homomorphe Abbildung der R -Algebra $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ auf die R -Algebra C heißt Charakter von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$; dabei ist R bzw. C der Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen. Ein Charakter heißt hermitesch, falls $\chi(Aa) = \overline{\chi(a)}$ für alle $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ gilt. Es sei $\gamma \rightarrow U(\gamma)$ eine (stark stetige) unitäre Darstellung von Γ mit Hilbert-Raum \mathfrak{H} als Darstellungsraum, und \mathfrak{H}'' sei der (nicht notwendig abgeschlossene) Teilraum aller $\xi \in \mathfrak{H}$, für die die Abbildung $\gamma \rightarrow U(\gamma)\xi$ unendlich oft differenzierbar ist. Ist $\xi \in \mathfrak{g}$, so definiert man den Endomorphismus $U(x)$ von \mathfrak{H}'' durch $U(x) = \lim \lambda^{-1} [U(\exp \lambda x)\xi - \xi]$. Den Homomorphismus $x \rightarrow U(x)$ kann man auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus $a \rightarrow U(a)$ von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ erweitern. Falls $\gamma \rightarrow U(\gamma)$ irreduzibel ist, hat $U(a)$ für $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ stets die Form $\chi(a) \cdot 1$, wobei $\chi(a)$ ein hermitescher Charakter ist. Dieser Charakter heißt der zu U gehörige Charakter. Es sei nun Γ eine einfach-zusammenhängende, nilpotente, reelle Liesche Gruppe. Verf. beweist dann folgende Sätze: $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ ist eine endliche, rein transzendente Erweiterung von R . Es existiert ein Element $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ mit $a \neq 0$, so daß zu jedem $\chi \in A_a$ bis auf Äquivalenz genau eine irreduzible, unitäre Darstellung U_χ gibt, zu der χ gehört. Dabei ist A_a die Menge aller hermiteschen Charaktere mit $\chi(a) \neq 0$. Die letzte Behauptung wird durch vollständige Induktion nach der Dimension von Γ bewiesen. Dazu sind zwei völlig verschiedene Fälle zu betrachten, nämlich $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \supsetneq \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') \supsetneq \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Dabei ist \mathfrak{g}' ein Ideal in \mathfrak{g} mit $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}' = 1$. Es wird gezeigt, daß bei nilpotenten \mathfrak{g} nur diese beiden Fälle möglich sind. In einem weiteren Satz wird gezeigt, daß man die U_χ so wählen kann, daß der Darstellungsraum der U_χ der Raum $L_C^2(R^p)$ aller komplexwertigen bezüglich des Lebesgue-Maßes quadratisch integrierbaren Funktionen ist, und daß die Endomorphismen $U_\chi(a)$ eine Algebra einfach angegebbarer Differential- und Multiplikationsoperatoren bilden. Dabei ist $p = \frac{1}{2}(n - q)$, mit

$n = \dim \Gamma$ und $q = \text{Transzendenzgrad von } \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \text{ über } R$. p ist stets eine ganze, nicht negative Zahl. Zum Schluß wird noch eine Verallgemeinerung des Satzes von Plancherel bewiesen. Dazu wird zunächst eine neue Parametrisierung der U_λ mit $\chi \in A_a$ angegeben. Jedem $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ aus einer in der Zariski-Topologie offenen Menge Ω des R^q wird eine irreduzible Darstellung U_λ von Γ zugeordnet mit dem Darstellungsraum $L_C^2(R^q)$ und der oben angegebenen Form der $U(a)$. Dann existiert genau eine reelle rationale und auf Ω reguläre Funktion $F(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ so daß

$$\int |f(\gamma)|^2 d\gamma = \int \Omega \operatorname{tr} (U_\lambda(f)^* U_\lambda(f)) |F(\lambda_1, \dots, \lambda_q)| d\lambda_1 \cdots d\lambda_q$$

für alle $f \in L_C^1(\Gamma) \cap L_C^2(\Gamma)$ gilt. Ferner existiert eine Isometrie von $L_C^2(\Gamma)$ auf den Hilbert-Raum aller über Ω bezüglich $dv = |F(\lambda_1, \dots, \lambda_q)| d\lambda_1 \cdots d\lambda_q$ quadratisch-integrierbaren Funktionen mit Werten aus einem geeigneten Hilbert-Raum. Diese Isomorphie liefert zugleich eine Zerlegung der regulären Darstellungen in eine kontinuierliche Summe irreduzibler Darstellungen. Bezüglich weiterer Einzelheiten und der Beweise muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. Der Verf. hat die teilweise etwas komplizierten Beweise sauber und in allen Einzelheiten durchgeführt.

E. Thoma.

Harish-Chandra: Automorphic forms on a semisimple Lie group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 45, 570—573 (1959).

Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, K un sous-groupe compact maximal de G , Γ un sous-groupe discret de G , \mathfrak{Z} l'algèbre des opérateurs différentiels biinvariants sur G , U un espace hilbertien complexe de dimension finie, muni d'une structure de K -module à gauche et de Γ -module à droite, les représentations σ et μ correspondantes étant unitaires continues. Soit χ un homomorphisme de \mathfrak{Z} dans le corps complexe C . Une forme automorphe de type (σ, μ, χ) sur G à valeurs dans U est une fonction $f: G \rightarrow U$ telle que: 1. $f(kx\gamma) = \sigma(k)f(x)\mu(\gamma)$ ($k \in K$, $x \in G$, $\gamma \in \Gamma$); 2. $zf = \chi(z)f$ ($z \in \mathfrak{Z}$). Soit $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\sigma, \mu, \chi)$ l'espace vectoriel de ces formes. Si G/Γ est compact, on voit facilement que $\dim \mathfrak{F} < \infty$. Il s'agit de prouver $\dim \mathfrak{F} < \infty$ sous des hypothèses plus faibles. L'A. donne des conditions (qui ne peuvent être détaillées ici) qui assurent que $\dim \mathfrak{F}_0 < \infty$, où \mathfrak{F}_0 est le sous-espace des formes qui décroissent „assez vite“ à l'infini. Ces conditions sont faciles à vérifier dans les cas suivants ($R = \text{corps des réels}$, $Z = \text{anneau des entiers rationnels}$, $Z' = Z[i]$): (1) $G = \text{SL}(n, R)$, $\Gamma = \text{SL}(n, Z)$; (2) $G = \text{Sp}(n, R)$, $\Gamma = \text{Sp}(n, Z)$; (3) $G = \text{SL}(n, C)$, $\Gamma = \text{SL}(n, Z')$; (4) $G = \text{Sp}(n, C)$, $\Gamma = \text{Sp}(n, Z')$.

J. Dixmier.

Forte, Bruno: Proprietà ricorrenti del moto non stazionario di un fluido e relativa estensione ad un numero qualunque di dimensioni. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 12, 397—416 (1958).

Sei μ ein Maß auf einer σ -Algebra von Teilmengen von Ω , $\mu(\Omega) = 1$; sei weiter in Ω eine „meßbare Strömung T_t “ gegeben, die die meßbare Menge $A = A_0 \subset \Omega$ zur Zeit $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (nur diese Zeitpunkte werden betrachtet) in die Lagen $A_n = T_n A \subset \Omega$ überführt (die genaueren Voraussetzungen über T_t sind nicht näher präzisiert, die in der Arbeit gemachte Annahme $\mu(A_n) \geq p_0 > 0$ ist für das Folgende unwesentlich). Zum Wiederkehrproblem werden durch elementare Überlegungen folgende Aussagen bewiesen (die, auf den stationären Fall $T_n = T_1^n$ spezialisiert, Mengen vom Maß 0 und damit z. T. Ergebnisse von Poincaré ergeben): Für jedes $\varepsilon > 0$ ist mit Ausnahme von endlich vielen Zeitpunkten n das Maß der Menge derjenigen Punkte von A_n , die früher oder später nie in A_n verweilen, kleiner ε . Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ∞ viele Zeitpunkte n_v , so daß die Menge derjenigen Punkte von A_{n_v} , die im Laufe der Zeit nur endlich viele Male dieses A_{n_v} treffen, für jedes v ein Maß $< \varepsilon$ hat. Für maßtreue (inkompressible) Strömungen, die ganz Ω ausfüllen, werden „duale“ Aussagen bewiesen, z. B.: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist mit Ausnahme von

endlich vielen Zeitpunkten n das Maß der Menge der Punkte, die zur Zeit n in A sind, sich aber nur endlich viele Male in A aufhalten, kleiner ε . Schließlich wird im Falle einer inkompressiblen, Ω ausfüllenden Strömung gezeigt: Ist A bel. $\subset \Omega$, so gilt für fast alle Punkte P von A : Zu P gibt es für jedes natürliche k ein $N = N_{P,k}$, so daß ein Punkt, der zur Zeit n , $|n| > N$, mit P zusammenfällt, im Laufe der Bewegung A stets mindestens $k + 1$ mal trifft. Die in der Arbeit vorhandenen Unklarheiten stören nicht allzusehr bzw. lassen sich leicht richtigstellen, auf S. 415 jedoch ist einige Vorsicht geboten; dem Ref. scheint hier nur die oben zuletzt wiedergegebene Aussage bewiesen, nicht aber die bedeutend mehr besagende Aussage (γ) der Arbeit, die $k = \infty$ zuläßt.

H. Günzler.

Polak, A. I.: On sufficient and necessary conditions for complete approximative solvability of equations of a very general nature. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 587—590 (1957) [Russisch].

Soit $\{f_n\}$ une suite d'applications continues d'un espace de Banach dans un autre. Supposons que f_n converge uniformément vers l'application f . L'A. démontre le théorème suivant: Afin que $\lim f_n^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$ pour toute suite y_n convergente vers y , il faut et il suffit que les applications f_n soient également ouvertes.

G. Marinescu.

Volkov, V. I.: On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 17—19 (1957) [Russisch].

Let \bar{D} be a bounded closed region of the (x, y) -plane. Let also L_n , $n = 1, 2, \dots$, be a sequence of positive linear operators; for any $f = f(x, y)$ continuous in \bar{D} , $L_n(f) = L_n(f; x, y)$ is to be a function defined over \bar{D} , which is positive throughout \bar{D} if $f(x, y)$ is positive throughout \bar{D} . The author finds sufficient conditions in order that $L_n(f) \rightarrow f$ as $n \rightarrow \infty$, uniformly in \bar{D} , for any $f(x, y)$ which is continuous in \bar{D} ; it is namely sufficient that this should be true in the special cases $f(x, y) = 1, x, y, x^2 + y^2$. Moreover these four functions cannot be replaced by any three. Analogous results hold in m dimensions. The one-dimensional case was established by P. P. Korovkin (this Zbl. 50, 340).

F. V. Atkinson.

Raimi, Ralph A.: On Banach's generalized limits. Duke math. J. 26, 17—28 (1959).

Zunächst wird ein abstrakt formulierter Fixpunktsatz bewiesen, der aus der Existenz eines Fixpunktes eines Systems G linearer stetiger Transformationen in einem lokalkonvexen Vektorraum E unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen (G soll „Näherungsmittel“ besitzen) auf die Existenz von Fixpunkten des adjungierten Systems G^* schließen läßt. Damit wird im Fall einer abelschen Halbgruppe G für gewisse $E \subset m(G)$ die Menge A aller Banach-Grenzwerte Φ von E charakterisiert, außerdem wird ein Ausdruck für $\sup_{\Phi \in A} \Phi(f)$ angegeben: Von E wird vorausgesetzt,

daß es ein gegenüber den Translationen $T_g f(x) := f(g + x)$, $g \in G$, invarianter B -Teilraum von $m(G)$ ($=$ Raum aller reellen Funktionen auf G mit sup-Norm) ist, der G trennt und die Funktion $f = 1$ enthält; $A := (\Phi: \Phi \in E^*, \|\Phi\| = 1, \Phi(1) = 1, \Phi(T_g f) = \Phi(f) \text{ für alle } g \in G)$. Versteht man unter I das System aller

konvexen Linearkombinationen $T_\alpha := \sum_{\nu=1}^n a_\nu T_{g_\nu}$, teilgeordnet durch $T_\alpha > T_\beta$ dann

und nur dann, falls ein $T_\gamma \in I$ existiert mit $T_\alpha = T_\gamma T_\beta$, und setzt man $e'(f) := f(e)$, $e' \in E^*$, so gilt: $A =$ System aller w^* -Häufungspunkte von $(T_\alpha^* e': T_\alpha \in I)$, $\sup_{\Phi \in A} \Phi(f) = \lim_{\alpha} e'(T_\alpha f)$ für beliebiges $f \in E$. Zur Frage, wo solche Φ eindeutig bestimmt

sind, wird gezeigt: $V := (f: \Phi(f) \text{ ist unabhängig von } \Phi \in A) = (f: \text{Norm-}\lim_{\alpha} T_\alpha f \text{ existiert}) = V_0 \oplus U$, wo $V_0 :=$ Normabschließung der linearen Hülle von $(Tf - f: T \in G,$

$f \in E) = (f: \Phi(f) = 0 \text{ für alle } \Phi \in \Lambda) = (f: \lim_{\alpha} T_{\alpha} f = \theta), \quad U := (c \cdot 1: c \text{ reell})$
 (vgl. hierzu auch M. M. Day, dies. Zbl. 78, 294). In Abschnitt 4 wird untersucht, inwieweit im Spezialfall $G = \text{additive Halbgruppe der reellen Zahlen } \geq 0$ das oben definierte V mit der Menge $N := (f: \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) dt \text{ existiert gleichgradig in } x \geq 0)$ zusammenfällt und inwieweit hier Λ schon mit Hilfe der U_T^* , $U_T f(x) := \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) dt$ charakterisiert werden kann. (Die dabei benützte Beziehung

P 5.1-f bleibt auch im Falle $R = [0, \infty)$ richtig.) Daß der anfangs erwähnte Fixpunktsatz auch in solchen Fällen, in denen die bisherigen Ergebnisse (v. Neumann, Day, Silverman) nicht mehr anwendbar sind, brauchbar sein kann, wird im letzten Abschnitt gezeigt: Sei G die Gruppe aller Bewegungen des euklidischen R^n , E die Menge aller beschränkten, Lebesgue-meßbaren reellen Funktionen auf dem R^n , $E \subset m(R^n)$, dann gibt es auf E einen bewegungsinvarianten Banach-Grenzwert Φ . (Anm. des Ref.: Dabei ist zu beachten, daß fast überall gleiche f in E nicht identifiziert werden, Φ kann also für solche f verschiedenen Werte liefern; man kann den Beweis des Verf. jedoch so abändern, daß auch für den Fall $E = L^\infty(R^n)$ die Behauptung richtig bleibt.) Einige Druckfehler und undefinierte Zeichen. H. Günzler.

Nevanlinna, F.: Über absolute Analysis. 13. Skand. Mat.-Kongr., Helsinki 1957, 178—197 (1958).

Überblick über einige der von R. Nevanlinna teilweise gemeinsam mit F. Nevanlinna in früheren Arbeiten dargestellten Ergebnisse aus der absoluten Analysis, in der die klassische reelle Funktion einer reellen Variablen ersetzt ist durch die Abbildung zweier Hilbert-Räume (allgemeiner Minkowski-Banachscher Räume) aufeinander. Insbesondere wird Differentiation und Integration sowie die Theorie der impliziten Funktionen behandelt. Diese und viele weitere Ergebnisse, insbesondere die Anwendungen auf Differentialgleichungen und Differentialgeometrie, sind ausführlich in dem 1959 in Berlin erschienenen Buch „Absolute Analysis“ von F. und R. Nevanlinna dargestellt. G. Doetsch.

Hukuhara, Masuo: Théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires dans l'espace vectoriel topologique. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I 8, 111—138 (1959).

Im ersten Teil werden im wesentlichen gefilterte Funktionensysteme $f_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ auf einer Teilmenge E eines vollständigen reellen lokalkonvexen Vektorraumes \mathfrak{H} untersucht. Die Werte der Funktionen f_λ sollen in einem gleichartigen Raum \mathfrak{H}' liegen. Die einzelnen Funktionen brauchen dabei nicht für alle Elemente von E definiert zu sein. Es soll jedoch zu jedem $x \in E$ ein $\lambda_x \in \Lambda$ geben, so daß $f_\lambda(x)$ für alle $\lambda \geq \lambda_x$ erklärt ist. Es werden folgende Begriffe definiert und untersucht: Einfache, gleichmäßige und stetige Konvergenz, gleichgradige Stetigkeit, Kompaktheit und Beschränktheit. Der zweite Teil enthält Untersuchungen über die Differentialgleichung $dx/dt = f(t, x)$. Dabei ist t eine reelle Variable, während x Element von \mathfrak{H} ist. Diesen Betrachtungen liegt die folgende Idee zugrunde: Ist $S(x)$ ein konvexes und positiv homogenes stetiges Funktional auf \mathfrak{H} , so wird die Funktion $f(t, x)$ durch die Beziehung $S(f(t, x)) < F_S(t, S(x))$ mit einer Funktion $F_S(t, X)$ gekoppelt, in der X eine reelle Variable ist. Es werden mehrere Verallgemeinerungen der von Perron betrachteten oberen bzw. unteren Funktionen angegeben und verglichen. Als Hauptergebnisse kann man einige sehr allgemeine Eindeutigkeitssätze ansehen. Existenzbeweise werden nicht angegeben. A. Pietsch.

Gel'man, I. V.: On one non-linear operator. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 454—456 (1958) [Russisch].

Let Ω be a domain in an n -dimensional space with a boundary Γ ; M and N two N -functions complementary in the Young sense; L_M^* , L_N^* the corresponding Orlicz spaces of functions which are defined on Ω . Suppose that

$$\int_{\Omega} d\Omega \frac{M[u]}{\|u\|_M} \rightarrow \infty \quad \text{as} \quad \|u\|_M \rightarrow \infty.$$

If $Lu = 0$ is the Euler-Lagrange equation of a functional

$$j(u) = \int_{\Omega} d\Omega f\left(x_1, \dots, x_n; u(x), \dots, \frac{\partial^i u(x)}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_n}}\right),$$

then $Lu = h$ is the Euler-Lagrange equation of the variational problem

$$j_h(u) = j(u) - \int_{\Omega} d\Omega u h, \quad h \in L_N^*, \quad u \in \Phi$$

where Φ is supposed to be not empty and

$$\Phi = \left\{ u \mid j(u) < \infty, \quad \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, l-1) \right\}.$$

The solution of this variational problem is considered as a generalized solution of $Lu = h$ with the corresponding homogeneous boundary conditions. The solution u of $Lu = h$ is $u = u[h]$. Assuming some properties on the function f (to be "positive definite") the author proves: 1. For every $h \in L_N^*$ the minimum problem of j_h in Φ has a unique solution; 2. the operator $h \rightarrow u[h]$ is a bounded operator from L_N^* in $F_M^{(l)}$, where $F_M^{(l)}$ is the space of functions the l^{th} derivatives of which, in the sense of the theory of distributions, belong to L_M^* ; 3. the mapping $h \rightarrow u[h]$ transforms (o) -weakly convergent sequence from L_N^* in (o) -weakly convergent sequence in $F_M^{(l)}$; 4. if $M(u) > |u|^2$ and f is "strictly positive definite" throughout Φ then $j(u)$ possesses differential in the Gateaux sense etc.

S. Kurepa.

Praktische Analysis:

Golomb, Michael: Approximation by functions of fewer variables. Numer. Approx., Proc. Sympos. Math. Res. Center, Madison, April 21—23, 1958; 275—327 (1959).

f, f_1, f_2, \dots seien Funktionen von Variablen $x_i \in \Omega_i$ (Ω_i Mengen mit bestimmten Eigenschaften), welche einem Funktionenraum B mit Abstandsfunktional $\|f_1 - f_2\|$ angehören. M bedeute eine Teilmenge von Funktionen v , welche sich in bestimmter Form additiv und multiplikativ aus Funktionen von weniger Variablen zusammensetzen. Für eine Reihe von Fällen macht Verf. Aussagen über $E(f) = \inf_{v \in M} \|f - v\|$ und Extremalelemente f_e mit $E(f) = \|f - f_e\|$, u. a. Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen. Der Buchstabe a kennzeichnet im folgenden fest gegebene Funktionen, u gesuchte Funktionen, und es hängen Funktionen mit oberem Index i nur von x_i , mit oberem Index (i) nicht von x_i , ohne oberen Index nur von x_0 ab [abgesehen von (11)]. — Im Teil A (Approximation im quadratischen Mittel) mit B als Hilbertraum L_2 werden $E(f)$ und ein f_e für folgende Ansätze angegeben.

$$(1) \quad f_e(x_0, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^n a_{1k} u_k^1 + \dots + a_{Nk} u_k^N,$$

$$(2) \quad f_e(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^n a_k^1 u_k^{(1)} + \dots + a_k^N u_k^{(N)},$$

$$(3) \quad f_e(x_1, \dots, x_N) = u^{12} + u^{23} + \dots + u^{N1},$$

$$(4), (5), (6) \quad f_e(x_0, x_1, x_2) = a_1 \sum_{k=1}^n u_{1k}^1 u_{1k}^2 + \dots + a_m \sum_{k=1}^n u_{mk}^1 u_{mk}^2 \text{ (bzw. Spezialfälle),}$$

$$(7) f_e(x_1, x_2, x_3) = a^1 u_1^2 u_2^3 + a^2 u_1^3 u_2^1 + a^3 u_1^1 u_2^2 + a^1 a^2 u^3 + a^2 a^3 u^1 + a^3 a^1 u^2,$$

$$(8), (9) \quad f_e(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^N u_k^1 u_k^2 \dots u_k^N \quad (\text{bzw. Spezialfall}).$$

Zur Ermittlung von $E(f)$ und f_e hat man bei (1), (2), (3) Quadraturen durchzuführen und lineare Gleichungssysteme zu lösen, bei (4) bis (9) außerdem Schmidtsche Funktionen zu nichtsymmetrischen Kernen zu ermitteln. Bei (8), (9) sind die Schmidtschen Funktionen durch nichtlineare Integralgleichungen bestimmt. Verf. wendet Ergebnisse von Kantorovič (dies. Zbl. 34, 212) über das Newtonsche Verfahren auf diese Gleichungen an. — Teil B behandelt die Tschebyscheff-Approximation stetiger Funktionen. Für die folgenden Ansätze werden mit Hilfe gewisser linearer Funktionale (projection cycles) untere Schranken für $E(f)$ angegeben. (10) $f_e(x_1, \dots, x_N) = u^1 + u^2 + \dots + u^N$, (11) $f_e(x_1, \dots, x_N) = u_1(z_1 \cdot x) + \dots + u_N(z_N \cdot x)$, $x = (x_1, \dots, x_N)$, z_i konstante N -Vektoren, (12) $f_e(x_1, \dots, x_N) = a^{(1)} u^1 + \dots + a^{(N)} u^N$. Für den Fall (10) wird eine Rekursionsformel für eine Folge $\{f_v\}$ mit $\|f - f_v\| \geq \|f - f_{v+1}\| \rightarrow E(f)$ hergeleitet, welche sogenannte zentrale Extremalen (central extremals) benutzt. Diese Ergebnisse hängen eng mit solchen von Diliberto und Straus (dies. Zbl. 43, 68) zusammen. *J. Schröder.*

S-Palencia Serrano, Enrique: Genäherte Bestimmung der reellen Lösungen der Systeme von zwei transzendenten Gleichungen. *Gac. mat., Madrid* 11, 12—18 (1959) [Spanisch].

Ansorge, R.: Bemerkungen zu einem Iterationsverfahren von Bodewig zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. *Z. angew. Math. Mech.* 39, 165 (1959).

Es wird festgestellt, „die Bodewigsche Behauptung, daß das nach ihm benannte Verfahren schneller konvergiere als die meisten anderen Verfahren, beruht auf einem Irrtum“. Zur Begründung zeigt Verf., daß die Bodewigschen Näherungsvektoren mit denen des Gesamtschrittverfahrens übereinstimmen. *H. Schwerdtfeger.*

Stenker, Horst und Norbert Sieber: Ein Reduktionssatz über Umkehrmatrizen und seine Anwendung auf ein Beispiel aus der Statik. *Wiss. Z. Hochschule Architektur Bauwesen Weimar* 6, 105—117 (1959).

Zur n -reihigen nichtsingulären Matrix $A = (a_{ik})$ sei die Kehrmatrix $A^{-1} = (b_{ik})$ bekannt. Bezeichnet \tilde{A} die $(n-1)$ -reihige Untermatrix, die aus A durch Streichen der l -ten Zeile und h -ten Spalte hervorgeht, so erhält man die Elemente \tilde{b}_{ik} der Kehrmatrix \tilde{A}^{-1} aus den b_{ik} nach der Formel

$$\tilde{b}_{ik} = b_{ik} - b_{hk} b_{il} / b_{hl} \quad (i \neq h, k \neq l).$$

Dieser Satz wird zunächst für $h = l$, dann allgemein bewiesen. Es wird angewandt auf ein Beispiel aus der Baustatik, wo eine von mehreren statisch Unbestimmten durch Lösen einer Bindung entfällt. An Zahlenbeispielen wird die Handhabung der Reduktionsformel einer unmittelbaren Inversion von \tilde{A} gegenübergestellt.

R. Zurmühl.

Huzino, Seiiti: On calculating eigenvalues by the gradient method. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A* 12, 30—39 (1958).

L'A. cherche les valeurs propres de $Ax = \lambda Bx$ par une méthode d'itération du type: $T p_i = M^x x_i - \mu(x_i) N x_i$, $x_{i+1} = x_i + a p_i$, $\lambda_{i+1} = \mu(x_{i+1})$, a doit être suffisamment petit. Les matrices A et B peuvent être complexes. Mais des hypothèses restrictives interviennent en cours de démonstration si bien que le degré de généralité de la méthode n'apparaît pas nettement. La valeur propre vers laquelle tend l'itération n'est pas non plus précisée.

J. Kuntzmann.

Gregory, Robert T.: Results using Lanczos' method for finding eigenvalues of arbitrary matrices. *J. Soc. industr. appl. Math.* 6, 182—188 (1958).

Das Biorthogonalisierungsverfahren von Lanczos (dies. Zbl. 45, 397) zur Aufstellung der charakteristischen Gleichung einer beliebigen (komplexen) Matrix A wird mit Rücksicht auf die bei Matrizen größerer Reihenzahl ($n \geq 10$) störenden Rundungsfehler dahingehend abgewandelt, daß an Stelle der theoretisch zu erwartenden Jacobi-Matrix J eine Hessemberg-Matrix H erzeugt wird, bei der die Elemente oberhalb der ersten Oberdiagonale infolge von Rundungsfehlern von Null verschieden sind. Nach Berechnung von H aber geht man durch Streichen dieser Elemente wieder auf eine Jacobi-Matrix J' (Tridiagonalmatrix) über. Durch diese und einige weiteren rechentechnischen Maßnahmen gelingt eine wesentliche Genauigkeitssteigerung gegenüber dem ursprünglichen Vorgehen, wie am Beispiel einer 20reihigen Matrix vorgeführt wird.

R. Zurmühl.

Laasonen, Pentti: A Ritz method for simultaneous determination of several eigenvalues and eigenvectors of a big matrix. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 265, 16 p. (1959).

Let A be a matrix of (large) order n of which a relatively small number m of eigensolutions are wanted. The author describes an iteration method, which starts from two (n, m) -matrices Y and V of rank m . Let $Q^{(k)} = V^T A^k Y$. If m is normal with respect to A — i. e. the m dominant eigenvalues of A are larger in absolute value than the $n - m$ other ones — then, if k increases, the roots of $\det(Q^{(k+1)} - \mu Q^{(k)}) = 0$ tend in general to the m dominant eigenvalues of A and the corresponding solutions of $(Q^{(k+1)} - \mu Q^{(k)})x = 0$ tend, after multiplication by $A^k Y$, to the related eigenvectors of A . A similar result is obtained for Hermitian matrices with abnormal m . At some stages, where the effect of rounding errors becomes too great, the iterations must be interrupted by a determination of approximate eigenvectors, which then are used as new initial matrices Y and V . The author remarks that, as to accuracy, the method is comparable with the direct orthogonalization methods [F. L. Bauer, J. Assoc. comput. Machin. 5, 246—257 (1958)]. Moreover some advantages with respect to the standard Koch method are mentioned. The author does not give a numerical example, so that it is difficult to give a judgment on the practical applicability of the method. T. J. Dekker.

Fettis, Henry E.: Note on the determination of higher modes of vibration by the Stodola or matrix-iteration method. J. Aero-Space Sci. 26, 317—318 (1959).

Zur iterativen Ermittlung des zweiten Eigenwertes λ_2 nebst Eigenvektor x_2 einer Matrix A , deren erster (betragsgröÙter) Eigenwert λ_1 bereits vorliegt, wird gegenüber dem üblichen Vorgehen (Verfahren von Koch), bei dem Kenntnis des ersten Eigenvektors x_1 (und, bei nichtsymmetrischer Matrix auch des zugeordneten Linksvektors y_1) vorausgesetzt wird, eine Iteration am Vektor $z = \lambda_1 x - A x$ bei beliebigem Ausgangsvektor x vorgeschlagen. Der Vektor z enthält den ersten Eigenvektor x_1 nicht mehr. Das Verfahren ist fortsetzbar zur Ermittlung auch der höheren Eigenwerte. — Die — leider wenig bekannte — Methode findet sich schon bei Bode-wig, Matrix Calculus (Amsterdam 1959), p. 262—267, unter dem Namen Vektor-Deflation.

R. Zurmühl.

Tarnove, Ivin: Determination of eigenvalues of matrices having polynomial elements. J. Soc. industr. appl. Math. 6, 163—171 (1958).

Numerisch iterative Behandlung der allgemeinen Eigenwertaufgabe $\det A(\lambda) = 0$ mit $A(\lambda) = A_0 \lambda^k + A_1 \lambda^{k-1} + \dots + A_k$, A_j = konstante (komplexe) Matrizen: Durch je drei Näherungswerte $\lambda^{(i)}$ eines Eigenwertes λ bzw. die zugehörigen Funktionswerte $f(\lambda^{(i)})$ mit $f(\lambda) = \det A(\lambda)$ wird eine quadratische Interpolationsparabel gelegt, deren (zur letzten Näherung nächstgelegene) Nullstelle als neuer Näherungswert dient. Zahlenmäßige Anwendung auf eine 18reihige reelle Matrix mit 23 reellen und komplexen Eigenwerten, Angaben über Rechenzeiten, Genauigkeit und rechnerische Einzelheiten.

R. Zurmühl.

Bukovics, E.: Prinzipien bei der numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und Methoden zur Abschätzung des Fehlers. Österreich. Ingenieur-Arch. **12**, 66—82 (1958).

Verf. gibt einen Überblick über die gebräuchlichen numerischen Verfahren zur angenäherten Lösung des Anfangswertproblems bei Differentialgleichungen 1. Ordnung $y' = f(x, y)$, n -ter Ordnung $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ und bei Differentialgleichungssystemen 1. Ordnung $y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$; $i = 1, 2, \dots, n$. Eingehend erörtert er die Differenzenschemaverfahren und die Verfahren nach Runge-Kutta, untersucht ihre praktische Brauchbarkeit, auch unter Berücksichtigung moderner Rechenanlagen, sowie ihre Anwendungsbereiche, widmet sich vor allem den Fehlerabschätzungen und bringt zahlreiche Literaturhinweise. *R. Reißig.*

Fehlberg, Erwin: Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge-Kutta-Verfahren. Z. angew. Math. Mech. **38**, 421—426 (1958).

Nach Durchführung einer Transformation kann die Differentialgleichung n -ter Ordnung durch einen Runge-Kutta-Ansatz gegenüber den bekannten Runge-Kutta-Formeln für die Lösungsfunktion selbst um zwei h -Potenzen und für die Ableitungen um je eine h -Potenz genauer numerisch integriert werden. Die Ausdrücke werden zunächst für eine Gleichung erster Ordnung, anschließend allgemein für Gleichungen n -ter Ordnung ($n > 1$) hergeleitet. Ein Zahlenbeispiel für eine exakt integrierbare Gleichung erster Ordnung zeigt eindrucksvoll den Genauigkeitsgewinn gegenüber den üblichen Formeln. Auch gegenüber einer von Kutta selbst angegebenen Formel 6. Ordnung ist hier die Genauigkeit noch heraufgesetzt. *R. Zurmühl.*

Kuzmak, G. E.: Asymptotic solutions of the equation of motion for a nonlinear oscillatory system having one degree of freedom and slowly varying parameters. Doklady Akad. Nauk SSSR **120**, 461—464 (1958) [Russisch].

Für die als schwingend vorausgesetzte Lösung der Differentialgleichung

$$d^2y/dt^2 + \varepsilon f(\tau, y) dy/dt + F(\tau, y) = 0$$

($\varepsilon =$ kleiner Parameter, $\tau = \varepsilon t =$ „langsame Zeit“) wird eine Näherungslösung abgeleitet, die die wirkliche Lösung im Zeitintervall $0 \leq t \leq \tau_0/\varepsilon$ mit einem Fehler von der Ordnung ε wiedergibt. Das Ergebnis wird durch Vergleich der Ausgangsdifferentialgleichung mit einer geeignet gewählten „Etalon-Gleichung“ erzielt, wobei die wirkliche Lösung durch die Lösung der Ersatz-Differentialgleichung ausgedrückt wird. *K. Magnus.*

Budak, B. M. und A. D. Gorbunov: Über eine Differenzenmethode zur Lösung des Cauchysehen Problems für die Gleichung $y' = f(x, y)$ und für das Gleichungssystem $x'_i = X_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ mit unstetigen rechten Seiten. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. **13**, Nr. 5, 7—12 (1959) [Russisch].

Verff. behandeln das Cauchy'sche Problem für die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Die rechte Seite dieser Gleichung sei in dem Rechteck $|x - x_0| \leq A$, $|y - y_0| \leq B$ überall definiert mit Ausnahme einer endlichen Zahl von singulären Linien: glatten Kurven der Form $y = \varphi(x)$ und Geradenstücken $x = \text{const}$. In den Bereichen zwischen den singulären Linien soll die Funktion $f(x, y)$ gleichmäßig stetig sein und hinsichtlich y einer Lipschitzbedingung genügen, so daß sie in den Randpunkten dieser Bereiche Grenzwerte von innen her besitzt. Unter einer Lösung der Grundgleichung mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ verstehen Verff. jede stetige Funktion $y = y(x)$, die die Integralgleichung $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y) d\xi$ erfüllt. Sie konstruieren wie üblich in einem Intervall $|x - x_0| \leq a < A$ den Eulerschen Streckenzug $\tilde{y}(x, h) = y_k + (x - x_k) f(x_k, y_k)$ für $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, wobei $x_k = x_0 + k h$, $y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$ [bzw. $y_k = y_{k+1} - h f(x_{k+1}, y_{k+1})$ für $k < 0$] und beweisen, daß $\tilde{y}(x, h) \Rightarrow y(x)$ für $h \rightarrow 0$ (Existenz und Eindeutigkeit). Wenn

$f(x, y)$ nach beiden Argumenten einer Lipschitzbedingung genügt, gilt überdies $|\tilde{y}(x, h) - y(x)| \leq C h$. Verff. untersuchen dann noch die Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten und einem Parameter. Wenn $y(x; x_0, y_0; \lambda)$ die Lösung der Gleichung $y' = f(x, y, \lambda)$ darstellt, zeigen sie: $y(x, x_0^*, y_0^*; \lambda^*) \Rightarrow y(x, x_0, y_0; \lambda)$ für $(x_0^*, y_0^*, \lambda^*) \rightarrow (x_0, y_0, \lambda)$. Im zweiten Teil ihrer Arbeit betrachten Verff. das Cauchysche Problem für Differentialgleichungssysteme $dx_i/dt = X_i(t; x_1, \dots, x_n)$; $i = 1, \dots, n$. Die Funktionen $X_i(t; x_1, \dots, x_n)$ sollen überall im Parallelepiped $|x_i - x_i^0| \leq A_i$; $|t - t_0| \leq A_0$ definiert sein, mit Ausnahme von endlich vielen Hyperflächen $t = \text{konst.}$ oder $F(t; x_1, \dots, x_n) = 0$ ($\text{grad } F \neq 0$); in den von diesen Flächen erzeugten Teilbereichen sollen sie bezüglich aller Argumente einer Lipschitzbedingung genügen. Für die Lösung mit der Anfangsbedingung $x_i(t_0) = x_i^0$ wird nun (ähnlich wie im ersten Teil der Arbeit) die Existenz- und Eindeutigkeitsbehauptung sowie die stetige Abhängigkeit von der Anfangsbedingung und einem in den Gleichungen enthaltenen Parameter nachgewiesen.

R. Reißig.

Kaufman, H.: Circuit response to periodic inputs. *Revista Ci.* 59, 14—20 (1958).

Das Verhalten eines (elektrischen) Kreises bei Erregung durch nichtharmonische Funktionen wird auf die Lösung einer Differenzengleichung zurückgeführt. Dieses für den einfachen Fall einer Erregung durch Rechteckimpulse bereits von Gardner und Barnes angewendete Verfahren wird hier auf Fälle verallgemeinert, bei denen die volle Periode aus beliebig vielen Teilintervallen zusammengesetzt ist, in denen die Erregerfunktion stetig bleibt. Für jedes Teilintervall wird das Verhalten des Systems durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung beschrieben. Dieses „Anstückelverfahren“ soll bei Systemen der vorgegebenen Art schneller zum Ziel führen, als die Methode der Superposition von Teillösungen.

K. Magnus.

Budak, B. M. und A. D. Gorbunov: Über die Konvergenz einiger Differenzprozesse für die Gleichungen $y' = f(x, y)$ und $y'(x) = f[x, y(x), y(x - \tau(x))]$. *Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim.* 13, Nr. 1, 23—32 (1958) [Russisch].

Verff. behandeln in der Hauptsache die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, deren rechte Seite in einem beschränkten abgeschlossenen Gebiet \bar{G} der (x, y) -Ebene definiert und stetig sein soll. Es wird verlangt, die Lösung $y(x)$ zu finden, die der Bedingung gehorcht: $y(x_0) = y_0$; $(x_0, y_0) \in G$. Näherungswerte y_i für die Ordinaten $y(x_i)$ in den Punkten $x_i = x_0 + i h$; $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ werden mit Hilfe folgender Differenzengleichung gesucht:

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i y_{k-i} = h \sum_{i=0}^n \beta_i f_{k+l-i}; f_i = f(x_i, y_i).$$

Hierin sind $l, m > 0, n \geq 0$ vorgegebene ganze Zahlen, α_i und β_i feste reelle Zahlen. Die Ordnung der Gleichung beträgt $p - q$, wobei $p = \max(k, k + l)$, $q = \min(k - m, k + l - n)$, und es werden zur Auflösung folgende Anfangswerte gewählt: $y_i = g(x_i)$ für $i = 0, -1, \dots, -(p - q - 1)$; $g(x_0) = y_0$. Die „Anfangsfunktion“ $g(x)$ soll in einer gewissen linken Nachbarschaft von x_0 stetig differenzierbar sein. Der Streckenzug mit den Ecken (x_i, y_i) wird als $y = \tilde{y}_h(x)$ bezeichnet. Wenn jede gegen 0 konvergierende Schrittfolge eine solche Unterfolge h_r ; $r = 1, 2, \dots$ enthält, daß $\tilde{y}_{h_r}(x) \Rightarrow y(x)$ über $[x_0, \bar{x}]$, dann nennen Verff. den durch obige Gleichung festgelegten Differenzenprozeß konvergent. Als notwendige Konvergenzbedingungen leiten sie die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i = 0, \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_0 + \dots + \alpha_i) = \sum_{i=0}^n \beta_i \neq 0$$

her. Unter der Voraussetzung, daß diese erfüllt sind, stellen nun Verff. ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz des Differenzenprozesses auf. Dazu führen sie den Raum C_h der endlichen Funktionen $\psi(x)$,

deren Werte φ_k in den Punkten $x_k = 0, 1, \dots, N_h = [(\bar{x} - x_0)/h]$ vorgegeben sind, ein und betrachten die Differenzengleichung $\sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_0 + \dots + \alpha_i) \varphi_{k-i} = h \varphi_k$; ihre Lösung unter verschwindenden Anfangsbedingungen schreiben sie als $\varphi_k = h B_h \varphi_k$, wobei B_h ein linearer beschränkter Operator mit einer Norm $\|B_h\| = \max_{0 \leq k \leq N_h} \sum_{i=0}^{k-1} |\gamma_{ki}|$ ist. Das erwähnte Kriterium besteht darin, daß $\|B_h\|$ über $0 < h \leq h_0$ gleichmäßig beschränkt ist und daß ferner die Beträge der einfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_0 + \dots + \alpha_i) \lambda^{m-1-i} = 0$ nicht größer als Eins und die Beträge der mehrfachen Wurzeln kleiner als Eins sind. Schließlich bringen Verff. noch Abschätzungen für den Fehler der erhaltenen Näherungen und gehen kurz auf die Gleichung mit nacheilendem Argument $y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau(x)))$ ein, deren Behandlung mit dem Differenzenverfahren auf die vorangehenden Überlegungen zurückgeführt wird. *R. Reißig.*

Collatz, Lothar: Approximation in partial differential equations. Numer. Approx., Proc. Sympos. Math. Res. Center, Madison, April 21—23, 1958, 413—422 (1959).

In diesem Bericht wird dargelegt, auf welche Weise man die Tschebyscheff-Approximation und ähnliche Arten der Approximation bei der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen und der zugehörigen Fehlerabschätzung verwenden kann. — Für viele Probleme gelten Randmaximumsätze. Wendet man dabei Tschebyscheff-Approximation auf gewisse Randdefekte an, so erhält man eine optimale Näherung und Fehlerabschätzung im ganzen Grundgebiet. (Beispiel: Elliptische Differentialgleichungen bei endlichem Grundgebiet, ähnlich bei unendlichem Grundgebiet, nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen u. a.) Praktisch kann man die Approximation oft mit Hilfe der Relaxation durchführen (numerisches Beispiel). — Wendet man Sätze, welche für das Iterationsverfahren $u_{n+1} = T u_n$ in pseudometrischen Räumen aufgestellt sind, auf Differentialgleichungen an, so erhält man eine Fehlerabschätzung $|u(x) - u_1(x)| \leq \sigma(x)$ für die Lösung u . Die Fehlerschranke σ wird dabei so bestimmt, daß ein gewisser σ enthaltender Ausdruck im ganzen Grundgebiet möglichst klein, aber überall nichtnegativ ausfällt. Bei dieser Approximationsaufgabe hat man als wesentlichen Unterschied gegenüber der Tschebyscheff-Approximation die zusätzliche Bedingung der „Annäherung von oben“ (numerisches Beispiel). — Für die Tschebyscheff-Approximation stehen brauchbare numerische Methoden zur Verfügung. Außerdem kennt man Kriterien für die Güte der erreichbaren Genauigkeit bei gegebenem Ansatz. *J. Schröder.*

Greenspan, Donald: On a "best" 9-point difference equation analogue of Laplace's equation. J. Franklin Inst. 263, 425—430 (1957).

Versucht man die Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ zu lösen, indem man Differenzengleichungen $\sum \alpha_i u_i = 0$ herleitet, die jeweils die Werte der gesuchten Funktion in n Punkten eines quadratischen Netzes in Beziehung setzen, und dann das so entstehende System von Gleichungen löst, so taucht die Frage auf, welche Differenzengleichungen die besten Näherungslösungen liefern. Verf. entwickelt u nach der Netzkonstanten h , setzt es dann in die Differenzengleichungen ein und findet so $\sum \alpha_i u_i = O(h^n)$. Für die 9-Punkte-Methode liefert die üblicherweise verwandte Differenzengleichung $-20 u_0 + 4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = 0$ $n = 8$ und es wird gezeigt, daß es keine Differenzengleichung mit $n > 8$ gibt.

H. Tolle.

Greenspan, Donald: Note on nine-point analogues of Laplace's equation. J. Franklin Inst. 264, 453—456 (1957).

Verf. hat in der vorstehend referierten Arbeit gezeigt, daß es keine Differenzengleichung gibt, die die Potentialgleichung bei Verwendung der 9-Punkte-Methode

besser annähert als die Differenzengleichung

$$(1) \quad -20u_0 + 4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = 0.$$

In dieser Arbeit zeigt er, daß es noch nicht einmal wesentlich von (1) verschiedene Differenzengleichungen gibt, die die Potentialgleichung genau so gut annähern wie (1).

H. Tolle.

Greenspan, Donald: On a "best" five-point difference analogue of Laplace's equation. J. Franklin Inst. 266, 39—46 (1958).

Verf. betrachtet die Methode, die Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ mit Hilfe eines Systems von Differenzengleichungen zu lösen, die jeweils die Werte von u in 5 benachbarten Punkten eines Netzes von Rechtecken (Seitenlängen h, d ; $h = p \cdot d$) in Beziehung setzen $\left(\sum_0^4 \alpha_i u_i = 0\right)$. Er entwickelt eine passende Differenzengleichung und zeigt, daß die Lösungen der Differentialgleichung die Differenzengleichung bis auf Glieder 4. Ordnung in d befriedigen $\left(\sum_0^4 \alpha_i u_i = O(d^4)\right)$ und daß es keine entsprechenden Differenzengleichung gibt, die von den Lösungen der Differentialgleichung bis auf Glieder höherer als 4. Ordnung befriedigt werden. Es gilt sogar, daß es keine wesentlich verschiedenen Differenzengleichung gibt, die eine gleich gute Näherung liefert. Für $p \rightarrow 1$ gehen die α_i in die bekannten α_i für das quadratische Netz über.

H. Tolle.

Greenspan, Donald: On the numerical solution of n -dimensional boundary value problems associated with Poisson's equation. J. Franklin Inst. 266, 365—372 (1958).

Verf. betrachtet die Differentialgleichung $\sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x_1 \cdots x_n)$ in einem Gebiet G mit $u(x_1, \cdots, x_n) \equiv g(x_1, \cdots, x_n)$ auf der Berandung und zeigt einen Weg, den Wert der Lösung in den Knotenpunkten eines Koordinatengitters mit den Gitterkonstanten h_i angenähert zu finden, indem er jeweils die Werte von u in $2n + 1$ benachbarten Punkten miteinander in Beziehung setzt und so ein lineares System von Differenzengleichungen erhält, von dem er nachweisen kann, daß es eine eindeutige Lösung besitzt, die für $h_i \rightarrow 0$ gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergiert. Die Arbeit stellt eine Erweiterung der von den Verf. ausführlich untersuchten Methoden dar, die Potentialgleichung mit Hilfe eines Systems von Differenzengleichungen zu lösen (vgl. vorstehende Referate).

H. Tolle.

Greenspan, D.: On "best" nine-point Laplace difference analogues on rectangular grids. Quart. J. Mech. appl. Math. 12, 111—116 (1959).

Verf. erweitert die Methode die Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ mit Hilfe eines Systems von Differenzengleichungen zu lösen, die jeweils die Werte von u in 9 benachbarten Punkten eines quadratischen Netzes in Beziehung setzen $\left(\sum_0^8 \alpha_i u_i = 0\right)$, indem er an Stelle des quadratischen Netzes ein Netz aus Rechtecken der Seitenlängen h, d ($h = p \cdot d$) benutzt. Er entwickelt eine passende Differenzengleichung und zeigt, daß die Lösungen der Differentialgleichung die Differenzengleichung bis auf Glieder 6. Ordnung in d befriedigen $\left(\sum_0^8 \alpha_i u_i = O(d^6)\right)$ und daß es keine entsprechenden Differenzengleichung gibt, die von den Lösungen der Differentialgleichung bis auf Glieder höherer als 6. Ordnung befriedigt werden. Für $p \rightarrow 1$ gehen die α_i in die bekannten α_i für das quadratische Netz über.

H. Tolle.

Greenspan, D.: On the numerical solution of Dirichlet problems. Quart. J. Mech. appl. Math. 12, 117—123 (1959).

Verf. erweitert die Methode, die Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ mit den Randwerten $u(x, y) \equiv g(x, y)$ mit Hilfe eines Systems von Differenzengleichungen zu lösen, die jeweils die Werte von u in 5 Punkten eines quadratischen Netzes in Be-

ziehung setzen, indem er an Stelle des quadratischen Netzes ein Netz von Rechtecken mit den Seitenlängen h, d ($h = p \cdot d$) betrachtet. Er leitet eine passende Differenzengleichung ab, und zeigt, daß das System der Differenzengleichungen für die gesamten Knotenpunkte des rechteckigen Netzes des betrachteten Gebietes eine eindeutige Lösung besitzt. Die Differenz der Lösung der Differentialgleichung und der Lösung des Systems von Differenzengleichungen in den Gitterpunkten geht mit h, d gegen Null.

H. Tolle.

Greenspan, Donald: Numerical analysis and the Dirichlet problem. Math. Mag. 32, 177—188 (1959).

Verf. gibt einen zusammenfassenden Überblick über die Methode, Lösungen für die Potentialgleichung mit Hilfe von Differenzengleichungen zu finden, die die Werte der gesuchten Funktion in 5 Punkten eines quadratischen Netzes in Beziehung setzen und so ein lineares Gleichungssystem liefern, das eindeutig lösbar ist. Eine Zusammenstellung der Verallgemeinerungen der Methode mit einer Gegenüberstellung der Differentialgleichungen und der zugehörigen Differenzengleichungen und eine ausführliche Bibliographie von mehr als 70 Titeln machen die Arbeit besonders wertvoll.

H. Tolle.

Hammer, Preston C.: The midpoint method of numerical integration. Math. Mag. 31, 193—195 (1958).

Um Formeln für numerische Integration aufzustellen, kann man von der — oft zu wenig benutzten — Treppenkurve ausgehen (Mittelpunktmethode) oder von dem Sehnenpolygon (Trapezregel) oder beide kombinieren (u. a. Simpsonsche Regel).

E. J. Nyström.

Brun, Viggo: An application of a "Carpenter's curve" to Simpson formulas. Nordisk mat. Tidskrift 7, 20—24, englische Zusammenfassg. 56 (1959).

Auf Grund einer von Brun gegebenen (dies. Zbl. 53, 264) und von Selmer besprochenen (nachstehendes Referat) Integrationsformel wird eine solche der Simpsonschen Art für vier nicht gleichabständige Ordinaten ist hergeleitet. Man erhält die "carpenter's curve" als Grenzgebilde, wenn man aus einem Polygon sukzessiv Ecken wegschneidet.

E. J. Nyström.

Selmer, Ernst S.: A note on the preceding paper by V. Brun. Nordisk mat. Tidskrift 7, 25—26, engl. Zusammenfassg. 56 (1959).

Auf gewisse Zusammenhänge zwischen kürzlich veröffentlichten Formeln für numerische Integration bei nicht äquidistanten Ordinaten wird hingewiesen.

E. J. Nyström.

Beckmann, P. and K.-H. Schmelovsky: Über ein bei Schwunderscheinungsuntersuchungen vorkommendes Integral. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 4, 167—171 (1958).

Für das Integral $u(P, Q) = \int_0^{2\pi} e^{-P \cos^2 \varphi + Q \cos \varphi} d\varphi$ wird die allgemeine Lösung durch modifizierte Bessel-Funktionen erhalten und in Form einer schnell konvergierenden Reihe gegeben. Ferner wird die Anwendung der Sattelpunktmethode beschrieben, um geeignete Entwicklungen zu gewinnen. Schließlich werden andere Auswertungsmöglichkeiten angegeben u. a. durch Vergleich mit der Wärmeleitungsgleichung.

E. J. Nyström.

Warmus, M. Nomographic functions. Rozprawy mat. Nr. 16, 150 p. (1959). Verf. untersucht, wann sich eine Funktion $F \equiv F(x, y, z)$ nomographisch darstellen, d. h. in Form einer Massauschen Determinante

$$F \equiv \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}, \quad X_i \equiv X_i(x), \quad Y_i \equiv Y_i(y), \quad Z_i \equiv Z_i'(z)$$

schreiben läßt und wie man allgemein alle möglichen wesentlich verschiedenen

Massauschen Determinanten für eine vorgegebene Funktion F findet. Als wesentlich verschieden werden solche Nomogramme bezeichnet, die sich nicht durch eine projektive Transformation ineinander überführen lassen. Verf. beweist dazu zunächst eine Reihe von Sätzen über lineare Abhängigkeit und Rangrelationen und zeigt dann: Werden die Funktionen F vom Standpunkt ihres Ranges bezüglich x, y, z aus betrachtet, so erhält man 7 Hauptfälle mit dazugehörigen Massauschen Determinanten. Nach einem gewissen Schema läßt sich jede vorgegebene Funktion daraufhin untersuchen, zu welchem der Hauptfälle sie gehört und es lassen sich die zugehörigen Massauschen Determinanten bestimmen. Dabei ergibt sich von selbst, ob die Funktion auf eine oder zwei wesentlich verschiedene Arten nomographierbar ist. Nicht erfaßt werden kann, ob die Funktion in transformierter Form nomographierbar ist (z. B. ist $F \equiv x + y + z$ nomographierbar, $F \equiv x/(y + z) + 1$ nicht). Eine Reihe von Beispielen erläutert das Vorgehen, so daß die umfangreiche Arbeit leicht lesbar ist.

H. Tolle.

Erismann, Th.: Moderne mechanische Integrieranlagen. *Sci. electrica* 3, 112—120 (1957).

Beschreibung des heutigen Entwicklungsstandes der mechanischen Integrieranlagen und deren Möglichkeiten im Vergleich mit anderen Rechengegeräten. Besondere Aufmerksamkeit wird der Technik der modernen Integration und anderen Rechenelementen geschenkt.

E. J. Nyström.

Michajlov, G. A., B. N. Šitikov und N. A. Javlinskij: Die digitale elektronische Maschine CÉM-1. *Probl. Kybernetik* 1, 190—202 (1958) [Russisch].

L'A. présente le calculateur digital CÉM-1: fonctionnement en série; à deux adresses; avec 30 chiffres binaires et le chiffre signe; les nombres x dans la machine vérifient l'inégalité: $0 \leq |x| \leq 1 - 2^{-30}$; mémoire opérative (lignes de retard à ultra-sons) et mémoire extérieure à bande magnétique; sommation 495 op./sec; multiplication et division 232 op./sec; on utilise 1900 tubes et 14 kW.

P. Constantinescu.

Sager, Günther: Jubiläum im Gezeitenrechenmaschinenbau. *Z. angew. Math. Mech.* 39, 110—117 (1959).

Geschildert wird das Problem der Gezeitenberechnung in historischer Entwicklung. Neben dem allgemeinen Schema einer Gezeitenrechenmaschine wird insbesondere eine neue deutsche Konstruktion für das Institut f. Meereskunde, Warnemünde, beschrieben.

K. Eggers.

Ljubčenko (Lubchenko), G. G.: Methodik der Auswahl von logischen Operationen und der sie ausführenden Mechanismen für digitale Rechenmaschinen. *Ukrain. nat. Žurn.* 10, 375—387, engl. Zusammenfassg. 387—388 (1958) [Russisch].

This paper discusses a method of comparing and assessing the various sets of logical operations which might be used as basic components in a proposed computing machine. The author first considers all one and two place Boolean operations — he does not consider operations with more than two arguments since, he says, at the present time elements with more than two inputs are not used as basic components since their physical realization is always accomplished in terms of one or two place operations. There are 11 of these (all the non-trivial two place operations and negation) which might be used either with or without the logical constants 0, 1. He then considers the 2047 non-null sets of these and lists those sets which are not suitable for a universal machine on the grounds that they are not capable of yielding all Boolean functions. He goes on to discuss how the remaining sets should be assessed on the grounds of time required by the machine for its calculations, of energy required and of constructional complexity and with various combinations of these three factors. By making the appraisal in three stages — initial, rough and final estimate he shows that the estimation can be effected by examining a relatively small number of sets.

J. C. Shepherdson.

Markov, A. A.: On the inversion complexity of a system of functions. Translated from Russian by **Morris D. Friedmann.** J. Assoc. comput. Machin. 5, 331—334 (1958).
Betrifft die in diesem Zbl. 79, 246 besprochene Arbeit des Verf.

Moisil, Grigore Constantin: Teoria algebrica dei meccanismi automatici. Il funzionamento nel tempo dei meccanismi a contatti e rele'. Applicazione dell'algebra della logica allo studio dei meccanismi a contatti e rele'. Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari 33/34, 30 p. (1959).

These two papers deal in an introductory way with the application of Boolean algebra to relay circuits and with the general concept of a finite mechanism or automaton. It is also shown how a three valued logic could be used to deal with the functioning of real relays, taking account of the intermediate position of the armature (but not of the different operating times of different relays). Brief mention is also made of the author's own applications of finite fields to the theory of automata. A bibliography of Rumanian work on finite automata is given. *J. C. Shepherdson.*

Gesse, A. G.: Eine elektrische Resonanzschaltung zur Lösung eines Systems von linearen Differentialgleichungen. Vyčislit. Mat. 2, 154—159 (1957) [Russisch].

On emploie un circuit électrique à résonance pour résoudre un système d'équations linéaires à coefficients constants. On considère une inconnue supplémentaire x_{n+1} ayant comme coefficients les termes libres. On peut séparer une équation d'ordre k tel que la somme de coefficients des inconnues soit $c_k \neq 0$. La solution du dernier système donne aussi, à l'aide d'une relation déterminée, la solution du premier. L'A. présente le circuit électrique et donne un exemple.

P. Constantinescu.

Riesenkönig, Wolfgang: Erzeugung lexikographisch geordneter Permutationen in Rechenautomaten. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 4, 209—224, engl. Zusammenfassg. 221 (1959).

The author introduces a method of programming digital computers to generate permutations of n elements in dictionary order. We consider the permutation numbers which permit an optimum programming method of generating the permutations. With this method the average number of transfers is reduced. The programming is illustrated by flow diagrams.

P. Constantinescu.

● **Susskind, Alfred K. (edited by):** Notes on analog-digital conversion techniques. (Technology Press Books in Science and Engineering.) Cambridge, Mass.: Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology; New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd. 1958. X, 415 p. \$ 10,—, 80 s. net.

In vermehrtem Maße trifft man heute in der Automation und in militärischen Geräten die gemischte Verwendung von Analogie- und digitaler Darstellung der vorkommenden Variablen in einem Rechensystem. Hierzu braucht es Umwandler, welche die zu verarbeitenden Größen von der einen Darstellung in die andere überführen. Dabei gilt es eine Anzahl von schwierigen Fragen aufzuklären, welche das Zeit- und Frequenzverhalten solcher Systeme betreffen, und welche insbesondere dann von Wichtigkeit sind, wenn der Umwandler Teil einer geschlossenen Gegenkopplungsschleife bildet. Das vorliegende Buch ist als Leitfaden für einen speziellen Sommerkurs, der 1956 und 1957 über dieses Gebiet am Massachusetts Institute of Technology abgehalten wurde, aufgestellt worden. Im ersten Hauptteil sind jene Systemaspekte der digitalen Datenverarbeitung, welche die Funktion der Umwandler beeinflussen, analysiert. Der zweite Teil stellt eine Aufzählung der bekannten Methoden zur Umwandlung zwischen den zwei Darstellungsarten dar, und der dritte Teil erläutert an Hand eines praktisch durchgeführten Beispiels die einzelnen Schritte beim Entwurf eines vollständigen Systems. Der anspruchslose Titel dieses Buches darf nicht darüber hinweg täuschen, daß es sich hier wohl um die umfassendste bis jetzt publizierte Studie über diesen Gegenstand handelt.

Ambros. Speiser.

Kamynin, S. S., É. Z. Ljubimskij und M. R. Šura-Bura: Über die Automatisierung des Programmierens mit Hilfe eines programmierenden Programms. Probl. Kybernetik 1, 135—171 (1958) [Russisch].

Das Operatorschema eines Programms (A. A. Ljapunov 1953) ist seine Darstellung als Folge von Operatoren (Anweisungen) und von eingestreuten Zielangaben für (bedingte) Sprünge. Operatoren sind bestimmte Programmstücke, deren Beschreibung durch Konvention festgelegt ist. Das hier beschriebene „Programmierende Programm“ PP2 dient dazu, solche Operatorschemata, ergänzt durch gewisse als Tabellen bezeichnete zusätzliche Informationen, in die Maschinensprache der Dreiaßreiß-Maschine Strela zu übersetzen, deren Kenntnis für die Lektüre z. T. vorausgesetzt wird. Jeder Operator trägt einen Namen, bestehend aus seiner Ordnungsnummer im Schema und aus einer Zahl, die seinen Typ angibt. Es gibt 6 Typen: (P) Logische Operatoren = aussagenlogische Verknüpfungen (Klammerausdrücke) zweiwertiger Variablen p_i ($i = 1, 2, \dots$), an die sich die Angabe des Sprungziels für den Ja- und für den Nein-Fall anschließt. Der Wert von p_i ist jeweils gegeben durch die Stellung des Strela-Flip-Flops ω nach einem Strela-Befehl B_i . [Dieses ω wird bei Strela nach jedem Additions-, Vergleichs- und ähnlichem Befehl in Abhängigkeit vom Ergebnis eingestellt.] Die B_i mit symbolischen (= fiktiven) Adressen bilden die Tabelle Nr. 1 des Programms. (A) Arithmetische Operatoren = Folgen von expliziten Gleichungen (im dynamischen Sinn). Die Klammerregeln sind nicht die üblichen, wenn man Rechenoperationen verschiedenen Ranges zusammenklammert. Dadurch wird die Übersetzung sehr vereinfacht. Elementare Funktionen sind zugelassen, soweit im Festspeicher vorhanden. (F) Die Operatoren der Adressenrechnung besorgen die Addition von Konstanten oder errechneten Zahlen zu Adressen, die (symbolisch) in der Tabelle Nr. 2 des Programms angegeben sind. Die Wirkung von F kann auf Einzelteile des Programms beschränkt werden. (O) Die Satz-Operatoren setzen die durch F betroffenen Adressen in ihre Anfangsstellung zurück. (Z) Die Transport-Operatoren bringen die bezeichneten Variablen in „Standardzellen“, schreiben die betroffenen A um und besorgen auch den Rücktransport aus den Standardzellen. Dies ist dann von Vorteil, wenn eine durch F umzurechnende Adresse in A häufig vorkommt. (N) Beliebige Programmstücke, die im Strela-Code, aber mit symbolischen Adressen, programmiert wurden, können als „Nicht-Standard-Operatoren“ in das Schema aufgenommen werden. — Die weiteren Tabellen des Programms betreffen Angaben wie den höchstzulässigen Speicherbedarf und den Start des Programms. Die Operatoren, nach Typen geordnet, und die Tabellen werden in binärer Form auf Lochkarten zur Übersetzung in die Strela eingegeben. — Verff. beschreiben die Konventionen für die Darstellung der zu übersetzenden Programme und deuten die Arbeitsweise des Übersetzers PP2 an, die zum Teil in den im Folgenden besprochenen Noten näher beschrieben ist. Da PP2 bereits 1954—55 aufgestellt wurde, ist es eines der ersten Übersetzungssysteme. Daraus erklären sich auch die Unvollkommenheiten gegenüber neueren Systemen (vgl. etwa Perlis und Samelson, dies. Zbl. 84, 123). So fehlen indizierte Variable, Unterprogramm- und Schleifenorganisation. PP2 ist aber offenbar übersichtlich genug programmiert, um leicht verbessert und erweitert zu werden. Jedenfalls war es einer der ersten Schritte zur problem-orientierten algorithmischen Sprache.

G. Beyer.

Luchovickaja, É. S.: Der Block für die Bearbeitung der logischen Bedingungen im PP 2. Probl. Kybernetik 1, 172—177 (1958) [Russisch].

Die Übersetzung der logischen Operatoren P und der zugehörigen Tabelle Nr. 1 (s. vorstehendes Referat) in ein Programm der Strela wird beschrieben. Im Klammerausdruck P wird zur letzten öffnenden Klammer die zugehörige schließende Klammer gesucht, und dem eingeklammerten Ausdruck werden zwei Ausgänge Ja-Fall, Nein-Fall) zugeordnet. Dieses Verfahren erfordert mehrere Durchmusterungen.

rungen, und die Verf. bemerkt, daß Verbesserungen möglich, aber noch nicht programmiert worden sind. *G. Beyer.*

Ljubimskij, É. Z.: Der arithmetische Block im PP 2. Probl. Kybernetik 1, 178—181 (1958) [Russisch].

Die Übersetzung der arithmetischen Operatoren A (s. vorletztes Referat) in ein Maschinenprogramm der Strela wird beschrieben: 1. Aufsuchen und Codieren des ersten Operationssymbols, auf das nicht eine öffnende Klammer folgt. 2. Durchmusterung der Klammersymbole nach Wiederholungen dieser Operation (mit denselben Operanden). 3. Streichen aller unnötigen Klammern. 4. Rückkehr zu 1. Es ist also eine Reihe von Durchmusterungen des Operators erforderlich. *G. Beyer.*

Kamynin, S. S.: Der Block für die Adressenrechnung im Programm PP 2. Probl. Kybernetik 1, 182—184 (1958) [Russisch].

Verf. beschreibt in Form eines Operatorschemas den Übersetzungsprozeß für die Operatoren F der Adressenrechnung (vgl. hierzu das drittletzte Referat). *G. Beyer.*

Starkman, V. S.: Der Block für die Ökonomie der Zwischenspeicherzellen im PP 2. Probl. Kybernetik 1, 185—189 (1958) [Russisch].

Die Zwischenspeicher ZS des vom PP2 (vgl. vorstehende Referate) erzeugten Maschinenprogramms MP sind die Speicherzellen, die MP für Zwischenergebnisse ZE benötigt, die im Operatorschema nicht explizit auftreten. Die ZS verschiedener Operatoren können natürlich zusammengelegt werden. Innerhalb eines einzelnen Operators dagegen darf der gleiche ZS nur dann verschiedenen ZE zugewiesen werden, wenn deren „Existenzbereiche“ sich nicht schneiden. Der Existenzbereich eines ZE ist die dynamische (d. h. dem Programmablauf entsprechend geordnete) Folge von (Drei-Adreß-)Befehlen des MP , die mit der Berechnung von ZE beginnt und vor dem letzten mit ZE arbeitenden Befehl endet. PP2 ordnet zunächst jedem ZE einen eigenen ZS zu (s. vorstehende Referate). Bei einer zusätzlichen Durchmusterung des MP werden die Existenzbereiche, zu denen der einzelne Befehl gehört, in einer Tabelle T protokolliert und zugleich mit Hilfe von T den ZE die endgültigen ZS zugewiesen. Ein Operatorschema für diese Durchmusterung wird angegeben. (Eine vereinfachte Version von V. M. Kuročkin gibt Eršov in seinem Buch: Ein programmierendes Programm für eine schnelle elektronische Rechenmaschine, Moskau 1958, S. 36.) Die vom Verf. gemachte Voraussetzung, daß dynamische und statische Befehlsfolge des Operators übereinstimmen und daß die Adressen der ZS innerhalb des Operators nicht variiert werden, trifft für die arithmetischen und die Adressenrechnungs-Operatoren des PP2 zu. *G. Beyer.*

• **Oppelt, W.** (zusammengestellt von): Anwendung von Rechenmaschinen bei der Berechnung von Regelvorgängen. Vorträge, gehalten bei einer Tagung des Fachausschusses Regelungsmathematik der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) in Düsseldorf am 8. November 1957. (Beihefte zur Regelungstechnik.) München: R. Oldenbourg 1958. 128 S. DM 16,80.

Inhalt: **E. Bucovics**, Einsatzmöglichkeiten kleiner elektronischer Ziffernrechengeräte zur Lösung von Grundaufgaben der Regelungstechnik (S. 7—34); **J. B. Reswick**, a simple graphical method for deconvolution (S. 35—43); **A. Leonhard**, ein Rechenggerät für Polynome (S. 44—53); **R. Herschel**, zum Entwurf von Analogrechenschaltungen für regelungstechnische Probleme (S. 54—66); **O. Föllinger** und **G. Schneider**, Vergleich der Berechnung eines Regelvorganges mittels Rechenanlagen verschiedener Typen (S. 67—78); **E. Bühler**, über das mechanische System mit Reibung und seine elektronische Nachbildung (S. 79—101); **H. Witsenhausen**, Anwendung von Analogierechenmaschinen auf die Optimierung von ungesteuerten Regelkreisen mit statistisch schwankenden Eingangsgrößen (S. 102—110); **D. Ernst**, aus der praktischen Arbeit mit Analog-Rechenmaschinen (S. 111—117); **Th. Stein**.

vom Nutzen der Analog-Versuche für die Praxis (S. 118—124); **W. Roth**, Untersuchung der Regelung von Stromerzeugungssätzen mit Analogierechengeräten (S. 125ff.).

Da die komplexen Aufgaben der Regelvorgänge überaus schwierig durch klassische mathematische Methoden zu lösen sind, erscheint der Gebrauch von Rechenanlagen als dringend notwendig. In diesem Buch, das insgesamt 128 Seiten umfaßt, werden 10 wertvolle Artikel vorgestellt, in welchen die Verff. mehrere theoretische und praktische Ergebnisse, die durch Benutzung der Rechenmaschinen im Bereich der Regelungstechnik erhalten wurden, aufstellen. Der Leser findet z. B. in dem ersten Artikel wertvolle Angaben über die Einsatzmöglichkeiten kleiner elektronischer Ziffern-Rechengeräte. Weitere sieben Artikel sind den verschiedenen, im Bereich der Analogie-Rechengeräte erscheinenden Problemen gewidmet. Ein weiterer Artikel beschäftigt sich mit einigen Vergleichsuntersuchungen zwischen einem programm-gesteuerten Digital-Rechner, einem mechanischen- und einem elektrischen-Analog-rechner. Zur Bestimmung der Impulsantwort eines Systems, wenn der Ein- und Ausgang bekannt sind, bietet ein letzter Artikel eine einfache graphische Methode.

Gh. Ioanin.

● **Regelungstechnik — Moderne Theorien und ihre Verwendbarkeit. Bericht über die Tagung in Heidelberg vom 25.—29. 9. 1956, veranstaltet von der VDI/VDE-Fachgruppe Regelungstechnik.** Herausgegeben von **G. Müller**. München: R. Oldenbourg Verlag 1957. 483 S., 898 Bilder und 48 Tab. Leinen DM 88,—.

Der vorliegende Bericht enthält die auf der Heidelberger Tagung gehaltenen Vorträge und die dazu gehörigen Diskussionsbemerkungen. Die Tagung verfolgte das Ziel, die zwischen Theorie und Praxis der Regelungstechnik bestehende Kluft zu überbrücken. Darum befaßten sich die Vorträge teils mit Anwendungsbeispielen und ihrer rechnerischen Behandlung und teils mit mathematischen Untersuchungen von grundlegender Bedeutung. Zahlreiche Beiträge aus dem Ausland ermöglichten es, auch solche Gebiete, die in Deutschland erst schwach entwickelt sind, zu beleuchten: Anwendung statistischer Methoden, nichtlineare Regelungstheorie, Anwendung von Rechenmaschinen in der Regelungstechnik. Die Vorträge sind in folgende Kapitel, zu denen Einführungen gegeben werden, eingeteilt: Überblick, Verbindung von Theorie und Praxis durch Darstellung und Methodik, Technik der Regelgeräte, Mehrfachregelung, Lineare Methoden in der Regelungstechnik, Behandlung nicht-linearer und unstetiger Regelungen, Statistische Methoden, Optimale Bemessung und Regelgüte, Rechenmaschinen in der Regelungstechnik, Regelung von Dampferzeugern, Antriebsregelung, Regelung in Industriebetrieben, Gemeinschaftsarbeit und Ausbildung. Einzelne Vorträge von besonderem mathematischen Interesse werden nachfolgend etwas ausführlicher besprochen. Der Tagungsbericht, der deutsch und englisch bzw. russisch abgefaßt ist, wird nicht nur den Tagungsteilnehmern, sondern auch einem breiteren Kreis von Fachleuten ein nützliches Nachschlagewerk sein. — **R. Oldenburger**: Mathematische Methoden für den Entwurf selbsttätiger Regelungen, S. 2—11. — Verf. gibt einen Überblick über die grundlegenden Begriffe und Methoden zur Beschreibung linearer Regelungssysteme und zur Untersuchung ihrer Stabilitätseigenschaften. Er geht auch kurz auf statistische Verfahren, auf die Verhältnisse in Impulssystemen und auf nichtlineare Probleme ein. — **M. A. Ajzerman**: Bedingungen für die Strukturstabilität gewisser Klassen von Regelsystemen, S. 93—98. — Wenn ein lineares Regelungssystem in bestimmter Weise aus typischen Übertragungsgliedern zusammengesetzt ist, ist es immer noch technisch möglich, die Beträge der auftretenden Koeffizienten innerhalb gewisser Grenzen zu variieren. Kann dadurch die Stabilität des Systems hergestellt werden, so nennt man dieses strukturstabil. Läßt sich das aber nicht erreichen, so ist das System strukturinstabil und kann nur durch Wahl anderer Glieder oder eines anderen Aufbaus stabilisiert werden. Von Interesse sind nun Bedingungen für die sehr wich-

tige Eigenschaft der Strukturstabilität; Verf. bringt sie erst für einschleifige Systeme ohne differenzierende Glieder und dann für Systeme mit differenzierenden Gliedern. Er führt auch einige Beispiele an. — **B. P. Veltmann:** Der derzeitige Stand der Analyse und Synthese von Nichtlinearitäten in Regelungssystemen, S. 139—147. — Verf. erwähnt einige bekannte mathematische Methoden zur Behandlung nichtlinearer Regelungsdifferentialgleichungen in einfachen Fällen; er behandelt den Ursprung der Nichtlinearitäten in Regelungsanordnungen, die sog. parasitären Einflüsse und die zur Verbesserung der dynamischen Eigenschaften bewußt eingeführten Nichtlinearitäten. Dabei verfolgt er die Absicht, eine Führung durch die umfangreiche Fachliteratur zu geben. — **K. Magnus:** Näherungskriterien für Stabilität und Gefährlichkeit in nichtlinearen Regelkreisen, S. 149—151. — Verf. verwendet eine Kombination des Ansatzes der Harmonischen Balance mit den Routh-Hurwitzschen Kriterien, um das Stabilitätsproblem bei einem gewissen nichtlinearen Differentialgleichungssystem näherungsweise zu lösen und zu beurteilen, ob die Stabilitätsgrenzen gefährlich bzw. ungefährlich (im Sinne von Bautin) sind. — **John C. West:** The use of frequency response analysis in non-linear control systems, S. 155—160. — Ist der Zusammenhang zwischen der Ausgangsgröße x_a und der Eingangsgröße x_e durch eine nichtlineare Beziehung $x_a = f(x_e)$ gegeben, so linearisiert Verf. diese, indem er das Eingangssignal $x_e = h \cdot \sin \omega t$ wählt und in der Fourierdarstellung des Ausgangssignals nur die Grundharmonische $k(h) \cdot \sin \omega t$ beibehält; die Größe $k(h)$ wird als Beschreibungsfunktion des nichtlinearen Gliedes eingeführt. Diese berechnet Verf. für einige Beispiele und benutzt sie dann, um den Frequenzgang eines geschlossenen Systems, das eine derartige Nichtlinearität enthält, aufzustellen. Er betrachtet noch die Genauigkeit seines Verfahrens und dehnt es auf zufällige Signale aus. — **K. Klotter:** Über den Gebrauch von ersetzenden Übertragungsfunktionen (Beschreibungsfunktionen) zur Untersuchung nichtlinearer Regelkreise, S. 160—162. — Verf. betrachtet nichtlineare Regelkreisglieder, bei denen der Zusammenhang zwischen der Ausgangs- und der Eingangsgröße durch eine Differentialgleichung festgelegt ist. Um für solche Glieder eine Beschreibungsfunktion, die dem Frequenzgang der linearen Glieder entspricht, zu bilden, geht Verf. vom Ritz-Galerkinschen Verfahren aus. Er nimmt das Eingangssignal in der Form $y = Y \cos \omega t$ an und geht in die Differentialgleichung für das Ausgangssignal z , $E[z] = 0$, mit dem Ansatz $z = Z \cos(\omega t - \varepsilon)$ hinein. Er fordert, daß durch diesen die Gleichung im gewogenen Mittel befriedigt werden soll, wobei er $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ als Gewichtsfunktionen verwendet. Aus den beiden Bedingungsgleichungen berechnet er die Größen $N = Y/Z$ und ε , den Modul und das Argument der umgekehrten, komplexen, ersetzenden Übertragungsfunktion. Diese wird nun dazu benutzt, geschlossene Regelkreise mit einem nichtlinearen Element zu untersuchen. — **B. N. Naumov:** Eine Näherungsmethode zur Berechnung der Übergangsprozesse in selbsttätigen Regelungssystemen mit nichtlinearen Elementen, S. 184—198. — Verf. erwähnt folgende Näherungsmethoden zur Konstruktion der Übergangsprozesse nichtlinearer Regelungssysteme, die durch Differentialgleichungen beschrieben werden: Methode der Phasenebene, Anstückelungsmethode, Methode der äquivalenten Linearisierung, Differenzenverfahren. Um die letztgenannte Methode anzuwenden, stellt Verf. für die Eingangsgröße des nichtlinearen Elements in dem von ihm betrachteten Regelkreis eine Integralgleichung auf und ersetzt in ihr das Faltungsintegral mit Hilfe der Rechtecksformel durch einen Näherungsausdruck. Daraus kann er dann Näherungswerte des Übergangsprozesses in diskreten, äquidistanten Zeitpunkten berechnen. Er erörtert ferner die Methodik der Berechnung sowie Rechenregeln und widmet sich eingehend einigen Beispielen. — **A. M. Letov:** Die Stabilität von Regelsystemen mit nachgebender Rückführung, S. 201—209. — Ausgangspunkt der Mitteilung sind die „Bewegungsgleichungen“ eines Regelungssystems mit nachgebender Rückführung; das einzige darin auftre-

tende nichtlineare Element ist der Stellmotor, dessen Charakteristik als steigend vorausgesetzt wird. Verf. bringt zuerst die Gleichungen nach der Methode von Luré auf die kanonische Form und konstruiert nach Luré eine Ljapunovsche Funktion, um Bedingungen für die asymptotische Stabilität der trivialen Lösung (des ungestörten Zustands) aufzustellen. Durch ähnliche Überlegungen gelingt es Verf. bei einem gewissen Typ von Stellmotorcharakteristiken die absolute Stabilität des Gleichgewichtszustandes nachzuweisen. Das Stabilitätskriterium diskutiert er an einem Beispiel. — **Hans-Joachim Behnke:** Über ein Verfahren zur unstetigen Regelung von Schwingungen, S. 216—219. — Verf. betrachtet einfache gedämpfte Schwingungen nach der Gleichung $x'' + 2\xi x' + x = 0$; bei geringer Eigendämpfung soll das Abklingen durch Einführung einer unstetig arbeitenden Stellgröße beschleunigt werden; diese nimmt Verf. in der Form $-I(t; x_0, x'_0)$ auf der rechten Seite der Gleichung an und definiert $I = t \operatorname{sgn} x'_0$; der Regler wird abgeschaltet, sobald $x' = 0$ wird. Danach läuft er in seine Ausgangsposition zurück, und Verf. unterscheidet je nach der Geschwindigkeit des Zurücklaufens mehrere Fälle. Es wird nun die Existenz von Schaltpunkten nachgewiesen, die Stabilität der Gleichgewichtslage untersucht und der Verlauf der geregelten Bewegungen berechnet; dazu werden Nomogramme angegeben. Verf. vergleicht noch die geregelten Bewegungen mit den unregelmäßigen. — **Ja. Z. Cypkin:** Über die Synthese von Impulssystemen der automatischen Regelung und Steuerung, S. 220—233. — Verf. entwirft eine Theorie der Impulssysteme nach dem Vorbild der für lineare Systeme bekannten Theorie. Durch Anwendung der diskreten Laplace-Transformation gewinnt er die Übertragungsfunktion und die Frequenzcharakteristiken. Er definiert den Begriff des optimalen Systems und stellt Bedingungen für optimales Verhalten auf; dabei berücksichtigt er auch äußere Störungen in Form einer stationären Zufallsgröße. Schließlich befaßt er sich mit der Realisierung der optimalen Charakteristiken, die durch stetige Korrekturen oder Impulskorrekturen möglich ist. Es wird noch ein Beispiel für die Synthese von Impulssystemen behandelt. — **O. Schäfer:** Anwendung der statistischen Betrachtungsweise bei der Untersuchung von Übertragungssystemen, S. 235—239. — Verf. erörtert zuerst einige Gründe für die Entwicklung statistischer Verfahren und widmet sich dann der Charakterisierung von Zufallsprozessen. Er geht auf die Korrelationsmethode ein und erörtert ihre Anwendung auf Frequenzgangmessungen. Schließlich erwähnt er, wie man die dynamischen Eigenschaften einer Anlage mit Hilfe von Zufallsprozessen (weißes Rauschen) ermitteln kann. — **V. V. Solodovnikov und A. M. Batkov:** Zur Theorie der selbsteinstellenden Systeme, S. 308—323. — Selbsteinstellend nennen Verff. solche Systeme, die sich entsprechend den stetigen Veränderungen der Umwelteinflüsse selbsttätig auf optimale Bedingungen einstellen. Diese Systeme haben folgende Hauptelemente: Fühler zur Bestimmung der Umwelt-Bedingungen, Recheneinrichtung zur Berechnung der optimalen Betriebsbedingungen entsprechend den erhaltenen Informationen, Steuereinrichtungen zur Realisierung dieser optimalen Bedingungen. Die Umwelteinflüsse werden in Gestalt eines nachzubildenden Führungssignals und eines zu unterdrückenden Störsignals vorausgesetzt. Unter der besten Wiedergabe wird diejenige verstanden, bei der die Summe aus dem Quadrat des dynamischen Fehlers und dem gewichteten mittleren quadratischen Fehler in jedem Augenblick ein Minimum ist. Die Verff. treffen nun bestimmte Voraussetzungen über die Beschaffenheit der beiden Signale und stellen für die Impulsübergangsfunktion eine Integralgleichung auf. Für diese wird ein Lösungsverfahren dargelegt. Nach einigen Bemerkungen über die Realisierung selbsteinstellender Systeme werden Beispiele behandelt. Im Anhang werden die mathematischen Überlegungen noch weiter ausgeführt.

R. Reißig.

Erismann, Th.: Mathematische Grundlagen für den Einsatz von Integrieranlagen bei Regelproblemen. *Sci. electrica* 3, 105—111 (1957).

Es werden die Grundlagen für die Verwendung von Integrieranlagen bei der Simulation und Vorausberechnung von Regelkreisen beschrieben und an Hand eines einfachen Beispiels mit Beziehung zur Verkehrstechnik im Detail näher erklärt.

E. J. Nyström.

Pfeiffer, Alfred: Zur Stabilität von Folge-reglern mit nichtlinearer Beziehung zwischen Führungsgröße und Regelgröße. *Z. angew. Math. Mech.* 38, 472—479 (1958).

Servomechanisms are considered in which the desired output η of the actual output y is a given nonlinear function of the input x , $F(x, \eta) = 0$, where F is assumed to define unique relations $\eta = f(x)$ and $x = \varphi(\eta)$. The mixing device of the servomechanism is assumed to provide an error signal $U = F(x, \bar{y})$, where \bar{y} denotes the feedback signal. The relation between error signal and output and the relation between output and feedback signal are assumed to be linear with unit gain in the feedback path. The stability question is answered by applying Ljapunov's theorem on the system of the first approximation. A frequency response function for the approximation system is obtained. A stable nonlinear system of the considered type is uniformly stable in the whole working range if the partial derivative of the error signal with respect to the actual output and the feedback transfer function are independent of input and output values for any state of equilibrium. A method to determine the actual output as a function of the input is obtained by introducing the desired output as a fictitious input. The nonlinear system acts as a linear system with respect to this fictitious input. Therefore, it is possible to determine the actual output as a function of the fictitious input (desired output), while the fictitious input is connected with the actual input by $\eta = f(x)$. Furthermore, the author shows that any nonlinear relation between input and desired output can be realized if $x = \varphi(\eta)$ and $d\varphi/d\eta$ are different from zero in the whole working range of the system. Two practical examples are given. *S. H. Lehnigk.*

Cypkin, Ja. Z.: Über den Zusammenhang zwischen der Kennlinie eines nicht-linearen Gliedes und seiner Beschreibungsfunktion. *Regelungstechnik* 6, 285—287 (1958).

Die Beschreibungsfunktion des nichtlinearen Gliedes, gegeben durch das Verhältnis der komplexen Amplitude der ersten Harmonischen der Ausgangsgröße zur Amplitude der sich harmonisch ändernden Eingangsgröße, kann unmittelbar aus der Kennlinie des nichtlinearen Gliedes ermittelt werden. Unter der Voraussetzung, daß die Kennlinie eine ungerade Funktion sei, wird ein expliziter Ausdruck entwickelt.

Die Beschreibungsfunktion, durch ein Integral des Typs $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy$ dargestellt, wird mit Hilfe einer Quadraturformel von Steklov ausgerechnet und genähert dargestellt. Die Näherung ist auch für eine einfache graphische Lösung geeignet. Für unsymmetrische Kennlinien wird nur eine Tabelle der Lösungen angegeben, da die Ausrechnung hierfür ähnlich verläuft. Für die umgekehrte Aufgabe der Synthese der Kennlinie aus der vorgegebenen Beschreibungsfunktion wird eine Beziehung abgeleitet, indem der genannte Näherungsausdruck als Funktionalgleichung angenommen wird.

Alfred Hückler.

Kessler, C.: Ein Beitrag zur Theorie des Wechselstromreglers. I. Regelungstechnik 6, 281—285 (1958).

Es wird ermittelt, wie die regeldynamischen Gesetze des Gleichstromreglers auf den Wechselstromregler übertragen werden können. Durch Einsetzen von $(p + j\omega)$ für die Frequenzvariable p im Gleichstromfrequenzgang (mit x und y als Ein- und Ausgangsgröße) ergibt sich der (transponierte) Wechselstromfrequenzgang, weil dessen Amplitudengrößen im Frequenzbereich den Laplacetransformierten der Gleichstromgrößen $x(t)$ bzw. $y(t)$ an der Stelle $p + j\omega$ gleich sind. Beim Berechnen

des Verhaltens eines Schwingkreises bei Störungen macht eine notwendige Partialbruchzerlegung den Rechengang schwierig, weshalb bei hoher Kreisgüte ein Näherungsverfahren vorgeschlagen wird. Es werden im transponierten Frequenzgang in Zeitkonstantenform Vernachlässigungen durchgeführt in der Annahme, daß die regeltechnisch unwichtigen kurzen Einschwingvorgänge zur Erfüllung von Anfangsbedingungen in den Differentialgleichungen unterdrückt werden können. Derart wird ein Reihenschwingkreis auf das Ansprechen auf Wechselspannungen veränderlicher Amplitude untersucht: Bei Anregung des Schwingkreises mit Eigenfrequenz ergibt sich reines Zeitkonstantenverhalten, bei unendlich hoher Kreisgüte integrales Verhalten. Bei Anregung mit einer von der Eigenfrequenz verschiedenen Betriebsfrequenz geht das integrale Verhalten in einen periodischen Schwebungsvorgang über. Hohe Frequenzkonstanz ist für hohe statische Güte erforderlich.

Alfred Hückler.

● Onoe, Morio: Tables of modified quotients of Bessel functions of the first kind for real and imaginary arguments. New York: Columbia University Press 1958. 338 p. \$ 12,50.

Tabulierung der Quotienten $\mathfrak{F}_n(z) = z J_{n-1}(z)/J_n(z)$, wo $J_n(x)$ die Besselschen Funktionen erster Art bedeuten. Die Tafeln umfassen die Funktionen mit $n = 1(1)16$ für reelle Argumente $z = x$ und rein imaginäre $z = ix$, mit $x = 0(0,01)20$; die Werte werden 8- bzw. 7-dezimalig angegeben. Die Rechnungen wurden mit IBM-Maschinen ausgeführt. — In der Einleitung werden die Quotienten $\mathfrak{C}_\nu(z) = z C_{\nu-1}(z)/C_\nu(z)$, $\tilde{\mathfrak{C}}_\nu(z) = z C_{\nu+1}(z)/C_\nu(z)$, wo $C_\nu(z)$ beliebige Zylinderfunktionen sind, die den Rekursionen $2\nu C_\nu(z) = z(C_{\nu-1}(z) + C_{\nu+1}(z))$, $2C'_\nu(z) = C_{\nu-1}(z) - C_{\nu+1}(z)$ genügen, und die speziellen, den Besselschen Funktionen der drei Arten entsprechenden, abgehandelt (Rekursionen, Nullstellen und Pole, Riccatische Differentialgleichungen, Asymptotik u. a.). [Ref.: In (2.15) muß es in der Klammer heißen: $(y^2 - 2\nu y)$].

O. Volk.

Urabe, Minoru: Periodic solution of van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda = 0(0,2)1.0$. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 21, 193—207 (1958).

The author calculates periodic solutions of van der Pol's equation

$$d^2 x/dt^2 - \lambda(1 - x^2) dx/dt + x = 0,$$

for $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, correct to three decimal places. The method of computation is that of the author's previous paper (this Zbl. 84, 346). Numerical values of periodic solutions are shown in five tables. The shapes of closed orbits and of oscillations are shown in two figures. One figure shows how the amplitude, the period and the characteristic exponent vary with λ .

J. Szarski.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Abstracts of papers presented at the plenary sessions of the international conference on information processing, Paris, 15—20 June 1959. Commun. Assoc. comput. Machin. 2, Nr. 7, 9—23 (1959).

Korolev, L. N.: Coding and code compression. Translated from Russian by Morris D. Friedman. J. Assoc. comput. Machin. 5, 328—330 (1958).

Betrifft die in diesem Zbl. 79, 11 besprochene Arbeit des Verf.

● Transactions of the first Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes, held at Liblice near Prague from November 28 to 30, 1956. Prague: Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences 1957. 354 p.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Blackwell, David: The entropy of functions of finite-state Markov chains. Trans. 1st Prague Conf. Information Theory, statist. Decision functions, Random Processes, Liblice Nov. 28 to 30, 1956. 13—20 (1957).

This paper is best dealt with by quoting the author's own summary: It is shown that the entropy H of an ergodic stationary process $\{y_n, -\infty < n < \infty\}$ with states $a = 1, \dots, A$ such that $y_n = \Phi(x_n)$, where $\{x_n\}$ is a stationary ergodic finite-state Markov process with states $i = 1, \dots, I$ and transition matrix $M = ||m(i, j)||$ is given by $H = - \int \sum r_a(w) \log r_a(w) dQ(w)$, where r_a is a function, defined on the set W of all $w = (w_1, \dots, w_I)$ such that $w_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^I w_i = 1$, by $r_a(w) = \sum_{i,j \in \Phi^{-1}(a)} w_i m(i, j)$ and Q is the conditional distribution of x_0 given y_0, y_{-1}, \dots .

An integral equation is obtained for Q , and a method is given for showing, under rather strong hypotheses, that the solution of this integral equation is unique. An example in which Q is singular is given. S. Vajda.

Gnedenko, B. V.: Über einige sowjetische Arbeiten über Informationstheorie. Trans. 1st Prague Conf. Information Theory, statist. Decision functions, Random Processes, Liblice Nov. 28 to 30, 1956, 21—28 (1957) [Russisch].

This article reviews recent work in the USSR, and deals mainly with work by A. N. Kolmogorov, which appeared in Russian publications and also in Suppl. Trans. 1956 Symp. Information Theory, Mass. Inst. Techn. Cambridge (Mass.). S. Vajda.

Hansson, Hans: A display of information theory problems concerning telephone transmission. Trans. 1st Prague Conf. Information Theory, statist. Decision functions, Random Processes, Liblice Nov. 28 to 30, 1956, 29—32 (1957).

The author thinks, that it might be useful to consider the speech transmission problem (i) without and (ii) with compression, and mentions very briefly a speech synthesizer developed at the Royal Institute of Technology in Stockholm. S. Vajda.

Prouza, Ludvík: Bemerkung zur linearen Prediktion mittels eines lernenden Filters. Trans. 1st Prague Conf. Information Theory, statist. Decision functions, Random Processes, Liblice Nov. 28 to 30, 1956, 37—41 (1957).

Let $\{\xi_n\}$ be a stationary stochastic sequence and let it be required to find coefficients α_k such that

$$E \left(\xi_n - \sum_{k=1}^N \alpha_k' \xi_{n-k} \right)^2$$

is minimized. (Because of the stationarity the coefficients are independent of n). The author gives a sufficient condition for the solution to be unique, and adds theorems concerning properties of the sample estimates of correlation coefficients which arise in the above problem. S. Vajda.

Rajski, C.: The Bayes rule and the entropy. Trans. 1st Prague Conf. Information Theory, statist. Decision functions, Random Processes, Liblice Nov. 28 to 30, 1956, 35—36 (1957).

The author introduces a "principle of maximum entropy" which requires that if, in applying Bayes' rule, the a priori probabilities are unknown, the distribution corresponding to the maximum entropy should be chosen. This leads, for a finite range, to a rectangular distribution. For a semi-infinite (infinite) range one obtains the exponential (normal) distribution, provided it is also assumed that the mean (variance) be finite. S. Vajda.

Votavová, Libuše: Ein Satz von Extremen der Entropie. Trans. 1st Prague Conf. Information Theory, statist. Decision functions, Random Processes, Liblice Nov. 28 to 30, 1956, 293—295 (1957).

Let $H_{\max}(\mu_1, \dots, \mu_j, n)$ denote the maximum of $H(\mu_1, \dots, \mu_n) = - \sum_{i=1}^n \mu_i \log \mu_i$, given μ_1, \dots, μ_j and n , and define similarly H_{\min} . The author wants to compare the merits of H and of $1 - \max_{i=1, \dots, n} \mu_i$ as measures of uncertainty and obtains the following results: (i) the maximum defined above is obtained when $\mu_{j+1} = \dots = \mu_n = c/(n-j)$, and has the value $-\sum_{i=1}^j \mu_i \log \mu_i - c \log c/(n-j)$, where $c = 1 - \sum_{i=1}^j \mu_i$. (ii) The minimum is obtained when $\mu_{j+1} = \dots = \mu_{j+M} = \mu_k$ and the following μ_i are zero. It has the value $-\sum_{i=1}^j \mu_i \log \mu_i - M \mu_k \log \mu_k - \mu \log \mu$. Here $\mu_k = \min_{i=1, \dots, j} \mu_i$ and M and μ are the (integer) quotient and remainder when c is divided by μ_k . The basis of the logarithms is arbitrary, but of course the same in all expressions.

S. Vajda.

Perez, Albert: *Théorie mathématique de l'information. I, II.* Českosl. Akad. Věd. Apl. mat. 3, 1—21, 81—98, russ. und französ. Zusammenfassg. 98—105 (1958) [Tschechisch].

L'article contient un aperçu général résumant l'état actuel de la théorie mathématique de l'information dans le cas d'un alphabet abstrait. En mettant en jeu une conception probabiliste de la notion de discernabilité, l'A. y développe, pour la plupart sans démonstrations, les résultats contenus, et démontrés, dans des travaux sur la théorie de l'information publiés dans Trans. 1st Prague Conf. Information Theory, statist. Decision Functions, Random Processes, Liblice Nov. 28—30, 1956 (1957), en particulier les versions généralisées du théorème de McMillan et du lemme de Feinstein.

F. Zitek.

Ahmad, Salah: Sur la probabilité pour qu'une série entière à coefficients aléatoires puisse être prolongée. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2160—2161 (1959).

Unter Benutzung der Tatsache, daß für eine Reihe $\sum_n X_n z^n$ mit unabhängigen X_n , für die keine Zahlenfolge λ_n mit $P(X_n - \lambda_n \rightarrow 0) = 1$ existieren soll, in jedem Punkt nur entweder fast sicher regulär oder fast sicher singular sein kann, wird gezeigt, daß der Konvergenzkreis natürliche Grenze ist. Dieses Ergebnis enthält einen früher bewiesenen Satz des Verf. (dies. Zbl. 81, 137).

D. Morgenstern.

Schweizer, Berthold et Abe Sklar: Espaces métriques aléatoires. C. r. Acad. Sci. Paris 247, 2092—2094 (1958).

Die Ausführungen betreffen die von K. Menger [Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 535—537 (1942)] eingeführten Verallgemeinerungen metrischer Räume, bei denen jedem Punktpaar eine zufällige Größe als Abstand zugeordnet ist. Die Bedingungen, denen deren Verteilungsfunktionen genügen müssen, insbesondere die von Menger (dies. Zbl. 42, 372, erste Besprechung) und Wald [Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 196—197 (1943)] benutzten, werden diskutiert.

D. Morgenstern.

Onicescu, O.: Sur les processus constitués par les événements d'un champ et sur les fonctions aléatoires correspondantes. Bull. math. Soc. Sci. math. phys. R. P. R. n. Sér. 2 (50), 95—108 (1958).

Let K be the field constructed by a set E of elementary events. The author considers the space $R^+ \times K$ (R^+ is the positive half of the line) as the space of the processes of the field K , or simply the process $R^+ \times K$. The event $\mathcal{L}(s_1, A_1; \dots; s_n, A_n)$ is considered to express the fact that at the moment s_j ($j = 1, \dots, n$) we associate the event $A_j \in K$ and otherwise, the event E is associated. Given any space S , a function $f(t, \xi)$ having a determined value $x \in S$, which is unique for every $\xi \in \mathcal{L}(s_1, \alpha_1; \dots; s_n, \alpha_n; t, w)$ with $\alpha_j \in E$ ($j = 1, \dots, n$), $w \in E$, and which takes the value a_j for $t = s_j$, $j = 1, \dots, n$, on $\xi \in \mathcal{L}(s_1, \alpha_1; \dots; s_n, \alpha_n)$ is written in the form $f(s_1, a_1; \dots; s_n, a_n; t, \xi)$. Probability measures are assigned explicitly

(implicitly) to events (functions) of the above mentioned forms; and some interesting relations of the Markov type are obtained. The assignment of these probabilities is not realized in the usual form of conditional probabilities but directly in the form of absolute probabilities of certain events. We remark that: (1) The article throws some light on the foundations of a theory of abstract random variables; (2) The two-sided definition of the Markov process [Doob, Stochastic processes (this Zbl. 53, 268), ch. II § 6] can lead to a process which is not of the form $R^+ \times K$. For this reason the reviewer thinks that we should consider in place of the process $R^+ \times K$, the process $R \times K$, where R is the set of real numbers. *Saad K. Nasr.*

Pollaczek, Félix: Détermination de différentes fonctions de répartition relatives à un groupe de lignes téléphoniques sans dispositif d'attente. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 1826—1829 (1958); Errata. Ibid. 248, 612 (1959).

An eine Fernsprechzentrale von der im Titel gegebenen Beschaffenheit kommen in den Zeitpunkten $X_0 \leq X_1 \leq \dots$ Anrufe von der Dauer T_0, T_1, \dots, T_i und $Y_i = X_{i+1} - X_i$ seien unabhängige Zufallsveränderliche mit den Verteilungsfunktionen $f_1(t)$ bzw. $f_2(y)$, wobei $E(T_i) < \infty$ und $f_2(y)$ stetig ist. Verf. gibt einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit $g_{nr}(t)$ an, daß sowohl der n -te als auch der $(n+r+1)$ -te Anruf zurückgewiesen wird (wobei $X_{n+r+1} - X_n < t$), die dazwischenliegenden Anrufe jedoch bedient werden. $g_{nr}(t)$ hängt von gewissen Funktionen ab, welche Lösungen spezieller linearer Integralgleichungen sind. Gleichzeitig erhält Verf. Zusammenhänge für die Wahrscheinlichkeit, daß die n -ten und $(n+r+1)$ -ten Anrufe (wobei $X_{n+r+1} - X_n < t$) bedient, die dazwischenliegenden dagegen zurückgewiesen werden. Die Arbeit stützt sich auf eine frühere Mitteilung des Verf. (dies. Zbl. 57, 114).

P. Medgyessy.

Pollaczek, Félix: Fonctions de répartition relatives à un groupe de lignes téléphoniques sans dispositif d'attente. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 353—355 (1959).

Die Arbeit schließt sich der vorstehend referierten an. Mit den dortigen Definitionen, Bezeichnungen und Methoden untersucht Verf. die Wahrscheinlichkeit $g_{n_1 n_2}(t_1, t_2)$, daß der n -te, $(n+n_1+1)$ -te und $(n+n_1+n_2+2)$ -te Anruf — wobei $X_{n+n_1+1} - X_n < t_1$ und $X_{n+n_1+n_2+2} - X_{n+n_1+1} < t_2$ sind — zurückgewiesen, die $n_1 + n_2$ dazwischenliegenden Anrufe jedoch bedient werden. Gewisse Verallgemeinerungsmöglichkeiten werden auch erwähnt.

P. Medgyessy.

Takács, L.: On a coincidence problem concerning telephone traffic. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 45—81 (1958).

Consider a telephone system where calls are arriving at the time instants $\tau_1, \dots, \tau_n, \dots$ ($0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$) and suppose that τ_1 is an arbitrary positive random variable and $\tau_{n+1} - \tau_n$, $n = 1, 2, \dots$, are identically distributed independent random variables which are independent also of τ_1 . Moreover, let us assume that the telephone system has an infinite number of available channels and that each call establishes a connection on one of the free channels and let the duration χ_n of the holding time beginning at τ_n , $n = 1, 2, \dots$, be identically distributed independent positive random variables which are independent also of τ_n , $n = 1, 2, \dots$. Several cases are considered: 1. $\{\tau_n\}$ is a recurrent process and χ_n , $n = 1, 2, \dots$, are arbitrarily distributed; 2. $\{\tau_n\}$ is a recurrent process and χ_n , $n = 1, 2, \dots$, are exponentially distributed; 3. $\{\tau_n\}$ is a Poisson process and χ_n , $n = 1, 2, \dots$, are arbitrarily distributed; 4. $\{\tau_n\}$ is a Poisson process and χ_n , $n = 1, 2, \dots$, are exponentially distributed. The problems here investigated have already previously been considered by the author in other papers; the present one contains some extensions and more details.

R. Theodorescu.

Longuet-Higgins, M. S.: The statistical distribution of the curvature of a random Gaussian surface. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 439—453 (1958).

La surface S de l'océan est représentée par l'équation

$$\xi = \sum c_n \cos(u_n x + v_n y + \varepsilon_n).$$

ε_n est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $(0, 2\pi)$. (u_n, v_n) est dense dans le plan des nombres d'ondes, et l'on peut poser $\sum_{dS} \frac{1}{2} c_n^2 = E(u, v) dS$, où la fonction continue $E(u, v)$ est le spectre d'énergie de S . Si la pente de la surface est faible, sa courbure moyenne J et sa courbure totale Ω sont données par

$$J = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

J est distribuée suivant une loi normale. La distribution de Ω est plus compliquée. Si l'on pose

$$3H = \overline{\Omega^2}, \quad \lambda = 2\Delta / (3H)^{3/2}, \quad 6\Delta = \overline{\Omega^3}, \quad \omega = \Omega / \sqrt{3H},$$

la densité de probabilité de Ω est donnée par

$$p(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{3H}} f(\omega), \quad f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\omega\alpha}}{(\lambda\alpha^3 + \alpha^2 - 1)^{1/2}} d\alpha.$$

Sauf pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 2/3\sqrt{3}$, $f(\omega)$ n'a pas d'expression élémentaire. Ses valeurs ont été calculées numériquement pour quelques valeurs de λ . Si l'on pose $D = \overline{J^2}$, la condition $H/D^2 = 0$ caractérise les surfaces S dégénérées en un système d'ondes. La condition $H/D^2 \neq 0$, $\Delta/D^3 = 0$ caractérise les surfaces S dégénérées en deux systèmes d'ondes se coupant à angle non nul. La condition $\lambda \neq 0$ correspond à des circonstances variées.

J. Bass.

Mott, J. L., and Hans Schneider: Matrix norms applied to weakly ergodic Markov chains. Arch. der Math. 8, 331—333 (1957).

Eine inhomogene endliche Markoffsche Kette heißt schwach ergodisch, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung für n Übergänge für $n \rightarrow \infty$ unabhängig von der Ausgangsverteilung wird. Es werden neue hinreichende Bedingungen für schwache Ergodizität gegeben auf Grund eines Satzes über Matrix-Normen von Bourbaki und Ostrowski.

H.-J. Roßberg.

Blackwell, David: Another countable Markov process with only instantaneous states. Ann. math. Statistics 29, 313—316 (1958).

Nella classe dei processi markoffiani caratterizzati da un numero discreto di stati, omogenei nel tempo e con probabilità di passaggio continue $\lim_{t \rightarrow 0} P(a, a, t) = 1$

per ogni stato a , l'A. costruisce, un esempio di processo in cui tutti gli stati sono „istantanei“ tali cioè che $[dP(a, a, t)/dt]_{t=0} = -\infty$. Il processo $X(t)$ è il vettore le cui componenti sono gli elementi di una successione $\{X_n(t)\}$ di processi markoffiani, indipendenti tra loro, ciascuno suscettibile di assumere i soli stati 0 e 1 (con probabilità 1, $X_n(t) = 0$ per ogni t e per tutti gli n salvo al più un numero finito). Caratterizzando gli $X_n(t)$ tramite le

$$\Pr \{X_n(t+h) = 1 \mid X_n(t) = 0\} = \lambda_n h + o(h),$$

$$\Pr \{X_n(t+h) = 0 \mid X_n(t) = 1\} = \mu_n h + o(h)$$

e nell'ipotesi $X_n(0) = 0$ per ogni n , la $\sum_n \frac{\lambda_n}{\mu_n + \lambda_n} < \infty$ assicura che gli stati di $X(t)$ sieno in numero discreto e la $\sum_n \lambda_n = \infty$ che essisieno tutti istantanei.

L. Daboni.

Mott, J. L.: The central limit theorem for a convergent non-homogeneous finite Markov chain. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 65, 109—120 (1959).

Für einen endlichen diskreten Markoffschen Prozeß mit Übergangsmatrizen P_ν , gelte $\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu = P$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = U$, wobei alle Elemente von U positiv sind.

Dann wird durch die entsprechende Konvergenz der Momente gezeigt, daß die Besetzungszahl X_n eines Zustandes während der ersten n Zeitpunkte bei $n \rightarrow \infty$ asym-

ptotisch normal-verteilt ist. Die mühevollen Rechnungen werden zunächst am Beispiel der Markoff-Kette mit drei Zuständen dargestellt und dann auf beliebige Anzahl verallgemeinert.
D. Morgenstern.

Koroljuk (Korolyuk), V. S.: Asymptotische Analyse der Absorptionswahrscheinlichkeit im eindimensionalen Schema zufälliger Irrfahrten mit Gitterverteilung der Übergangswahrscheinlichkeiten. *Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR* 1959, 702—706, russ. und engl. Zusammenfassg. 706—707 (1959) [Ukrainisch].

Franklin, J. N.: On the equidistribution of pseudo-random numbers. *Quart. appl. Math.* 16, 183—188 (1958).

Durch Anwendung des individuellen Ergodensatzes in der von Riesz gegebenen Fassung, die nicht die Umkehrbarkeit der maßtreuen Transformation voraussetzt, wird gefolgert, daß die Folgen $X_{v+1} = a X_v + b - [a X_v + b]$ für fast alle b gleichverteilt sind. Die dafür notwendige Konstanz der auftretenden Limes-Funktion wird durch Betrachtung ihrer Fourier-Koeffizienten nachgewiesen.

D. Morgenstern.

Lévy, Paul: Symétrie et dissymétrie des produits de variables aléatoires. *C. r. Acad. Sci., Paris* 248, 1920—1922 (1959).

Verf. berichtet über seine anderen Orten erscheinenden Untersuchungen [Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 76, 59—82 (1959)] über die Multiplikation unabhängiger zufälliger Größen $X_0 = X_1 X_2$. Insbesondere wird der Zusammenhang der die Unsymmetrie der jeweiligen Verteilungen beschreibenden Funktionen $G_v(x) = F_v(x) + F_v(-x) - F_v(+0) - F_v(-0)$ (F_v die Verteilung von X_v) durch

$$G_0(x-0) = \int_0^\infty G_2\left(\frac{x}{u}-0\right) dG_1(u)$$

angegeben. Weitere Angaben betreffen die Bestimmung der Verteilung der Faktoren durch die Verteilung des Produktes.

D. Morgenstern.

Dvoretzky, A.: On a problem of Nelder and Hammersley. *Bull. Res. Council Israel, Sect. A* 6, 115—118 (1957).

L'A. rileva due teoremi, dei quali riportiamo il seguente: Sia $\varphi(x, y)$ una funzione reale, non negativa, simmetrica e avente derivate parziali del primo ordine per $x \geq 0$, $y \geq 0$, e sia $\limsup_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \varphi(x, y) = 0$. Sia $g(x)$ una funzione tale che, per ogni y , il prodotto $g(x) \varphi'_x(x, y)$ sia funzione convessa di x . Allora le funzioni distribuzione, per le quali l'integrale $I(F) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x, y) dF(x) dF(y)$ raggiunge il proprio massimo sono funzioni-tracce aventi al più due salti, e, se questi sono proprio due, uno di essi si ha per $x = 0$.

S. Cinquini.

Fox, Charles: Some applications of Mellin transforms to the theory of bivariate statistical distributions. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 53, 620—628 (1957).

Verf. überträgt ein Problem, das im eindimensionalen Fall von B. Epstein behandelt wurde (dies. Zbl. 32, 292), auf zwei Dimensionen. Dazu gibt er zunächst neue hinreichende Bedingungen für die Umkehrbarkeit der zweidimensionalen Mellin-transformation; der Beweis erfolgt auf Grund einer Modifizierung von Mellins eindimensionalem Beweis, so daß er auf zwei Dimensionen übertragbar wird. Die zweidimensionale Mellin-Transformation ist eng verknüpft mit der mathematischen Erwartung $E(|\xi|^{r-1} \cdot |\eta|^{s-1})$. Daher sind Anwendungen möglich u. a. auf folgende Probleme: Gegeben obige mathematische Erwartung; gesucht die Verteilungsdichte $f(x, y)$ des Zufallsvektors (ξ, η) . Einige Beispiele illustrieren die Theorie.

H.-J. Roßberg.

Bérndt, Gerald D.: The regions of unimodality and positivity in the abbreviated Edgeworth and Gram-Charlier series. *J. Amer. statist. Assoc.* 52, 253—256 (1957).

If, as often done, one uses the first three terms only in the so-called Gram-Charlier series of a frequency density (of a standardized variable, mean value 0, variance 1) viz

$$f(x) = \varphi(x) + a_3 \varphi^{(3)}(x) + a_4 \varphi^{(4)}(x)$$

where the a_3, a_4 are constants, $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ and $\varphi^{(v)}(x)$ the v^{th} derivative of $\varphi(x)$, then, obviously the right side may lead to negative values of the ordinates. Barton and Dennis (this Zbl. 47, 122) have given conditions for a_3 and a_4 (essentially skewness and kurtosis) which assure non-negativeness. The present paper considers the use of only two terms, $g(x) = \varphi(x) - (\alpha_3/3!) \varphi^{(3)}(x)$, with α_3 the skewness. This formula is discussed in terms of α_3 regarding the sign of the ordinates and the location of the mode(s), so that for a given α_3 the range of x -values for which the formula is not ab origine meaningless can be immediately seen.

H. Geiringer.

Blum, J. R. and M. Rosenblatt: On the structure of infinitely divisible distributions. Pacific J. Math. 9, 1—7 (1959).

Gesucht ist ein Kriterium, das aus der charakteristischen Funktion $\varphi(s)$ zu entscheiden gestattet, ob die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$ diskret, stetig oder gemischt ist. Für die Klasse der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze wird — unter Verwendung der Chintschinschen Darstellung der charakteristischen Funktionen solcher Verteilungsgesetze:

$$\log \varphi(s) = i\gamma s + \int \left\{ e^{ius} - 1 - \frac{ius}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u)$$

— folgender Satz bewiesen: $F(x)$ ist genau dann diskret bzw. gemischt, wenn $\int \frac{1}{u^2} dG(u) < \infty$ und $G(u)$ eine bzw. keine Treppenfunktion ist. $F(x)$ ist genau dann stetig, wenn $\int \frac{1}{u^2} dG(u) = \infty$ ist. Als Anwendung wird noch gezeigt: Ist $X(t)$, $t \geq 0$, ein diskreter stochastischer Prozeß mit $X(0) = 0$ und unabhängigen, unbeschränkt teilbaren Zuwächsen, so gibt es eine Folge von unabhängigen verallgemeinerten Poissonschen Prozessen $X_i(t)$, so daß $X(t)$ dieselbe stochastische Struktur wie $\sum_i X_i(t)$ besitzt.

G. Kellerhals.

Fürst, Dario: Un'applicazione della teoria dei giuochi. Archimede 10, 211—223 (1958).

A neat investigation of the value and of the optimal strategies of a game with pay-off table $\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & b \\ c & c & 0 \end{pmatrix}$ in their dependence on $a:b:c$.

S. Vajda.

• **Tucker, A. W. and R. D. Luce** (edited by): Contributions to the theory of games. Vol. IV. (Annals of Mathematics Studies. Nr. 40.) Princeton, N. J.: Princeton University Press 1959. 453 p. \$ 6,00.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Gurk, Herbert M.: Five-person, constant-sum, extreme games. Ann. Math. Studies 40, 179—188 (1959).

An n -person game is extreme if there do not exist two different games G_1 and G_2 such that $v(S) = a v_1(S) + (1-a) v_2(S)$ for all $S \subset \{1, \dots, n\}$, $0 \leq a \leq 1$. The author gives necessary and sufficient conditions for the existence of the games mentioned in the title and exhibits all such games. They have precisely three values.

S. Vajda.

Griesmer, James H.: Extreme games with three values. Ann. Math. Studies 40, 189—212 (1959).

It is shown that a game is extreme if and only if a certain set of homogeneous linear equations associated with it has only the trivial solution (all variables = 0). The author characterizes extreme games with three values, and associates with them

linear graphs where nodes represent intermediate coalitions and the arcs correspond to disjoint coalitions. (Compare the above review of Gurk's paper). *S. Vajda.*

Kalisch, G. K.: Generalized quota solutions of n -person games. *Ann. Math. Studies* 40, 163—177 (1959).

This paper generalizes results of Shapley (this *Zbl.* 50, 144—145). Conditions are given for a characteristic function to satisfy

$$v(\{i_1, \dots, i_m\}) \leq \sum_{t=1}^m \omega_t, \quad v(\{1, \dots, n\}) \leq \sum_{t=1}^n \omega_t$$

and to have analogues of Shapley's quota solutions.

S. Vajda.

Kalisch, G. K. and E. D. Nering: Countably infinitely many person games. *Ann. Math. Studies* 40, 43—45 (1959).

Let $v(S)$ be a set defined for all $S \subset I$, where I is a countable set. It is proved in this paper that if $v(S) \leq v(S - (i))$ for all $i \in S$ and all $S \subset I$, then the infinitely-many-person game with $v(S)$ as its characteristic function has no solution. The two concepts of characteristic function and solution are defined in a way analogous to those for finite normalized zero-sum games. Examples of games satisfying the assumptions of the theorem are given; there exists no finite game of this type.

S. Vajda.

Shapley, L. S.: A solution containing an arbitrary closed component. *Ann. Math. Studies* 40, 87—93 (1959).

The author exhibits a class of n -person games for which an arbitrary closed subset of a certain $(n - 3)$ -dimensional region of the fundamental simplex together with another closed subset, dependent on but disjoint from it, forms a solution. The arbitrariness provides a source for examples about topological properties of solutions in general.

S. Vajda.

Gelbaum, B. R.: Symmetric zero-sum n -person games. *Ann. Math. Studies* 40, 95—109 (1959).

The author constructs solutions to games mentioned in the title, for large classes of integer values of n . They are derived from the concept of a "minimax coalition" of p players, where p is the smallest number q ($1 \leq q \leq n$) for which v_q/q attains its highest value, v_q being the characteristic function value of a coalition of q members (minimum size, maximum pro rata gain). The development depends on the existence of games of a certain type, and this existence is proved. — Examples of the results arrived at are: if $n = 2m + 1$ or $= 3m + 1$, then there exists a symmetric n -person zero-sum game with a symmetric finite solution, and if $n = 3m + 2$, then there is such a game with a symmetric solution.

S. Vajda.

Aumann, Robert J.: Acceptable points in general cooperative n -person games. *Ann. Math. Studies* 40, 287—324 (1959).

This paper deals with cooperative games without side payments. An n -tuple c of strategies is an "acceptable point" if for every coalition B , and every defection from c , the complementary coalition has at least one strategy which inflicts a loss on at least one member of B . Not all games have such points, but all two-person games have. — A "strong equilibrium point" is an n -tuple of strategies c in an infinite sequence of games for which no coalition profits by defecting from c , if the remaining players do not. The author proves that the sets of pay-off n -tuples corresponding to acceptable points, and those corresponding to strong equilibrium points, are identical.

S. Vajda.

Luce, R. Duncan: A note on the article "Some experimental n -person games". *Ann. Math. Studies* 40, 279—285 (1959).

The author reexamines the data given by Kalisch et al. (this *Zbl.* 58, 139) in terms of k -stability theory (see this *Zbl.* 55, 370; 66, 116).

S. Vajda.

Kemeny, John G.: A new approach to n -person games. *Ann. Math. Studies* 40, 397—406 (1959).

By introducing the information about how each coalition divides its gain, the author arrives at a measure for the bargaining effectiveness of each player, and then determines the coalitions which will occur. Usually, but not always, the answer is unique, and so is then the division of profits. Detailed examples are given.

S. Vajda.

Mills, W. H.: The four person game — finite solutions on the face of the cube. *Ann. Math. Studies* 40, 125—143 (1959).

The author studies the essential zero-sum four-person games by using their identification with the points on a cube, as introduced by von Neumann and Morgenstern. The known results are extended by considering points on the faces rather than merely those on the edges. The games corresponding to the vertices and to the diagonals connecting certain pairs have one finite solution, and the others have none. This statement includes those known earlier (von Neumann and Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, this Zbl. 53, 93; W. H. Mills, The four-person game-edge of a cube, this Zbl. 55, 371).

S. Vajda.

Nering, Evar D.: Symmetric solutions for general-sum symmetric 4-person games. *Ann. Math. Studies* 40, 111—123 (1959).

This paper contains a list of symmetric solutions to all general-sum four-person games, all being modifications of a basic type. The factors which determine the validity for the various solutions are shown geometrically. Only the proof for the most complicated type is explicitly given, with indications for the proofs of the other types.

S. Vajda.

Isbell, J. R.: Absolute games. *Ann. Math. Studies* 40, 357—396 (1959).
The author develops a theory of cooperative games based on an analogue of the characteristic function, called "projective form". Their values form curved surfaces in utility space, dependent on an arbitration scheme suitable for bounded utilities. An analogue of the von Neumann-Morgenstern solution theory is developed.

S. Vajda.

Gurk, H. M. and J. R. Isbell: Simple solutions. *Ann. Math. Studies* 40, 247—265 (1959).

A simple solution is one in which each player has only two possible pay-offs, one of them zero. The authors give necessary and sufficient conditions for a vector of pay-offs to be in the solution of a given game and the solution is described. All simple solutions of symmetric and of decomposable games are determined, and an algorithm for finding all simple solutions of a simple game is given. The five-person simple games and the six-person strong simple games have unique simple solutions. A list of strong simple six-person games is given and it is proved that every simple game with n non-dummy players has at least n minimal winning sets.

S. Vajda.

Gillies, Donald B.: Solutions to general non-zero-sum games. *Ann. Math. Studies* 40, 47—85 (1959).

This paper is concerned with the as yet unanswered question whether or not all finite games have a solution. It is proved, inter alia, that a positive fraction of all games have a solution, and a positive fraction of all non-zero-sum games have a unique solution. To a given n -person game a further player can be added, who is dispensable for any coalition to obtain the value of the original game, and thereby $(n+1)$ -person "pyramid" game is constructed. The relationship between solutions of the original and of the associated pyramid game is investigated.

S. Vajda.

Vickrey, William: Self-policing properties of certain imputation sets. *Ann. Math. Studies* 40, 213—246 (1959).

The author is mainly concerned with the question whether games have solutions

such that deviations from imputation sets are in some way, explained in the paper inhibited. A constant sum homogeneous majority game has a unique self-policing solution; some non-majority games have several; constant sum non-homogeneous majority games have none. Other new concepts are also introduced. *S. Vajda.*

Neumann, John von: On the theory of games of strategy. *Ann. Math. Studies* 40 13—42 (1959).

Translation of the paper in *Math. Ann.* 100, 295—320 (1928), which was the first publication on Game Theory. *S. Vajda.*

Thompson, Dorothea M., and Gerald L. Thomson: A bibliography of game theory. *Ann. Math. Studies* 40, 407—453 (1959).

This is a preliminary version of a complete bibliography that will appear later. It has seemed desirable to permit overlapping with bibliographies in earlier studies on Contributions to the Theory of Games. The present fourth volume of Contributions is the last. *S. Vajda.*

Wigner, Eugene P.: On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Ann. of. Math., II. Ser.* 67, 325—327 (1958).

Es wird ohne Ausführung der Beweise bemerkt, daß die früheren Ergebnisse über Eigenwerte (dies. Zbl. 67, 84) auch für symmetrische Matrizen gelten, deren Elemente $X_{ik} \equiv X_{ik}$ unabhängige Verteilungsdichten mit

$$f_{ik}(\lambda) = f_{ik}(-\lambda); \int f_{ik}(\lambda) \lambda^l d\lambda < C_l, \int f_{ik}(\lambda) \lambda^2 d\lambda = m^2$$

besitzen: Das heißt: für den Erwartungswert der Anzahl der Eigenwerte zwischen $\alpha\sqrt{n}$ und $\beta\sqrt{n}$ von der n -reihigen Matrix mit Elementen X_{ik} gilt asymptotisch

$$\sim n \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(4m^2 - \xi^2)^{1/2}}{2\pi m^2} d\xi. \quad D. Morgenstern.$$

Statistik:

Watanabe, Yoshikatsu, Tadayuki Yamamoto, Takeshige Satô, Takaaki Fujimoto, Mamoru Inoue, Takesi Suzuki and Tomoko Uno: Some contributions to order statistics. *J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math.* 9, 31—86 (1958).

This paper continues previous work by Y. Watanabe and a different set of co-workers, reviewed in this Zbl. 84, 150. The present review will use the notations used in loc. cit. The main use of the present paper seems to be again on the expository level. It gives rather extensive lists of fully specified formulae which may serve as an easy reference. Some of these formulae are proved in a neat way; the paper as a whole is rather detailed and at the same time somewhat long-winded. Sections 14, 15 and 18 are devoted to the calculation of moments of order statistics: $\mathcal{L}(t_{in}^p t_{kn}^q)$, $\mathcal{L}(t_{in}^p t_{jn}^q t_{kn}^r)$, $\mathcal{L}(t_{in} t_{jn} t_{kn} t_{ln})$ for sample sizes $n \leq$ Section 18 contains numerical results. These are very precise: the checks mostly consider values between 0.7 and 12, yet the largest difference reported in the checks was 0.000 000 6. Section 13 contains some formulae to be applied in the later sections. Section 16 contains a number of formulae, some of them very interesting, which are used as a check in the numerical calculations. A sample from them, arbitrarily chosen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathcal{L}(t_{in}^p t_{kn}) &= p \cdot \mathcal{L}(t_{in}^{p-1}) & (\text{for } i = 1, 2, \dots, n), \\ 1 \leq i < k \leq n \quad \mathcal{L}(t_{in}^2 t_{kn}^2) &= \frac{1}{2} n(n-1), & \sum_{j,k} \mathcal{L}(t_{in} t_{jn}^2 t_{kn}) = n+2, \\ \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(t_{in} t_{jn} t_{kn} t_{ln}) &= \mathcal{L}(t_{in} t_{jn}) + \mathcal{L}(t_{in} t_{kn}) + \mathcal{L}(t_{jn} t_{kn}). \end{aligned}$$

Section 17 is concerned with a generalization of the integrals of the type discussed in sections 7 and 8 of the previous paper. Section 19 gives some central moments

and section 20 gives the asymptotic distribution of the same type of transforms of order statistics which was considered by A. Rényi (this Zbl. 52, 142) and Hajos and Rényi (this Zbl. 55, 374) although the method of proof is different: one might say, more elementary.

H. R. van der Vaart.

Seal, K. C.: Approximate distribution of certain linear function of order statistics. *Sankhyā* 17, 345—348 (1957).

Let $Y_{(1)} < \dots < Y_{(n)}$ be the n order statistics in a sample of size n from a normal distribution $N(0, 1)$. Let $\{c_{in}\} = (c_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{nn})$ be a set (defined for each n) of n constants satisfying $c_{in} \geq 0$, $\sum_{i=1}^n c_{in} = 1$. The paper considers the distribution of

$$X_n = \sum_{i=1}^n c_{in} Y_{(i)} - Y_0 - \mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^n c_{in} Y_{(i)} \right),$$

where Y_0 is an independent $N(0, 1)$ random variable. In the first place, it is proved that $\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_{in} Y_{(i)} \right) = O \left(\frac{1}{\log n} \right)$ provided $\sum_{i=1}^n |a_{in}|$ is bounded for $n \rightarrow \infty$. Clearly the above-defined set $\{c_{in}\}$ satisfies the condition imposed on $\{a_{in}\}$. Hence the distribution of X_n tends to the distribution of $-Y_0$, i. e. to $N(0, 1)$, as n tends to ∞ . This part of the paper might well be extended to certain non-normal distributions. The remaining part of the paper intends to make plausible that X_n is nearly normally distributed for all n . First, the author compares the coefficients of skewness and excess of $Y_{(n)}$ and $Y_{(n)} - Y_0$, respectively, and he shows that a very striking reduction to normal values results from the subtraction of Y_0 . This reduction is listed numerically for $n = 2, 5, 10, 20, 60, 100, 200, 500, 1000$, and it appears that in terms of these coefficients the distribution of $Y_{(n)} - Y_0$ departs furthest from normality between $n = 5$ and $n = 20$. No higher moments are investigated. Secondly, the author conjectures that among all linear functions X_n of $Y_0, Y_{(i)}$, with coefficients $\{c_{in}\}$, the greatest departure from normality will occur for $c_{in} = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$), $c_{nn} = 1$. This conjecture is checked by a sampling experiment: 1000 samples of size 4 (i. e., $n = 4$) from a table of random normal deviates, from which statistics X_n are computed for various sets $\{c_{in}\}$. The coefficients of skewness and excess, computed from the corresponding empirical distributions, turn out to be close to normal values; however, the sampling fluctuations seem to be too large to prove or disprove the conjecture concerning $c_{in} = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$), $c_{nn} = 1$. Finally a χ^2 test for goodness of fit applied to normal distributions fitted to these empirical distributions yields tail probabilities which are evidently non-significant. *H. R. van der Vaart.*

Pfanzagl, J.: Ein kombiniertes Test- und Klassifikations-Problem. *Metrika* 9, 11—45 (1959).

Im Rahmen der Prüfung von Hypothesen wird ein aus zwei Schritten bestehendes Entscheidungsverfahren entwickelt. Zuerst wird eine Null-Hypothese H_0 getestet, derart, daß sie im Falle ihres Zutreffens mit einer vorgeschriebenen Wahrscheinlichkeit angenommen wird. Wird jedoch H_0 verworfen, soll entschieden werden, welche der Alternativ-Hypothesen H_1, H_2, \dots, H_k zutreffend ist. Voraussetzung für diese, als „Klassifikation“ bezeichnete Entscheidung ist, daß bei Verwerfung von H_0 jeder der k Alternativ-Hypothesen die gleiche Wahrscheinlichkeit zukommt. Das Entscheidungsverfahren ist optimal, d. h. bei den gemachten Voraussetzungen ist die Wahrscheinlichkeit für richtige Klassifikation maximal. Abgesehen von der Klassifikation liefert das Verfahren einen Test für die Null-Hypothese H_0 gegen die zusammengesetzte Alternativ-Hypothese H_1, H_2, \dots, H_k . Wenn es einen gegen alle H_i trennscharfen Test gibt, so ist auch der aus dem optimalen Test- und Klassifikationsverfahren resultierende Test gleichmäßig trennscharf. Die allgemeine Theorie wird am Verf. an einzelnen Problemen, wie dem Ausreißer-, dem Sprung- und einem speziellen k -Stichproben-Problem erläutert. Es wird auch in Verallgemeinerung des Testes von Wilcoxon ein verteilungsunabhängiger Test entwickelt. *H. Jecklin.*

Ishii, Goro: Kolmogorov-Smirnov test in life test. *Ann. Inst. statist. Math.* 10, 37—46 (1958).

Verf. behandelt Tests für die Güte der Anpassung (goodness of fit) und das Zwei-Stichproben-Problem bei Lebensdauer-Tests. Kolmogorov und Smirnov gehen vom Abstand der theoretischen Verteilung $F(x)$ und der empirischen Verteilung $F_n(x)$ aus. Verf. wendet diese Betrachtungen auf Lebensdaueruntersuchungen an. Dabei wird die Betrachtung stets mit n Elementen begonnen und zu einem bestimmten Zeitpunkt T beendet, bzw. dann, wenn der r -te Todesfall eingetreten ist. Zunächst behandelt Verf. den einseitigen Test. Dabei werden die Elemente der beiden Stichproben der Größe nach geordnet. Verf. stellt für diesen Fall vier Theoreme auf, wobei die letzten beiden besonders dann geeignet sind, wenn die Untersuchung zu einem vorgegebenen Zeitpunkt abgebrochen werden soll. Anschließend wird der zweiseitige Test behandelt. In dem vom Verf. hierzu aufgestellten Theorem ist als Spezialfall ein Ergebnis von Gnedenko und Koroljuk (vgl. dies. Zbl. 44, 136; 46, 351) enthalten.

G. Reißig.

Cox, C. P.: Experiments with two treatments per experimental unit in the presence of an individual covariate. *Biometrics* 14, 499—512 (1958).

A complete experiment consists of a number of individual experimental units taken at random from a population and circumstances to which any findings are to be inferred. The time for each individual is divided into three periods containing given numbers of equal successive intervals, among which the intervening period may be absent. Two treatments, of which the main effects are to be compared, are administered, one during each of the first and last periods of an individual, one independent observation being obtained in each interval. For the complete experiment a mixed model is used with fixed treatment effects, random individual and interaction effects. The method of analysis of variance is applied. A numerical example is given.

Y. Komatsu.

Mitton, R. G. and F. R. Morgan: The design of factorial experiments: a survey of some schemes requiring not more than 256 treatment combinations. *Biometrika* 46, 251—259 (1959).

Bradley, James V.: Complete counterbalancing of immediate sequential effects in a Latin Square design. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 525—528; Corrigenda. *Ibid.* 1030—1031. (1958).

Duncan, Acheson J.: Design and operation of a double-limit variables sampling plan. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 543—550 (1958).

Jones, Howard L.: Inadmissible samples and confidence limits. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 482—490 (1958).

Ancombe, F. J.: Rectifying inspection of a continuous output. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 702—719 (1958).

Bergström, Harald: A remark on Spearman's rank correlation coefficient. *Biometrika* 45, 273—274 (1958).

Baker, G. A.: Empiric investigation of a test of homogeneity for populations composed of normal distributions. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 551—557 (1958).

Johnson, N. L.: Theoretical considerations regarding H. R. B. Hack's system of randomization for cross-classifications. *Biometrika* 45, 265—266 (1958).

Somerville, Paul N.: Tables for obtaining non-parametric tolerance limits. *Ann. math. Statistics* 29, 599—601 (1958).

Sibuya, Masaaki: Modal intervals for chi-square distributions. *Ann. Inst. statist. Math.* 9, 225—236 (1958).

Sei $f(x)$ eine stetige unimodale Wahrscheinlichkeitsdichte und seien U und L so gewählt, daß $\int_L^U f(x) dx = 1 - \alpha$ und $f(U) = f(L)$ gilt. Dann hat das Intervall

$[L, U]$ von allen Intervallen $[L', U']$ mit $\int_{L'}^{U'} f(x) dx = 1 - \alpha$ die kleinste Länge.

$[L, U]$ heißt „Modal-Intervall“. In dieser Arbeit werden Tafeln für Modal-Intervalle der χ^2 -Verteilung veröffentlicht und zwar für $1 - \alpha = 0,80; 0,90; 0,95$ und $0,99$. Die Zahl der Freiheitsgrade ist 3 (1) 30 und 30 (10) 100. Verf. zeigt, daß bei einigen Test-Verfahren, welche mit der χ^2 -Verteilung arbeiten, der Gebrauch von

Modal-Intervallen dem Gebrauch der üblichen Intervalle $[L', U']$ mit $\int_{-\infty}^{L'} f(x) dx = \frac{1}{2}\alpha$ und $\int_{U'}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}\alpha$ vorzuziehen ist. Die Methode, nach welcher die

Tafeln berechnet wurden, wird ausführlich besprochen.

W. Vogel.

Bock, R. Darrell: Remarks on the test of significance for the method of paired comparisons. Psychometrika 23, 323—334 (1958).

Verf. verweist zunächst auf Arbeiten von Thurstone [J. abnorm. soc. Psychol. 21, 384—400 (1927)], Mosteller [Psychometrika 16, 207—218 (1951)] und Bliss [Biometrics 12, 381—403 (1956)] und schlägt dann ein Modell mit drei Komponenten für vergleichende Beurteilungen vor. Er bildet aus n Objekten alle möglichen Paare und läßt N Personen aus jedem Paar das Objekt auswählen, das sie bevorzugen. Jedes Individuum hat somit $\frac{1}{2}n(n-1)$ Vergleiche durchzuführen. Die Beziehungen zwischen Beobachtungen und Modell werden ausführlich behandelt und auch graphisch dargestellt. Anschließend wird die Varianzanalyse unter Verwendung der arcsin-Transformation durchgeführt. Es wird gezeigt, daß man in einigen Fällen Grenzen für die Korrelationswirkungen angeben kann und somit einen wirksamen Test erhält. 2 Abbildungen, 10 Literaturstellen.

G. Reißig.

Rajski, C.: The selectivity of the parametric tests. Trans. 1st Prague Conf. Information Theory, statist. Decision functions, Random Processes, Liblice Nov. 28 to 30, 1956, 33—34 (1957).

Let Q be an unknown population parameter, Ω a critical region and $Q = Q_0$, $Q = Q_1$ respectively the null- and the alternative hypotheses. Denote the power function of a test by $M(\Omega, n, Q)$. The author expresses a preference for "treating the unknown parameter as a random variable" and defines the "uncertainty" by

$$L(\Omega, n) = - \int \frac{\partial M}{\partial Q} \log \frac{\partial M}{\partial Q} dQ$$

and the "selectivity" by $L_{\max} - L(\Omega, n)$; he admits that this concept has only very limited usefulness.

S. Vajda.

Rao, B. Raja: On the relative efficiencies of BAN estimates based on doubly truncated and censored samples. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 24, 366—376 (1958).

Sei $I = E(\partial \log f(x, \theta) / \partial \theta)^2$ der Fishersche Informationsausdruck und sei I_T der entsprechende Ausdruck für die abgeschnittene Verteilung. Verf. untersucht $I - I_T$ für folgende Fälle: Die Anzahl der durch das Abschneiden fehlenden Beobachtungen ist (1) nicht bekannt, (2) insgesamt bekannt, (3) für jeden der beiden abgeschnittenen Teile ($x < x'$) und ($x > x''$) gesondert bekannt. Für die Fälle (2) und (3) ist $I - I_T \geq 0$. Für den Fall (1) läßt sich das Vorzeichen von $I - I_T$ nicht allgemein bestimmen. Der Fall (3) wird auch für mehrere Parameter θ_i ($i = 1, 2, \dots, s$) behandelt. Es wird gezeigt: das Ellipsoid

$$n \sum \delta_{i,k} t_i t_k = 2 + s \text{ mit } \delta_{i,k} = E((\partial \log f / \partial \theta_i)(\partial \log f / \partial \theta_k))$$

liegt für die nicht abgeschnittene Verteilung vollständig in dem entsprechenden Ellipsoid für die abgeschnittene Verteilung.

W. Vogel.

Plackett, R. L.: Linear estimation from censored data. Ann. math. Statistics 29, 131—142 (1958).

Verf. behandelt ein spezielles Problem aus der Parameterschätzung geordneter Stichproben: Gegeben sei eine Stichprobe von n Erhebungen aus einer Grundgesamtheit, deren Dichtefunktion der Klasse $f[(y - \mu)/\sigma]/\sigma$ mit unbekannten Parameterwerten μ, σ angehöre. Die geordneten Stichprobenwerte bilden dann die aufsteigende Folge $y_1 < y_2 < y_3 \dots < y_n$, und es sollen die Parameter μ, σ in Abhängigkeit der k Beobachtungen y_u, y_{u+1}, \dots, y_v , mit $v = u + k - 1$, geschätzt werden. In einem ersten Abschnitt berechnet Verf. Formeln für die Kumulanten geordneter Variablen aus einer logistischen Grundgesamtheit und beweist asymptotische Sätze über die Erwartungswerte. Darauf wendet er sich dem eigentlichen Schätzungsproblem zu und erinnert zunächst an die unter Anlehnung an das Prinzip der kleinsten Quadrate gefundenen Resultate von Godwin, Lloyd und Gupta, welche die Schätzwerte als Funktion des Erwartungsvektors und der Dispersionsmatrix ausdrücken. Verf. gibt eine etwas einfachere Methode zur Bestimmung der Schätzwerte, indem er die Dispersionsmatrix durch eine dem Kalkül besser angepaßte symmetrische Matrix ersetzt. Er berechnet dann ebenfalls die Maximum-Likelihood-Werte und zeigt, daß sie asymptotisch linear sind und daß somit für größere Stichproben die linearisierte Maximum-Likelihood-Funktion genügend exakte Resultate liefert. Als zusätzliches Ergebnis seiner Überlegungen folgt, daß die besten linearen erwartungstreuen Schätzfunktionen asymptotisch linear und trennscharf (effizient) sind. Numerische Tabellen illustrieren Anwendungsmöglichkeiten für eine Stichprobe vom Umfang 10 aus einer normalen Grundgesamtheit. *H. Jecklin.*

Striebel, Charlotte T.: On the efficiency of estimates of trend in the Ornstein Uhlenbeck process. Ann. math. Statistics 29, 192—200 (1958).

Let x_t be a normal process and $y_t = x_t + f_t$ where $f(t) = K_1 \Phi_1(t) + K_2 \Phi_2(t) + \dots + K_s \Phi_s(t)$ and $\Phi_1(t), \dots, \Phi_s(t)$ are given functions. It is standard procedure to estimate the K_i by the maximum likelihood method. However, if the covariance function $C(u, v)$ of x_t contains unknown parameters this often leads to equations which are too complicated to solve. One may in this case try to use another estimate $\hat{f}(t)$ and compare it with the maximum likelihood estimate $\hat{f}(t)$ by computing the efficiency

$$e(T) = E \left(\int_0^T (\hat{f}(t) - f_t)^2 \frac{dt}{E} \right) \left(\int_0^T (\bar{f}(t) - f_t)^2 dt \right).$$

The limit $\lim_{T \rightarrow \infty} e(T) = e$ is called the asymptotic efficiency of $f(T)$. The least square estimate is easily computed and independent of $C(u, v)$. The author considers two classes of processes y_t and derives in both cases necessary and sufficient conditions under which the asymptotic efficiency \bar{e} of the least square estimate is unity. Applying her results to the Ornstein Uhlenbeck process the author first improves on a result by P. B. Moranda and the reviewer [Sankhyā 13, 351—358 (1954)] and shows further that $\bar{e} < 1$ if the $\Phi_i(t)$ are exponential functions. In this case she proposes another estimate and shows that it is superior to the least square estimate.

H. B. Mann.

Stange, K.: Die zeichnerische Behandlung von Plänen für messende Prüfung. Metrika 1, 111—129 (1958).

Verf. zeigt, daß bei Abnahmeprüfung von normalverteilten Zufallsveränderlichen bei dem üblichen Vergleich der Größe $z = \bar{x} + ks$ mit der Toleranzgrenze T die Kennlinie (OC-Kurve) bei Annäherung von z durch eine Normalverteilung in einem sogenannten „doppelten Wahrscheinlichkeitsnetz“ zu einer Geraden wird. Dadurch lassen sich bei Angabe zweier Punkte der Kennlinie die Kenngrößen n und k des Plans auf graphischem Wege leicht bestimmen. Verf. gibt im weiteren auf Grund von Annäherungen Methoden zur Beurteilung der Fertigung einer längeren Periode zwecks eventueller Verschärfung des Prüfverfahrens.

E. Vas.

Maurice, Rita J.: Selection of the population with the largest mean when comparisons can be made only in pairs. *Biometrika* 45, 581—586 (1958).

Guttman, Irwin: A note on a series solution of a problem in estimation. *Biometrika* 45, 565—567 (1958).

Irwin, J. O.: On the estimation of the mean of a Poisson distribution from a sample with the zero class missing. *Biometrics* 15, 324—326 (1959).

Griffin, Harold D.: Graphic computation of tau as a coefficient of disarray. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 441—447 (1958).

Clemans, Kermit G.: Confidence limits in the case of the geometric distribution. *Biometrika* 46, 260—264 (1959).

Huitson, A.: Further critical values for the sum of two variances. *Biometrika* 45, 279—282 (1958).

Hack, H. R. B.: An empirical investigation into the distribution of the F -ratio in samples from two non-normal populations. *Biometrika* 45, 260—265 (1958).

Barton, D. E.: On the equivalence of two tests of equality of rate of occurrence in two series of events occurring randomly in time. *Biometrika* 45, 267—268 (1958).

Armitage, P.: Numerical studies in the sequential estimation of a binomial parameter. *Biometrika* 45, 1—15 (1959).

Neiswanger, W. A. and T. A. Yancey: Parameter estimates and autonomous growth. *J. Amer. statist. Assoc.* 54, 389—402 (1959).

Robson, D. S.: A simple method for constructing orthogonal polynomials when the independent variable is unequally spaced. *Biometrics* 15, 187—191 (1959).

Kastenbaum, Marvin A.: A confidence interval on the abscissa of the point of intersection of two fitted linear regressions. *Biometrics* 15, 323—324; Acknowledgment *ibid.* 488 (1959).

Sankaran, Munuswamy: On Nair's transformation of the correlation coefficient. *Biometrika* 45, 567—571 (1958).

Daniels, H. E. and M. G. Kendall: Short proof of Miss Harley's theorem on the correlation coefficient. *Biometrika* 45, 571—572 (1958).

Cox, D. R.: Two further applications of a model for binary regression. *Biometrika* 45, 562—565 (1958).

Sankaran, Munuswamy: On the non-central chi-square distribution. *Biometrika* 46, 235—237 (1959).

Pillai, K. C. Sreedharan and Celia G. Bantegui: On the distribution of the largest of six roots of a matrix in multivariate analysis. *Biometrika* 46, 237—240 (1959).

Kimball, A. W. and E. Leach: Approximate linearization of the incomplete β -function. *Biometrika* 46, 214—218 (1959).

Kerrieh, J. E.: Note on a discontinuous probability density. *Biometrika* 45, 270—273 (1958).

Box, G. E. P. and Mervin E. Muller: A note on the generation of random normal deviates. *Ann. math. Statistics* 29, 610—611 (1958).

Welch, B. L.: "Student" and small sample theory. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 777—788 (1958).

Ishii, Goro: Test of fit in life test. *Ann. Inst. statist. Math.* 9, 117—125 (1958).

Bei einem Lebensdauer-Test wird der Versuch beendet, wenn der s -te Todesfall eingetreten ist. Es werden die ersten s Daten von n Stichproben betrachtet: $x_1^n < x_2^n < \dots < x_s^n$. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Güte der Anpassung, wenn das Intervall nach dem Prinzip des Zufalls in Teile zerlegt wird. Verf. stellt vier Theoreme auf: Im ersten knüpft er an die Resultate von Kimball (dies. Zbl. 29, 154), Moran (dies. Zbl. 31, 60) und Greenwood [*J. roy. stat. Soc.* 109, 85—110 (1946)] an; im zweiten wird der Sherman-Test zugrunde gelegt, und in den beiden letzten führen Untersuchungen zur Poisson-Verteilung. Die Intervall-

teilung wird nach der Methode von Darling (dies. Zbl. 53, 99) durchgeführt, und die Resultate entsprechen denen von Darling und Barton-David (dies. Zbl. 71, 348). *G. Reißig.*

Mendenhall, William: A bibliography on life testing and related topics. *Biometrika* 45, 521—543 (1958).

Plackett, R. L.: Studies in the history of probability and statistics. VII: The principle of the arithmetic mean. *Biometrika* 45, 130—135 (1958).

Herdan, G.: The mathematical relation between Greenberg's index of linguistic diversity and Yule's characteristic. *Biometrika* 45, 268—270 (1958).

Aoyama, Hirojiro: On the evaluation of the risk index of the railroad crossing. *Ann. Inst. statist. Math.* 10, 163—180 (1959).

MacKinnon, William J.: Compact table of twelve probability levels of the symmetric binomial cumulative distribution for sample sizes to 1,000. *J. Amer. statist. Assoc.* 54, 164—172 (1959).

A compact table of critical values for tests of the symmetric binomial cumulative distribution is presented. It covers twelve probability levels (.001, .01, .02, .05, .10, .20, .30, .50, .70, .80, .90, and .95) for sample sizes to 1,000. Approximation methods of making such tests are also described, and notes on the theory and construction of the table are appended.

Zusammenfass. des Autors.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Wirtschaftsmathematik:

Norte Ramón, Francisco: Versuch zur Projektierung einer politischen Statistik. *Trabajos Estadist.* 10, 43—49 (1959) [Spanisch].

Maravall Casesnoves, Dario: Das biologische Phänomen des Existenzkampfes, die Stabilität der kapitalistischen Wirtschaft und die Vorhersage des Paretoschen Gesetzes. *Gac. mat., Madrid* 11, 6—11 (1959) [Spanisch].

Shapley, L. S.: The solutions of a symmetric market game. *Ann. Math. Studies* 40, 145—162 (1959).

Assume that the set of players is divided into two groups, M and N , such that only players in different groups can enter into mutually profitable arrangements. The author considers a game with the characteristic function $v(S) = \min(|S \cap M|, |S \cap N|)$ where the modular sign stands for the number of elements in a set. Solutions are derived dependent on a parameter which can be interpreted as the net market price.

S. Vajda.

Klinken, J. van: On some simple stochastic processes of special use in actuarial statistics. *Verzekerings-Arch.* 35, *Actuar. Bijv.* 107—117 (1958).

Die Arbeit befaßt sich mit der Schätzung der folgenden Größen, die im Versicherungswesen von Bedeutung sind, a) Anzahl der Witwen im Zeitpunkt t , die aus einem Anfangsbestand ($t = 0$) von N Ehepaaren hervorgegangen sind, b) Anzahl der Invaliden im Zeitpunkt t , die aus einem Anfangsbestand ($t = 0$) von N aktiven Versicherten entstanden sind. Diese Größen werden als stochastische Variable aufgefaßt, und es werden — bei kontinuierlicher Rechnung mit als bekannt vorausgesetzten Ausscheideintensitäten $\mu(t)$ — Ausdrücke für deren Erwartungswert und Streuung hergeleitet, wobei — wenn Reaktivierung im Falle b) zugelassen wird — allerdings eine allgemeine Lösung nicht angegeben werden kann. Mit Hilfe dieser beiden Maßzahlen bestimmt sich jeweils das Intervall, in dem die gesuchte Größe liegen wird, je nach der zugelassenen Wahrscheinlichkeit für eine Fehlaussage.

E. Zwinggi.

Savignon, Edouard: Théorie mathématique de la capitalisation collective viagère. *Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français* 69, 159—216 (1958).

Verf. setzt sich mit dem in Frankreich für die Bilanzierung von Pensionskassen wenig üblichen Anwartschaftsdeckungsverfahren auseinander; wegen des starken Kaufkraftschwundes des Geldes nach den beiden Weltkriegen ist die Anwendung des Umlageverfahrens wesentlich verbreiteter — trotz der damit verbundenen Ge-

fahren, auf die Verf. ausdrücklich und warnend hinweist. Der Leitgedanke der Arbeit besteht darin, daß in jedem Zeitpunkt t für den gesamten Versichertenbestand zwischen dem Barwert der Rentenleistungen einerseits und der vorhandenen Reserve und dem Barwert der Beitragszahlungen andererseits Äquivalenz bestehen soll. Unter diesem Gesichtspunkt wird für die reine Altersrentenversicherung bei Anwendung der kontinuierlichen Methode der Verlauf von θ_t , der Durchschnittsprämie, und V_t , der mathematischen Reserve, formelmäßig dargestellt. Insbesondere wird die Entwicklung von θ_t und V_t in Abhängigkeit der vorzeitigen Austritte, der Neueintritte und der durch die Geldwertänderungen bedingten Gehaltsänderungen in systematischer Weise untersucht.

E. Zwinggi.

Bühlmann, Hans: Die beste erwartungstreue lineare Schätzfunktion der Übersterblichkeit. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 59, 49—58, französ., ital. und engl. Zusammenfassg. 58 (1959).

In dieser Arbeit wird die Klasse der linearen erwartungstreuen Schätzungsfunktionen der multiplikativen Übersterblichkeit untersucht. Da sich die wirksamste Funktion als vom gesuchten Parameter abhängig erweist, wird die im Sinne einer Minimaxstrategie beste Funktion zur Schätzung der Übersterblichkeit vorgeschlagen.

E. Zwinggi.

Rufener, E.: Gruppen gemischter Versicherungen festen Schlußalters mit parabolischem Reserveverlauf. Verzekerings-Arch. 36, Actuar. Bijv. 16—36 (1959).

Bei der gruppenweisen Reserveberechnung in der Lebensversicherung gehen gewisse Verfahren von vereinfachenden Annahmen über den Reserveablauf der Einzelversicherung aus. So werden beispielsweise zur genäherten Darstellung des Reserveverlaufs lineare, parabolische oder hyperbolische Ersatzfunktionen herangezogen. Man kann nun die Frage stellen, ob überhaupt Sterbegesetze existieren und explizit angegeben werden können, welche den gewählten Modellverlauf exakt erzeugen. Mit diesem Problem der Konstruktion des einen gegebenen Reserveverlauf erzeugenden Sterbegesetzes, also dem Inversionsproblem der Reservetheorie, hat sich u. W. bis jetzt nur Verf. systematisch befaßt. In vorliegender Arbeit untersucht er speziell den Fall, daß der Reserveverlauf einer gemischten Versicherung eine quadratische Funktion der verflossenen Zeit, d. h. parabolisch ist, und leitet sowohl für die kontinuierliche wie für die diskontinuierliche Betrachtungsweise der Versicherungstechnik die bezüglichen Sterbegesetze her. So wird beispielsweise bei einer gemischten Versicherung beliebigen Schlußalters als Reservekurve eine Parabel zweiten Grades mit vertikaler Achse gewährleistet durch den Verlauf der diskontierten Überlebensordnung nach einer speziellen Hyperbel dritten Grades für die kontinuierliche Betrachtungsweise, jedoch durch eine diskontierte Überlebensordnung in Gestalt einer gebrochenen rationalen Funktion für die diskontinuierliche Betrachtungsweise.

H. Jecklin.

Talacko, Joseph: A note about a family of Perks' distribution. Sankhyā 20, 323—328 (1958).

W. Perks [J. Inst. Actuaries 63, 12 (1932)] proposed certain generalizations of the Makeham-Gompertz law of mortality. These were equivalent to assuming the probability density function, $\varphi(\tau)$, of the length of life, τ , to be of form

$$\varphi(\tau) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r c^r x \right) / \left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r c^r x \right)$$

where a_r , b_r and c are real parameters and $x = (\tau - \mu)/\alpha$. The present paper discusses the properties of random variables, x , having probability density functions of the special symmetrical form $\varphi(x) = c(e^x + k + e^{-x})^{-1}$ ($k > -2$). (Here c and k are real parameters connected by the condition $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$). The author divides these distributions into the three classes (i) $-2 < k < 0$, (ii) $0 \leq k \leq 2$ (iii) $k > 2$,

and obtains the characteristic function in each case. The border-line cases, corresponding to $k = 0$, $k = 2$ are the "hyperbolic secant" distribution $\varphi(x) = \pi^{-1} \operatorname{sech} x$ and the well-known logistic distribution $\varphi(x) = (e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x})^{-2} = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2(\frac{1}{2}x)$ respectively. The author points out that the normal, hyperbolic secant, and logistic distributions can all be obtained as the limiting distribution of $X_n = a_1^{(n)} x_1 + a_2^{(n)} x_2 + \dots + a_n^{(n)} x_n$ as $n \rightarrow \infty$ where x_1, \dots, x_n, \dots are independent double exponential variables ($\varphi(x_i) = \frac{1}{2} e^{-|x_i|}$), by appropriate choice of $a_i^{(n)}$'s. It is further shown that if x_1, \dots, x_n, \dots are independent hyperbolic secant variables then, as $n \rightarrow \infty$, the distribution of $X_n = \sum_{r=1}^n 2^{-r} x_r$ tends to the logistic distribution.

There are also a few, less important, results, including comparisons with the normal and Cauchy distributions (by means of characteristic functions), and the distribution of the sum of two independent logistic variables. *N. L. Johnson.*

Campagne, C.: Quelques considérations sur la probabilité de „ruine“ du point de vue discontinue. *Verzekerings-Arch.* 36, Actuar. Bijv. 1—15 (1959).

Die Arbeit befaßt sich mit der Wahrscheinlichkeit, daß bei einem Versichertenbestand in irgendeinem in der Zukunft liegenden Jahre die Höhe der Schäden die Summe von Sicherheitsreserven und Jahresprämien erreicht oder gar übertrifft. Es wird dabei vorausgesetzt, daß neben der gesamten Jahresrisikoprämie P noch ein Sicherheitszuschlag von λP erhoben wird und daß die Sicherheitsreserve, die anfänglich u betragen soll, jährlich entsprechend dem Risikoergebnis erhöht oder erniedrigt wird, indem ein Überschuß der gesamten Jahresprämie $(1 + \lambda) P$ über die Jahresschäden zur Verstärkung der Reserve verwendet wird und umgekehrt ein Verlust aus der Sicherheitsreserve gedeckt werden soll. Ist $\lambda = 0$, dann gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit $\delta(u) \equiv 1$; ist $\lambda > 0$, dann ergibt sich die Abschätzung $\delta(u) < e^{Ru}$, wobei R die negative Wurzel der Gleichung

$$e^{-P(1+\lambda)R} - \int_0^\infty e^{-Rx} f(x) dx = 0$$

bedeutet; $f(x) dx$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß der Gesamtschaden zwischen x und $x + dx$ liegt; für P gilt $P = \int_0^\infty x f(x) dx$. *E. Zwinggi.*

Mandel, S. P. H. and I. M. Hughes: Change in mean viability at a multi-allelic locus in a population under random mating. *Nature* 182, 63—64 (1958).

It is conjectured that the mean viability at a multi-allelic locus will increase each time the population undergoes the process of random mating. It is shown here that this is the case at least when the population is in the neighbourhood of an equilibrium supposed to be existent. *Y. Komatu.*

Robertson, Alan: Experimental design in the evaluation of genetic parameters. *Biometrics* 15, 219—226 (1959).

Jardine, R.: Ranking methods and the measurement of attitudes. *J. Amer. statist. Assoc.* 53, 720—728 (1958).

Sprott, D. A.: The stability of a sex-linked allelic system. *Ann. Hum. Genetics* 22, 1—6 (1957).

A sex-linked allelic system under selection pressure and random mating is observed in which the frequencies of various mating types are known and the fertilities are the same. Conditions for the stability of an equilibrium of the system are given in terms of the range of a determinantal equation. The results are illustrated by several examples. *Y. Komatu.*

Mather, Kenneth and R. Morley Jones: Interaction of genotype and environment in continuous variation. I: Description. II: Analysis. *Biometrics* 14, 343—359, 489—498 (1958).

It is shown how the phenotypic effects of interaction between genotype and environment are represented by parameters, orthogonal to the genetic and environmental parameters, and how the contribution of interactions to phenotypic variation is expressed by means of these interaction parameters. — In the second part interactions of genotype and environment are discussed by analysing continuous variation into components. The case where the individuals are distributed at random over environments is considered and then the consideration is extended to the case of non-random distribution.

Y. Komatu.

Kimura, Motoo: Some problems of stochastic processes in genetics. *Ann. math. Statistics* 28, 882—901 (1957).

Diverse types of stochastic processes which arise in genetics are selected from various levels of organization. Topics discussed in the present paper are random assortment of subunits of a gene, senescence in paramecium due to random assortment of chromosomes, natural selection in a finite population (interaction between selection and random genetic drift), chance of fixation of mutant genes, and population structure and evolution. Analyses are made for respective stochastic models considered and some numerical examples are given.

Y. Komatu.

Reeve, E. C. R. and J. C. Gower: Inbreeding with selection and linkage. II: Sib-mating. *Ann. hum. Genetics* 23, 36—49 (1958).

In a previous paper the senior author (this Zbl. 77, 133) has investigated the effects of selfing through linkage on a locus under selection. In the present note, sib-mating on two linked loci are considered when selection against homozygosity acts at one locus so that the same fractions of homozygotes survive but another locus is not directly affected by selection. The generation matrix of order 19 is derived. The rates of inbreeding progress at the latter locus are computed for various values of survivals and recombination frequencies in cases where selection acts within lines only and where it acts equally within and between lines.

Y. Komatu.

Lejeune, Jérôme: Sur une solution „a priori“ de la méthode „a posteriori“ de Haldane. *Biometrics* 14, 513—520 (1958).

In studying the abnormality caused by a recessive gene in Mendelian inheritance, the families to be examined must involve at least one abnormal child. In order to estimate the probability of appearing an abnormal child from heterozygous parents, Haldane derived a formula a posteriori, based on the maximum likelihood method, which is an algebraic equation. In the present note, the author gives numerical tables which may be used conveniently for solving the equation by trials and for computing the variance of the probability thus determined.

Y. Komatu.

Lord, Frederic M.: Problems in mental test theory arising from errors of measurement. *J. Amer. statist. Assoc.* 54, 472—479 (1959).

Adams, Ernest and Samuel Messick: An axiomatic formulation and generalization of successive intervals scaling. *Psychometrika* 23, 355—368 (1958).

A formal set of axioms is presented for the method of successive intervals, and directly testable consequences of the scaling assumptions are derived. Then by a systematic modification of basic axioms the scaling model is generalized to non-normal stimulus distributions of both specified and unspecified form.

Zusammenfassung des Verfassers.

● **Neumann, John von:** The computer and the brain. (Mrs. Hepsa Ely Silliman Memorial Lectures.) New Haven, Conn.: Yale University Press; London: Oxford University Press 1958. XIV, 82 p. 24 s. net.

Ein unvollendetes Manuskript, das abbricht, wo die Auseinandersetzungen neuartig und interessant zu werden versprechen: Im Gegensatz zu digitalen Maschinen arbeitet das zentrale Nervensystem mit elementaren Prozessen, denen es weitgehend an Präzision fehlt, und erzielt doch eine große Zuverlässigkeit. Nach Verf. muß das mit der geringen logischen Tiefe der Prozeßketten zusammenhängen. Die Mathematik des zentralen Nervensystems soll von der uns geläufigen Mathematik grundverschieden sein. Die Organisation des Retinabildes geschieht mit drei aufeinanderfolgenden

Synapsen, also mit nur drei logischen Schritten — sagt Verf., aber dies Argument überzeugt kaum. Will man die Zuverlässigkeit des zentralen Nervensystems schätzen, so muß man von Reiz bis Reaktion rechnen. Man darf annehmen, daß in diesem Weg zahlreiche Rückkoppelungsprozesse eingeschaltet sind. Es ist nun wohlbekannt, daß man mit sehr ungenauen Rückkopplungsinstrumenten schließlich eine große Zuverlässigkeit erzielen kann. Wir kennen aber in der uns geläufigen Mathematik als Analogon der Rückkoppelung die Iterationsmethode, die in gewissem Sinne ebenfalls logischer Tiefe entbehrt. Merkwürdigerweise hob Verf. wohl den statistischen Hintergrund der Nervensystemfunktion hervor, erwähnte aber niemals die Rückkopplung. Offenbar hatte er gegen die Rückkopplungstheorie etwas einzuwenden, aber was das sein könnte, läßt sich aus diesem Fragment nicht erschließen.

Hans Freudenthal.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Ito, Makoto: A note on non-Desargues projective plane. Proc. Japan Acad. 34, 420—421 (1958).

Verf. gibt im Anschluß an N. S. Mendelsohn (dies. Zbl. 72, 379) einen unvollständigen Beweis der wohlbekannten Tatsache [s. G. Pickert, Projektive Ebenen (1955; dies. Zbl. 66, 387)], daß der kleine Desarguessche Satz mit dem Satz vom vierten harmonischen Punkt gleichwertig ist.

H. Salzmann.

Pickert, Günter: Bemerkungen über die projektive Gruppe einer Moufang-Ebene. Illinois J. Math. 3, 169—173 (1959).

Die von den zentralen Kollineationen einer projektiven Ebene erzeugte Gruppe heißt projektive Gruppe; sie heißt kleine projektive Gruppe, wenn die Zentren der erzeugenden Kollineationen jeweils auf den zugehörigen Achsen liegen. Verf. beweist: In einer desarguesschen Ebene stimmen die beiden Gruppen genau dann überein, wenn die multiplikative Gruppe des Koordinatenkörpers von ihrer Kommutatorgruppe und den dritten Potenzen der Zentrumselemente erzeugt wird. Die kleine projektive Gruppe ist auf den nichtausgearteten Punktequadrupeln einer nichtdesarguesschen Moufang-Ebene transitiv, wenn deren Koordinatenalternativkörper einen reell-quadratisch und kubisch abgeschlossenen (d. h. jedes Element ist eine dritte Potenz) Grundkörper besitzt. Schließlich wird gezeigt, wie man in einer Moufang-Ebene die projektiven Kollineationen aus den kleinen projektiven Kollineationen gewinnen kann.

H. Karzel.

Salzmann, Helmut: Viereckstransitivität der kleinen projektiven Gruppe einer Moufang-Ebene. Illinois J. Math. 3, 174—181 (1959).

Verf. beweist zuerst, daß die kleine projektive Gruppe (vgl. vorstehendes Referat) einer Moufang-Ebene viereckstransitiv ist, wenn jedes Element des Koordinaten-Alternativkörpers \mathfrak{A} von der Form $((a\ b)\ c)((a\ b^{-1}\ a)\ c^{-1})$ ist. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^3$ oder $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}^3(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A})$ gilt (\mathfrak{Z} = Zentrum von \mathfrak{A} , $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A}$ = Menge aller Kommutatoren $b\ c\ b^{-1}\ c^{-1}$). Für eine echte Moufang-Ebene ist die Aussage „ $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^3$ “ äquivalent mit „jedes einfach ausgeartete Fünfeck der Ebene liegt in einer Pappusschen Unterebene mit viereckstransitiver kleiner projektiver Gruppe“. Hieraus ergibt sich nochmals (aber ohne Rechnung), daß die spezielle Bedingung $\mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}$ die Viereckstransitivität zur Folge hat. Für eine desarguessche Ebene wird gezeigt, daß diese genau dann eine viereckstransitive kleine projektive Gruppe besitzt, wenn $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^3\mathfrak{K}'$ gilt (\mathfrak{K} = Koordinatenkörper, \mathfrak{K}' = Kommutatorgruppe von \mathfrak{K}^\times). Durch ein Beispiel wird belegt, daß es desarguessche Ebenen gibt, deren kleine projektive Gruppe viereckstransitiv ist, die aber nicht mit der vollen projektiven Gruppe zusammenfällt (vgl. hierzu loc. cit.). Abschließend werden die Beziehungen erörtert, die zwischen dem Pickertschen Kriterium für die

Viereckstransitivität (loc. cit.) und den speziellen Bedingungen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^3$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^3 (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A})$ bestehen.

H. Karzel.

Wagner, A.: On perspectivities of finite projective planes. Math. Z. 71, 113—123 (1959).

Es werden die folgenden drei Sätze über eine endliche projektive Ebene \mathfrak{P} , eine Gruppe Π von Kollineationen und die kleine projektive Gruppe Π_0 dieser Ebene bewiesen: 1. \mathfrak{P} ist desarguessch und $\Pi_0 \subseteq \Pi$, wenn es zu jedem Punkt P und jeder Geraden g in Π eine nichtidentische zentrale Kollineation mit Zentrum P , deren Achse durch P geht, und eine solche mit Achse g , deren Zentrum auf g liegt, gibt. 2. Gibt es zu jedem Punkt P und jeder Geraden g in Π eine nichtidentische zentrale Kollineation mit Zentrum P , deren Achse nicht durch P geht, und eine solche mit Achse g , deren Zentrum nicht auf g liegt, so liegt einer der drei folgenden Fälle vor: (a) Π läßt eine Gerade g fest; die aus \mathfrak{P} durch Wegnahme von g und ihrer Punkte entstehende affine Ebene ist Translationsebene und Π umfaßt deren Translationsgruppe; (b) dual zu (a); (c) Π läßt keinen Punkt und keine Gerade fest, \mathfrak{P} ist desarguessch und $\Pi_0 \subseteq \Pi$. 3. Ist Π transitiv auf den Punkten von \mathfrak{P} und enthält Π eine nichtidentische zentrale Kollineation, so ist \mathfrak{P} desarguessch und $\Pi_0 \subseteq \Pi$; ist die Ordnung von \mathfrak{P} kein Quadrat und die von Π gerade, so kann die Voraussetzung einer nichtidentischen zentralen Kollineation weggelassen werden. — Die André'sche Ausnahmeebene (Ordnung 9) und die zu ihr duale Ebene zeigen, daß in den Fällen (a), (b) von Satz 2 \mathfrak{P} nicht desarguessch zu sein braucht. Die Ebene über einem distributiven nichtassoziativen Quasikörper gehört sowohl zu (a) wie zu (b). Für eine solche Ebene wird eine Polarität angegeben und gezeigt, daß deren absolute Punkte ein Oval bilden. G. Pickert.

Ostrom, T. G. and A. Wagner: On projective and affine planes with transitive collineation groups. Math. Z. 71, 186—199 (1959).

Als das Hauptergebnis dieser Arbeit wird man den folgenden Satz bezeichnen: Ist eine Gruppe Π von Kollineationen der endlichen projektiven Ebene \mathfrak{P} doppelt transitiv auf den Punkten, so ist \mathfrak{P} desarguessch und Π umfaßt die kleine projektive Gruppe von \mathfrak{P} . Durch diesen Satz wird die Frage nach doppelt transitiven endlichen projektiven Ebenen vollständig beantwortet. Für endliche affine Ebenen ist ein entsprechendes Ergebnis noch nicht gewonnen, obwohl die einzige bekannte nicht-desarguessche, auf den Punkten doppelt transitive affine Ebene die André'sche Ausnahmeebene ist. Für eine affine Ebene \mathfrak{A} , eine Gruppe Π von Kollineationen und die Translationsgruppe Γ dieser Ebene werden die folgenden Sätze bewiesen: 1. Ist Π doppelt transitiv auf den Punkten von \mathfrak{A} und \mathfrak{A} endlich, so ist \mathfrak{A} eine Translationsebene und $\Gamma \subseteq \Pi$. 2. Ist Π transitiv auf den nichtausgearteten Vierecken mit zwei uneigentlichen Ecken und enthält Π eine nichtidentische zentrale Kollineation mit eigentlicher Achse und auf dieser gelegenen (uneigentlichem) Zentrum oder aber eine involutorische zentrale Kollineation mit eigentlicher Achse und nicht auf dieser gelegenen (uneigentlichem) Zentrum, so ist \mathfrak{A} (oder besser: ihre Ergänzung zur projektiven Ebene) eine Moufang-Ebene (d. h. der kleine Desarguessche Satz gilt). 3. Ist Π transitiv auf den nichtausgearteten Vierecken mit zwei uneigentlichen Ecken und \mathfrak{A} endlich, so ist \mathfrak{A} desarguessch. 4. Ist \mathfrak{A} endlich von einer Ordnung, die gerade oder ungerades Nichtquadrat oder Primzahlpotenz ist, und Π transitiv auf den (eigentlichen) Geraden von \mathfrak{A} , so ist \mathfrak{A} Translationsebene und $\Gamma \subseteq \Pi$. — In Satz 4 können die Bedingungen für die Ordnung noch etwas eingeschränkt werden, so daß dann die kleinste, diesen Bedingungen nicht genügende Zahl 4225 ist. G. Pickert.

Rosati, Luigi Antonio: I gruppi di collineazioni dei piani di Hughes. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 505—513 (1958).

D. R. Hughes (dies. Zbl. 82, 357) hat zu jedem (Links-)Fastkörper R der Ordnung p^{2n} über dem Körper F der Ordnung p^n als Zentrum eine nicht desarguessche projektive Ebene π der Ordnung p^{2n} mit einer desarguesschen Teilebene π_0 der Ordnung p^n angegeben, die keine Translationsebene ist, und als deren Punkte die ein-

dimensionalen Unterräume des über R gebildeten dreidimensionalen (Links-)Vektorraumes V dienen. In einer teilweisen Antwort auf die Frage nach den Kollineationsgruppen dieser Ebenen zeigte G. Zappa (dies. Zbl. 79, 363), daß sich jede lineare Kollineation von π_0 zu einer Kollineation von π fortsetzen läßt, und bestimmte die volle Kollineationsgruppe im Fall der Ordnung 9. Im Anschluß hieran beschreibt Verf. die Kollineationsgruppen der Hughes-Ebenen beliebiger Ordnung > 9 . Unter Benutzung einer von Zappa implizit hergeleiteten einfacheren Kennzeichnung der Geraden von π beweist Verf. nun, daß die volle Kollineationsgruppe Σ von π von der Gruppe der semilinearen Abbildungen von V mit Koeffizienten aus F induziert wird. Daraus folgt, daß jede Kollineation von π die Teilebene π_0 als Ganzes in sich überführt. Genau, wenn $n = 1$, also F ein Primkörper ist, zerfällt Σ in das direkte Produkt der Gruppe der linearen Kollineationen und der Automorphismengruppe von R . Wie Verf. dem Ref. brieflich mitteilte, beruht seine in der Arbeit gemachte Bemerkung, daß unter den zur Konstruktion der Hughes-Ebenen benutzten Fastkörpern keiner der sieben Ausnahmetypen von H. Zassenhaus (dies. Zbl. 11, 103) vorkomme, auf einem Irrtum; der Ausnahme-Fastkörper der Ordnung 23^2 hat beispielsweise den Körper der Ordnung 23 als Zentrum. Die Sätze der Arbeit und ihre Beweise werden dadurch nicht weiter berührt. Nur bei jenen ergänzenden Folgerungen, bei denen von der Struktur der Automorphismengruppe des Fastkörpers Gebrauch gemacht wird, die von Zassenhaus (l. c.) nur für die gewöhnliche Fastkörper-Serie bestimmt wurde, sind die Ausnahme-Fastkörper gegebenenfalls auszuschließen.

H. Salzmann.

Zappa, Guido: Piani affini finiti con tralazioni. Ricerche Mat. 7, 241—253 (1958).

J. André (dies. Zbl. 82, 358) hat endliche affine Ebenen mit Translationen in mindestens zwei verschiedenen Richtungen untersucht und bewiesen, daß entweder die Gruppe T der Translationen transitiv auf den Punkten der Ebene ist oder die Menge der Punkte unter der aus den Translationen und Streckungen (mit uneigentlicher Achse) gebildeten Gruppe Π der Perspektivitäten in mindestens drei Transitivitätsgebiete zerfällt. Er warf dabei die Frage auf, ob es überhaupt solche Ebenen gibt, die keine Translationsebenen sind, für die also der zweite Fall eintritt. Verf. gibt zunächst hierfür ein Beispiel, indem er zeigt, daß bei Wahl einer zu der desarguesschen Unterebene gehörenden Geraden der von ihm schon früher (dies. Zbl. 79, 363) untersuchten projektiven Ebene der Ordnung 9 von Veblen-Wedderburn-Hughes (s. Hughes, dies. Zbl. 82, 357) als uneigentlicher Geraden eine affine Ebene entsteht, deren Punkte unter Π in vier Transitivitätsgebiete der Ordnung 18 und eines der Ordnung 9 zerfallen. Sodann beweist er, daß bei einer beliebigen affinen Ebene der Ordnung 9, die keine Translationsebene ist, die Menge der Punkte unter der Translationsgruppe T in mindestens 9 Transitivitätsgebiete zerfällt. Jedes Transitivitätsgebiet wird nämlich mit der von der Ebene induzierten Inzidenz und Parallelität eine „partielle Translationsebene“. Für solche partielle Translationsebenen weist er nach, daß ihre Translationsgruppen elementar abelsch sind, und daß jeder Punkt Zentrum einer involutorischen Streckung ist, wenn die Translationsgruppe nicht den Exponenten 2 hat. Zerfiele nun die affine Ebene der Ordnung 9 unter T in 3 partielle Translationsebenen, so ließen sich deren involutorische Streckungen zu Streckungen der ganzen Ebene fortsetzen, wie durch ziemlich verwickelte Abzählungen gezeigt wird. Dies wäre ein Widerspruch zu einem Ergebnis von André. (dies. Zbl. 56, 386).

H. Salzmann.

Zappa, Guido: Piani grafici. Rend. Sem. mat. fis. Milano 28, 78—86, (1959).

Allgemeinverständlicher Bericht über einige bekannte Ergebnisse und Fragen der Theorie der projektiven Ebenen in dem etwa durch den Inhalt von § 3.5 des Buches von G. Pickert, Projektive Ebenen (dies. Zbl. 66, 387) gesteckten Rahmen, sowie über das Problem der (Anti-) Fano-Ebenen.

H. Salzmann.

Amemiya, Ichiro and Israel Halperin: Coordinatization of complemented modular lattices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 70—78 (1959).

In Fortsetzung einer Arbeit von Fryer und Halperin (dies. Zbl. 83, 157) wird der folgende Satz bewiesen: Ein komplementärer modularer Verband mit einem normierten Rahmen der Länge 3, der die in der genannten Arbeit vorausgesetzten einschränkenden Bedingungen erfüllt, ist isomorph der (durch die Enthaltensein-Beziehung teilweise geordneten) Menge aller M -Mengen aus Tripeln (x_1, x_2, x_3) mit x_i aus einem alternativen regulären Ring R . Eine M -Menge ist dabei erklärt als die Menge derjenigen Linearkombinationen $(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 y_i u_i (y_i \in R)$

von festen Tripeln $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ mit $a_{ii}^2 = a_{ii}$, $a_{ii} a_{ij} = a_{ij}$ für $i > j$, $a_{ij} = 0$ für $i < j$, bei denen ein x_i idempotent ist und die Gleichungen $x_i x_j = x_j$ für alle $j < i$, $x_j = 0$ für alle $j > i$ erfüllt. Für die alternativen regulären Ringe wird eine neue Kennzeichnung angegeben: Zu jedem x gibt es y, z mit $(xy)x = x = x(xz)$, $(xy)^2 = xy$, $(zx)^2 = zx$; es gilt $(xy)z = x(yz)$, wenn mindestens eins der Elemente x, y, z, xy, yz idempotent ist. Von den einschränkenden Bedingungen, welche der Verband erfüllen muß, werden einige aus den übrigen hergeleitet. G. Pickert.

● Bachmann, Friedrich: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Eine Vorlesung. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. 96.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1959. XIII, 311 S. mit 160 Abb. DM 45,80; Ganzln. DM 49,80.

Das vorliegende Werk hat seinen Ursprung in der 1907 von Hjelmslev entdeckten Möglichkeit, die Bewegungsgruppen der klassischen euklidischen und der beiden nichteuklidischen (nämlich der hyperbolischen und elliptischen) Geometrien durch ein Axiomensystem zu beschreiben, in welchem die Eigenschaften der Spiegelungen (das sind die Elemente der Ordnung 2 in der Bewegungsgruppe) wesentlich herangezogen werden. Wie sich im Verlauf weiterer Untersuchungen dann herausstellte, läßt sich ein solcher Aufbau der drei ebenen Geometrien weitgehend unter Zurückstellung der Anordnungsaxiome durchführen. Damit wurde ein den beiden nichteuklidischen und der euklidischen Geometrie gemeinsamer Kern sichtbar — ein Phänomen, das sich bei der an Euklid anschließenden Grundlegung der Geometrie durch Hilbert nicht einstellen konnte, da bei dem Hilbertschen Aufbau die Anordnungsaxiome schon frühzeitig wesentlich herangezogen werden und damit die elliptische Geometrie aus dem Feld der Betrachtungen ausgeschlossen bleibt. — Zahlreiche Geometer (übrigens fast ausschließlich Deutsche) haben den Hjelmslevschen Ansatz soweit durchgearbeitet, daß Verf. nunmehr einen aus Vorlesungen erwachsenen systematischen Aufbau der ebenen Geometrien aus dem Spiegelungsbegriff vorlegen kann. Der Aufbau ist streng deduktiv. Nach einem kurzen propädeutischen Kapitel wird in Kapitel II das Axiomensystem der absoluten Geometrie formuliert, das eine reduzierte Fassung eines von Arnold Schmidt angegebenen Axiomensystems ist. Da es seinen Platz neben dem Hilbertschen Axiomensystem beansprucht, sei es hier vollständig referiert: „Es sei \mathcal{G} eine Gruppe und \mathcal{S} ein aus involutorischen Elementen bestehendes invariantes Erzeugendensystem von \mathcal{G} . Die Elemente von \mathcal{S} seien mit a, b, c, d, \dots bezeichnet; die involutorischen Elemente von \mathcal{G} , die sich als Produkt von zwei Elementen aus \mathcal{S} schreiben lassen, werden mit P, Q, R, \dots bezeichnet. Die Relation: $\varrho \sigma$ ist involutorisch (für ϱ und σ aus \mathcal{G}) werde mit $\varrho | \sigma$ bezeichnet. Axiom 1: Zu P, Q gibt es stets ein g mit $P, Q | g$. Axiom 2: Aus $P, Q | g, h$ folgt $P = Q$ oder $g = h$. Axiom 3: Gilt $a, b, c | P$, so gibt es ein d mit $a b c = d$. Axiom 4: Gilt $a, b, c | g$, so gibt es ein d mit $a b c = d$. Axiom D. Es gibt g, h, j derart, daß $g | h$ und weder $j | g$ noch $j | h$ noch $j | gh$ gilt.“ — Wenn man für \mathcal{G} die Bewegungsgruppe einer der drei klassischen Geometrien wählt und für \mathcal{S} die Geradenspiegelungen (d. h. diejenigen involutorischen Bewegungen, die eine Gerade punktweise festlassen), so genügt ein solches Paar \mathcal{G}, \mathcal{S} dem Axio-

mensystem. Andererseits ist die durch das vorstehende Axiomensystem definierte, mit absolute Geometrie bezeichnete Theorie sehr viel reichhaltiger. Einen ersten Überblick über den Umfang der absoluten Geometrie liefert das „Haupttheorem“, das am Ende des ein Drittel des Buches umfassenden Kapitels II formuliert ist: „Eine dem Axiomensystem genügende Gruppe \mathfrak{G} ist Untergruppe der Bewegungsgruppe \mathfrak{G}' einer ordinären oder singulären projektiv-metrischen Ebene“. Dabei ist eine ordinäre projektiv-metrische Ebene eine projektive Ebene über einem (kommutativen) Körper der Charakteristik $\neq 2$, in der eine Polarität gegeben ist (wie z. B. durch die klassische elliptische oder hyperbolische Geometrie), und die Bewegungsgruppe einer solchen projektiv-metrischen Ebene ist die von den involutorischen Homologien bezüglich nicht-inzidierender Paare Pol-Polare erzeugte Gruppe. Eine singuläre projektiv-metrische Ebene ist eine projektive Ebene über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$, in der eine Gerade g_∞ als unendlich fern ausgezeichnet ist, auf der eine projektive elliptische Involution gegeben ist (wie z. B. auf der unendlich fernen Geraden der klassischen euklidischen Geometrie); die Bewegungsgruppe einer singulären projektiv-metrischen Ebene ist das Erzeugnis der harmonischen Homologien bezüglich der Paare: Punkt p auf g_∞ und Gerade $g \neq g_\infty$ durch den p unter der elliptischen Involution zugeordneten Punkt auf g_∞ . — In Kapitel III werden die Bewegungsgruppen der projektiv-metrischen Ebenen näher untersucht — im ordinären Fall handelt es sich dabei ja um nichts anderes als die speziellen orthogonalen Gruppen $O^+(3, K, f)$ über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$ und einer nichtsingulären quadratischen Form f . Falls f den Index 1 hat, so ist $O^+(3, K, f)$ isomorph zu $SL(2, K)$; für diese Gruppen wird eine Charakterisierung mit Hilfe der involutorischen Erzeugenden angegeben. — In den Kapiteln IV, V und VI werden dann nacheinander durch nabeliegende, einfache Zusatzaxiome die euklidischen, hyperbolischen und elliptischen Geometrien definiert und die vollständige Beschreibung ihrer Bewegungsgruppen hergeleitet (diese Herleitung wird übrigens auch unabhängig von dem Haupttheorem durchgeführt, da die Zusatzaxiome, durch die diese Geometrien definiert werden, zum Teil wesentliche Vereinfachungen gegenüber dem Beweis des Haupttheorems gestatten). Und zwar stellt sich heraus, daß im Fall der euklidischen Geometrie in dem Koordinatenkörper K , Char $K \neq 2$, ein bis auf einen quadratischen Faktor festgelegtes Nichtquadrat $-k$ ausgezeichnet ist, so daß die Punkte der euklidischen Ebene (ebenso wie die Punkte der reellen euklidischen Ebene mit Hilfe der komplexen Zahlen) durch die Elemente des quadratischen Erweiterungskörpers $L = K(\sqrt{-k})$ dargestellt werden und die Gruppe \mathfrak{G} durch die Abbildungen $z \rightarrow az + b$ von L in sich gegeben ist mit $aa = 1$, $a, b \in L$; \mathfrak{S} besteht aus den Geradenspiegelungen. Im Falle der hyperbolischen Geometrie ist \mathfrak{G} die Gruppe $O^+(3, K, f)$ [isomorph zu $SL(2, K)$] über einem angeordneten Körper K mit einer Form f vom Index 1; \mathfrak{S} besteht aus den involutorischen Elementen mit negativer Norm [oder, als Elemente von $SL(2, K)$ aufgefaßt, mit negativer Determinante]. Im Falle der elliptischen Geometrie ist \mathfrak{G} die Gruppe $O^+(3, K, f)$ über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$ mit einer Form f vom Index 0; \mathfrak{S} besteht aus allen involutorischen Elementen von \mathfrak{G} . — Das Hauptziel des Buches, die ebenen Geometrien vom euklidischen, hyperbolischen oder elliptischen Typ aus dem Spiegelungsbegriff zu begründen, ist erreicht, und die Bedeutung des Axiomensystems der absoluten Geometrie ist hiermit erwiesen. Damit stellt sich aber sogleich die Frage, welches die anderen, nicht unter die euklidische, hyperbolische oder elliptische Geometrie fallenden Geometrien sind, die dem Axiomensystem der absoluten Geometrie genügen. Das Haupttheorem zeigt zwar, daß eine dem Axiomensystem genügende Gruppe \mathfrak{G} mit dem Erzeugendensystem \mathfrak{S} stets Untergruppe der Bewegungsgruppe \mathfrak{G}' einer projektiv-metrischen Ebene ist, wie sie oben definiert wurde — es bleibt jedoch für den allgemeinen Fall noch offen, wie das Erzeugendensystem \mathfrak{S} von \mathfrak{G} in dem Erzeugendensystem \mathfrak{S}' (bestehend aus den oben beschriebenen involutorischen

Homologien) von \mathcal{G}' gelegen ist. In einem Anhang werden die bisher gefundenen Ergebnisse in dieser Richtung dargestellt, die übrigens im singulären Fall schon als abschließend anzusehen sind. Das Buch schließt mit einem umfassenden Literaturverzeichnis, einer Zusammenstellung besonderer Zeichen, einer Axiomentafel und einem Index. — An diesem knappen Umriß der Theorie der absoluten Geometrie wird der Einfluß der neueren Entwicklung der geometrischen Algebra deutlich. Dennoch bleibt das Werk stark den Klassikern der Grundlagen der Geometrie, wie Hilbert, Hjelmslev, Hessenberg, F. Schur, Veblen und Reidemeister verbunden. Das ermöglicht es, eine Fülle soliden, geometrischen, anschaulichen Materials zu behandeln, so daß Verf. nicht nur den Spezialisten, sondern auch den großen Kreis der Freunde der Elementargeometrie anzusprechen vermag. Das Buch stellt eine glückliche Verbindung von Bewährtem und Zukunftweisendem dar, wobei unter den interessanten Aufgaben für die Zukunft noch insbesondere auf das Problem hinzuweisen wäre, die hier für die Dimension 3 gegebene Kennzeichnung der orthogonalen Gruppen mit Hilfe ihrer involutorischen Erzeugenden auf beliebige Dimensionen zu übertragen.

W. Klingenberg.

Dubikajtis, L.: Un système d'axiomes communs à quelques géométries. Ann. Polon. math. 5, 209—236 (1958).

Da eine Zusammenfassung der meisten Resultate dieser Arbeit vor kurzem erschienen ist, verweist Ref. auf sein diesbezügliches Referat (dies. Zbl. 83, 157). Darüber hinaus wird hier gezeigt: Durch die Axiome für $m = n + 1$, $p = q = 0$ werden alle n -dimensionalen projektiven Geometrien (in dem allgemeineren Sinne, daß es auch Geraden geben kann, die nur mit zwei Punkten inzidieren) gekennzeichnet; für $m = n + 1$, $p = 1$, $q = 0$ erfaßt man genau alle n -dimensionalen affinen Geometrien. Ferner werden Zusammenhänge zwischen einigen speziellen Modellen erörtert und die Unabhängigkeit der Axiome bewiesen.

H. Karzel.

Fladt, Kuno: Über den Parallelismus von Levi-Civita in der Geometrie konstanten Krümmungsmaßes. J. reine angew. Math. 201, 78—83 (1959).

Dans cet ouvrage l'A. démontre quelques propriétés du parallélisme de Levi-Civita dans un espace riemannien R_n , à courbure constante, rapporté à un système de coordonnées projectives où l'absolu a l'équation

$$(x_0)^2 + \varepsilon [(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2] \equiv (x|x) = 0,$$

l'espace étant elliptique ou hyperbolique, selon que $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$. Dans cet espace les points pour lesquels $(x|x) > 0$ sont des points dans l'intérieur de l'absolu ou des „points propres“, et les points pour lesquels $(x|x) < 0$ sont des points en dehors de l'absolu, ou des points idéaux. Interprétant le vecteur unitaire ξ comme point de R , l'A. associe à chaque courbe x de R_n , la „courbe ξ “ décrite par le vecteur unitaire ξ par transport parallèle le long de la courbe x . Comme $(\xi|\xi) = \varepsilon$, résulte que dans l'espace hyperbolique $\varepsilon = -1$ le point ξ sera un point idéal et donc géométriquement „la courbe ξ “ n'existe pas, mais l'A. montre que ses tangentes existent et nous avons le théorème: la tangente dans le point ξ de „la courbe ξ “ est la droite qui joint ξ avec x , donc elle est une droite propre. Pour $n = 2$ l'A. démontre que les courbes ξ sont les évolutives des polaires absolues de la courbe x et pour $n = 3$ les courbes ξ sont les évolutives planes de la surface réglée développante produite par les plans polaires de la courbe x .

V. Dumitru.

Elementargeometrie:

• Dedò, Modesto: Matematiche elementari dal punto di vista superiore. Vol. 1: Costruzioni geometriche. Vol. 2: Massimi e minimi dal punto di vista elementare. Sistemi di cerchi e sfere. Napoli: Libreria Liguori. 146, 196 p. L. 1300, 1600. Ohne Jahresangabe.

This text is designed for graduates of Naples University entering the teaching profession. Compared with F. Klein's lectures with similar title, the view of elementary mathematics here given is from a rather pedestrian higher standpoint, but certainly useful in its own way. The scope of the book may be judged from the following table of contents: I. Synthetic solutions of problems in elementary geometry: 1. Method of geometrical loci. 2. Method of envelopes. 3. Method of transformation of figures. 4. Method of false position. — II. Geometrical constructions: 1. Constructions with ruler only. 2. Constructions with ruler and compass. 3. Constructions with compass only. 4. Elementary solution of algebraic equations. 5. Digression on the solution of equations of degree 2, 3 and 4. 6. The cyclotomic equation. 7. Digression on number theory. 8. Supplement on number theory. — III. Maxima and minima from the elementary point of view: 1. Noteworthy maxima and minima. 2. Maxima and minima in elementary geometry. — IV. Systems of circles and spheres: 1. Analytic treatment. 2. Linear systems of spheres. 3. Elementary synthetic treatment. 4. Supplement. 5. Abstract geometry and the systems of circles and spheres. Stereographic projection. 6. Nonlinear systems of circles and spheres.

F. A. Behrend.

Baier, Othmar: Über die Konstruktion von Parallelen mit Hilfe des Lineals und ortsfester rechter Winkel. *Math. Z.* **71**, 94—98 (1959).

The construction of the parallel to a given line through a given point is impossible with the ruler only. It is shown that the adjunction of fixed right angles does not help in general. But the construction becomes possible in special cases, e. g., when three pairs of right angles are adjoined where each pair has common vertex, and the three vertices are not collinear.

F. A. Behrend.

Viola, Tullio: Poligoni equivalenti per traslazione. *Periodico Mat.*, IV. Ser. **36**, 310—321 (1958).

C. F. Manara hat (dies. Zbl. **78**, 343) den Begriff der Äquivalenz durch Translation oder T -Äquivalenz eines Paares von Polygonen P, P' eingeführt, die sich derart in eine gleiche endliche Zahl von Teilen zerlegen lassen, daß zwischen ihren Teilen eine ein-eindeutige Korrespondenz hergestellt werden kann, in der die korrespondierenden Teile durch Translation kongruent oder T -kongruent sind. Die notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Polygone P und P' T -äquivalent sind, ist, daß sie beide denselben „vektoriellen Stern“ bezüglich desselben Punktes O haben. Darunter versteht er eine Figur, die aus von einem Punkt O ausgehenden Vektoren besteht, die gleich, parallel und gleichgerichtet den orientierten Seiten eines Polygons sind. Verf. verallgemeinert die Voraussetzung von Manara, indem er zuläßt, daß P und P' auch jedes eine Gruppe von endlich vielen, einander nicht durchdringenden Polygonen bedeute. Er beweist dann den Satz: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß zwei Polygone oder Gruppen von Polygonen P, P' T -äquivalent seien, sind: 1. daß P und P' äquivalent seien, und 2. daß P und P' denselben vektoriellen Stern haben.

M. Zacharias.

Hofmann, Jos. E.: Zur elementaren Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene. *Enseignement math.*, II. Sér. **4**, 178—211 (1958).

Verf. zeigt an zahlreichen Beispielen, daß sich viele Sätze der elementaren Dreiecksgeometrie besonders einfach in Vektorform behandeln lassen, wenn der Umkreismittelpunkt als Bezugspunkt gewählt und der Umkreishalbmesser als Einheit genommen wird. Wird ein Punkt auf dem Einheitskreis durch die komplexe Zahl z dargestellt, so ist sein Spiegelpunkt \bar{z} an der reellen Achse $= 1/\bar{z}$. Diese Gedanken werden vereinfachend auf verschiedene Beispiele angewendet. — Bemerkung des Ref.: S. 209, Anm. 21 muß es heißen Ottajano statt Ottojano.

M. Zacharias.

Bottema, O.: Verschiedenes. *Euclides*, Groningen **34**, 210—215 (1959) [Holländisch].

XXXVIII. Das Problem vom verlorenen Schatz. Jemand will einen Schatz an einem Platz vergraben, der auf komplizierte Weise bestimmt wird, aber von ihm selbst leicht wiedergefunden werden kann: Er merkt sich drei Bäume A, B, C , denkt sich AC um einen rechten Winkel in positiver Richtung gedreht um A bis AC_1 , ebenso BC um B in entgegengesetzter Richtung bis BC_2 und begräbt den Schatz im Mittelpunkt P von C_1C_2 . Bei seiner Rückkehr kann er den Baum C nicht wiederfinden. Wie findet er P ? Verf. beweist sehr einfach, daß P unabhängig von C , nämlich die Spitze des links von AB über AB errichteten rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks ist. — XXXIX. Der Radius des Umkreises eines Simplex. Der Umkreisradius R eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c und dem Inhalt Δ ist bekanntlich $R = \frac{1}{4} a b c / \Delta$. Der Umkugelradius eines Tetraeders mit dem Inhalt V und den Gegenkantenpaaren $a a', b b', c c'$ ist nach der Formel von Crelle-von Staudt $R = \frac{1}{6} T/V$ mit $T = a a' + b b' + c c'$. Für den Umkugelradius R des $n+1$ -Simplex im n -dimensionalen Raum entwickelt Verf. die Formel

$$R^2 = (-1)^n D_{n+1} / 2^{n+1} (n!)^2 V^2,$$

in der D_{n+1} eine gewisse aus den Quadraten $d_{ij} = a_{ij}^2$ gebildete Determinante bedeutet. XL. Das Gleichgewicht von vier Kräften im Raum. Ergebnis: $K_1:K_2:K_3:K_4 = \sin \varphi_{234} : \sin \varphi_{341} : \sin \varphi_{412} : \sin \varphi_{123}$, d. h.: Vier Kräfte im Gleichgewicht sind proportional den Sinus der durch je drei von ihnen bestimmten Dreiflachecken. Ist $OA_1A_2A_3$ eine Dreiflachecke mit den Seiten a_1, a_2, a_3 und den Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, so wird unter $\sin \varphi_{123}$ das Produkt $\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3$ verstanden.

M. Zacharias.

Clement, Paul A.: The concurrency of perpendiculars. Amer. math. Monthly 65, 601—605 (1958).

Das Symbol (K, L, M) soll drei Punkte auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks oder ihrer Verlängerungen bezeichnen. Die Punkte (K, L, M) genügen der Ceva-Bedingung oder der C -Bedingung, wenn die Cevalinien AK, BL, CM sich in einem Punkt C schneiden, der der C -Punkt von (K, L, M) genannt werden soll. Entsprechend sollen die Punkte (K, L, M) der P -Bedingung genügend heißen, wenn sich die in K, L, M auf BC, CA, AB errichteten Lote in einem Punkt P schneiden. Dann gilt der Ceva-Satz: Die Punkte (K, L, M) genügen der C -Bedingung dann und nur dann, wenn $AM \cdot BK \cdot CL = MB \cdot KC \cdot LA$ ist. Entsprechend beweist Verf. den P -Satz oder den „Gefährten“ des C -Satzes: Die Punkte (K, L, M) genügen der P -Bedingung dann und nur dann, wenn $\overline{AM}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CL}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{KC}^2 + \overline{LA}^2$ ist. Ref. bemerkt, daß dieser „Gefährte“ des Cevasatzes schon von Jacob Steiner gefunden worden ist: J. Steiner, Gergonnes Ann. de Math. 19, 37 (1828—1829); Werke 1, 191 (1881—1882). — Weiter beweist Verf. die Sätze: (1) Wenn und nur wenn die Punkte (K, L, M) der P -Bedingung genügen und kollinear sind, so liegt ihr P -Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks. (2) Die Punkte (K, L, M) seien nicht kollinear und genügen der P -Bedingung. Dann schneidet der Umkreis des Dreiecks KLM die Seiten des Dreiecks ABC in (K', L', M') , die der P -Bedingung genügen, und die entsprechenden P -Punkte, P und P' , sind isogonal konjugiert, und der Umkreismittelpunkt halbiert PP' .

M. Zacharias.

Thébault, Victor: Notes de géométrie élémentaire. Mathesis 67, Supplément Nos 9—10, 1—24 (1958).

1. Ungleichungen bezüglich des Dreiecks und des Tetraeders. — Wenn die Cevalinien AD, BE, CF eines Punktes P im Innern eines Dreiecks $T \equiv ABC$ mit den baryzentrischen Koordinaten α, β, γ die Geraden BC, CA, AB in D, E, F treffen, so ist $S = \sum AP/PD \geq 6$. — Wenn die Cevalinien AE, BF, CK, DL eines Punktes P mit den baryzentrischen Koordinaten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in bezug auf ein Tetraeder $T \equiv ABCD$ die Ebenen BCD, CDA, DAB, ABC in E, F, K, L treffen, so ist für einen im Innern von T liegenden Punkt P $\sum AP/PE \geq 12$. —

Weitere Ungleichungen für die Abstände eines Punktes P von den Ecken und den Flächen eines Tetraeders T , die Dieder bezüglich der Kanten von T , die symmetrischen Punkte von P bezüglich der Dieder und die Abstände dieser Punkte von den Flächen von T . — 2. Beziehungen zwischen den Bimedien $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$, die die Mitten der Kanten $BC = a$ und $DA = a'$, $CA = b$ und $DB = b'$, $AB = c$ und $DC = c'$ des Tetraeders $T \equiv ABCD$ verbinden, und den Kanten: $AA_1'^2 = \frac{1}{4}(b^2 - b'^2) = \frac{1}{4}(c^2 - c'^2)$. Genau eine Bimediane kann einer Höhe parallel sein. — 3. Einem Tetraeder zugeordnete Kugeln: (A) , (B) , (C) , (D) seien Kugeln mit den Mittelpunkten A , B , C , D und den Radien a , b , c , d ; (ω, ϱ) ihre Orthogonalkugel; A' , B' , C' , D' Punkte auf (A) , (B) , (C) , (D) und auf einer Kugel (ω', ϱ') , die die ersten unter den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ schneidet. Beziehungen zwischen diesen Größen. — Weitere Noten handeln von gewissen homothetischen Tetraedern bezüglich des Grundtetraeders T , von weiteren bemerkenswerten Tetraedern, von einem Rechteck und zu ihm in Beziehung stehenden gleichseitigen Dreiecken, von den Höhen, Medianen, Symmedianen und Bissektrizen eines Dreiecks und von gewissen besonderen Dreiecken.

M. Zacharias.

Berkes, J.: Bemerkungen zur Arbeit von F. Leuenberger über „Einige Dreiecksungleichungen“. *Elemente Math.* 14, 62—64 (1959).

Die Dreiecksungleichungen von Leuenberger (dies. Zbl. 83, 160) werden folgenderweise verfeinert (ϱ ist der Inkreisradius eines beliebigen Dreiecks mit den Seiten a_i und den Winkeln α_i , h_i sind seine Höhen, $i = 1, 2, 3$):

$$9\varrho \leq 3 \left(\prod_{i=1}^3 h_i \right)^{1/3} \leq \sum_{i=1}^3 h_i \leq 3r \Big/ \sum_{i=1}^3 \sin^2 \alpha_i \leq \frac{9}{2} r.$$

Anstelle von $\sum h_i$, $\prod h_i$ kann man hier $\sum m_i$, $\prod m_i$ oder $\sum w_i$, $\prod w_i$ schreiben (m_i sind die Seitenhalbierenden, w_i die Halbierenden der Winkel des Dreiecks). Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist. *L. Kosmák.*

Schopp, J.: Extremaleigenschaften der Ecktransversalen des n -dimensionalen Simplex. *Elemente Math.* 14, 61—62 (1959).

Seien A_i ($i = 1, \dots, n+1$) die Ecken eines n -dimensionalen Simplex und α_i die entsprechenden gegenüberliegenden Grenzräume. Für einen beliebigen inneren Punkt P des Simplex bezeichne man mit R_i die Strecke $\overline{PA_i}$ und mit d_i die Strecke $\overline{PB_i}$, wo B_i den Schnittpunkt der Gerade PA_i mit α_i bedeutet. Sei ferner $p_i = R_i/d_i$ und $S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} p_{i_1} \cdots p_{i_k}$ ($i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n+1$). Verf. beweist die Ungleichung $S_k \geq \binom{n+1}{k} n^k$; Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn P der Schwerpunkt des Simplex ist.

L. Kosmák.

Seidenberg, A.: A simple proof of a theorem of Erdős and Szekeres. *J. London math. Soc.* 34, 352 (1959).

Betrifft die in diesem Zbl. 12, 270 besprochene Arbeit.

Bernhart, Arthur: Polygons of pursuit. *Scripta math.* 24, 23—50 (1959).

Verf. gibt eine vorzügliche und mit eingehenden Literaturverweisen ausgestattete Übersicht über die verschiedenen Ansätze zur Lösung des von E. Lucas (1877) aufgeworfenen Problems der drei Hunde, die einander von den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks aus nachlaufen, und seine Erweiterungen auf ungleichseitige Dreiecke und auf konvexe Vielecke. Bei dieser Gelegenheit geht Verf. auch auf die Brocardschen Punkte eines Dreiecks, auf die Brocardschen Winkel von Vielecken und auf zahlreiche verwandte Fragestellungen aus dem Bereich der Elementargeometrie ein.

J. E. Hofmann.

Bernhart, Arthur: Curves of pursuit. II. *Scripta math.* 23, 49—65 (1958).

Verf. ergänzt die Studie über die Verfolgungskurve eines Punktes auf gerader Bahn (dies. Zbl. 56, 243) durch eine wiederum mit genauen Literaturangaben ver-

sehene Zusammenstellung über die Verfolgungskurve eines Punktes auf kreisförmiger Bahn.

J. E. Hofmann.

Czwalina, Arthur: Die Geometrie des Ptolemaeus von Alexandria. Enseignement math., II. Sér. 4, 292—299 (1958).

Ptolemäus bedurfte zu seinen Beobachtungen und Berechnungen der sphärischen Geometrie. Es ist im Grunde genommen nur ein einziger Lehrsatz, auf dem diese Geometrie aufgebaut ist, der sich im 13. Kapitel des Werkes des Ptolemäus „Mathematische Syntaxis“ befindet. In moderner Fassung lautet dieser Lehrsatz wie folgt: Ist ABC ein sphärisches Dreieck und schneiden zwei sphärische Ecktransversalen CD und BE einander in Z (Punkt D auf AB und E auf AC), so ist

$$\frac{\sin(C E)}{\sin(E A)} = \frac{\sin(C Z)}{\sin(Z D)} \cdot \frac{\sin(D B)}{\sin(B A)}.$$

Durch scharfsinnige Beweise von fünf Sätzen und einer Aufgabe aus der ebenen Geometrie gibt Verf. den Beweis des obigen Ptolemäischen Lehrsatzes, wobei man leicht die Analogie zum bekannten Satze des Menelaos für die ebene Geometrie erkennt. Ptolemäus rechnete nur mit rechtwinkligen Dreiecken. Andere Dreiecke wurden in rechtwinklige Dreiecke zerlegt oder auf solche zurückgeführt.

E. Stamatis.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Lundberg, G. H.: Transformations of a conic into itself. Math. Mag. 32, 5—17 (1958).

Verf. behandelt projektive Transformationen T_n der Ebene, die von n -ter Ordnung zyklisch sind — $(T_n)^n = E$ — und einen beliebig vorgegebenen Kegelschnitt k invariant lassen. T_2 sind die geläufigen Involutionen, festgelegt durch 2 Punktepaare auf k . Die T_3 ist durch Vorgabe eines beliebigen Zyklus von 3 Punkten auf k bestimmt und leicht konstruierbar. Jeder Vierer-Zyklus besteht aus 2 zueinander konjugierten Punktepaaren auf k , ein beliebiger derartiger Zyklus legt eine T_4 fest. Mit Hilfe der euklidischen Drehung um rationale Teile von 2π , die bekanntlich jeden Kreis um O invariant läßt, wird schließlich bestätigt, daß es T_n beliebiger Ordnung gibt. Es wird dabei allerdings nicht deutlich, daß diese Aussage — wegen der projektiven Äquivalenz — automatisch für alle k gilt. Verf. rechnet vielmehr hierzu nur eine sehr spezielle Koordinatentransformation durch. Die Frage, ob so alle T_n erfaßt sind, wird nicht gestellt. Die zu T_3 und T_4 gegebenen Skizzen sind wenig instruktiv und teilweise falsch.

H. Germer.

Green, H. G. and L. E. Prior: On the projection of a four-point system of conics into a family of circles. Enseignement math., II. Sér. 5, 44—52 (1959).

Si tratta il problema della riduzione, mediante proiezioni, di un fascio reale F di coniche in un fascio reale F' di cerchi (in modo che una prefissata coppia reale di punti-base di F si muti in quella dei punti ciclici del piano sostegno di F'). Perchè il problema sia risolubile occorre e basta che F (come F') non abbia tre o quattro punti-base coincidenti.

V. E. Galafassi.

Matula, Miloš: Eine Anwendung der Mathematik auf das Studium des Schreibens. Pokroky Mat. Fys. Astron. 3, 245—256, 393—401 (1958) [Tschechisch].

Der Prozeß des Schreibens wird unter der Voraussetzung studiert, daß während des Schreibens die Finger eine harmonische Bewegung und die Hand, sowie der Vorderarm eine horizontale gleichmäßige Bewegung ausführen; diese Bewegungen kann man als linear ansehen. Werden die Koordinatenachsen so gewählt, daß x bzw. y mit der Richtung der Bewegung der Hand, bzw. der Finger parallel ist, haben die entsprechenden „graphischen“ Kurven die folgende Parameterdarstellung

$$x = a \cos(mt + \varphi) + ct + d, \quad y = b \cos(nt + \psi) + e,$$

wo m, n natürlich und teilerfremd vorausgesetzt werden können und t ein Intervall

durchläuft. Im ersten Teile der Arbeit werden graphische Elemente, d. h. einfache graphische Kurven, vom Standpunkte ihrer graphischen Vorteilhaftigkeit untersucht. Im zweiten Teile wird die geometrische Theorie der Verbindung der graphischen Elemente dargelegt und es werden im besonderen die Bedingungen der glatten Verbindung formuliert.

L. Kosmák.

Drahos, István, László Hornyik and Miklós Hosszú: Solution of a tool geometrical problem. Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 3, 83—95, russ. und engl. Zusammenfassg. 95—96 (1958) [Ungarisch].

Eine immer wieder auftretende Aufgabe der Werkstättenpraxis verlangt die Ermittlung eines Fräasers, der zur Herstellung einer Schraubnut vorgeschriebener Form geeignet ist. Bezeichne Φ die Schraubnutenfläche und Ψ die von den Schneidkanten des rotierenden Fräasers überstrichene Drehfläche, welche Φ in jedem Augenblick längs einer Linie („Eingriffslinie“) berührt. Die Aufgabe läuft geometrisch im allgemeinen darauf hinaus, eine Drehfläche Ψ mit angenommener Achse b zu finden, die mit der gegebenen Schraubfläche Φ in Linienberührung steht. Ψ ergibt sich mithin im Prinzip als das von Φ bei Drehung um b erzeugte Hüllgebilde. Dem analytischen Lösungsweg der Verff. liegt folgender Gedanke zugrunde: Man greife die einzelnen Schraublagen einer Erzeugenden e von Φ heraus und lasse dieselben um b rotieren; die so entstehende Schar von Drehflächen hüllt dann ebenfalls die Fräserfläche Ψ ein. Für den besonders interessierenden Fall einer geradlinigen Erzeugenden e (Flach- und Trapezgewinde, Evolventen-Schrägzahnrad) wird die Rechnung, die dann im wesentlichen nur die Auflösung einer quadratischen Gleichung erfordert, weiter ausgeführt. Vereinfachungen treten für den Spezialfall des „Fingerfräasers“ ein, dessen Achse b die Schraubachse a unter rechtem Winkel trifft. Das vorliegende Problem ist bereits wiederholt behandelt worden, erstmals wohl von E. Stübler [Z. Math. Phys. 57, 271—279 (1909); 60, 244—274 (1912)], im Anschluß daran in dem bekannten Lehrbuch der darstellenden Geometrie von Th. Schmid Berlin u. Leipzig 1921, Bd. II, S. 281ff.), und später neuerlich von O. Baier [Z. angew. Math. Mech. 14, 248—250 (1934)]. Eine zusammenfassende Darstellung des Ref. [Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 315—326 (1952); 9, 273—280 (1955)] legt sowohl zeichnerische wie rechnerische Methoden dar und berücksichtigt auch die umgekehrte Aufgabenstellung.

W. Wunderlich.

Algebraische Geometrie:

Turri, Tullio: Sui tipi di trasformazioni birazionali involutorie negli iperspazi. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 28, 9—26 (1958).

Dans un espace S_r , on connaît trois types de transformations birationnelles involutives: les involutions de Jonquières, les transformations construites au moyen de r polarités et les transformations construites au moyen d'un système linéaire de dimension r et de degré 2. L'A. montre qu'il existe des transformations birationnelles involutives pour lesquelles on a un système de dimension supérieure à r de surfaces invariantes d'ordre $r + 1$, qui ne sont pas du second type.

L. Godeaux.

Turri, Tullio: Trasformazioni cicliche in S_r . Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 28, 27—32 (1958).

L'A. montre qu'une transformation birationnelle cyclique de S_r est birationnellement identique à une transformation involutive non homographique, ou à une homologie centrale cyclique, ou à un produit d'homologies centrales cycliques permutables, ou au produit d'une transformation involutive non homographique par des homologies centrales cycliques permutables entre elles et avec la première transformation.

L. Godeaux.

Mersch, Jacques: Sur une transformation birationnelle de l'espace. Acad. roy. Belgique, Bull. Ce. Sci., V. Sér. 44, 945—963 (1958).

Si l'on considère sur une quadrique Q , trois génératrices de même système C_1, C_2, C_3 , une surface quartique F passant par ces trois droites coupe encore Q selon une quintique rationnelle C . Les surfaces du 4^e ordre $F + Q$ définissent un faisceau dont la base est formée de C, C_1, C_2, C_3 et d'une octique de genre 9, C_4 , intersection complète de F et d'une autre quadrique. Nous admettons que l'on est dans le cas général où C_4 coupe C en dix points et est bisécante de C_1, C_2, C_3 . Si on considère un point P de l'espace, il définit une surface F' sur laquelle les droites s'appuyant à C_2 et C_3 par exemple, définissent une involution T_1 qui fait correspondre à P un autre point P' . On définit donc à partir de ce faisceau de quartiques une transformation birationnelle et involutive de l'espace que l'A. étudie. Il définit ainsi un système homaloïdal de surfaces du 15^e ordre passant trois fois par C , 11 fois par C_1 et une fois par C_4 et les 36 bisécantes de C_4 s'appuyant à C et C_1, d_i . Le reste de l'intersection de deux de ces surfaces est une courbe caractéristique d'ordre 15. Il détermine également les surfaces fondamentales, les courbes fondamentales de 2^e espèce, les points unis de la transformation et la surface unie qui est d'ordre 10 passant 6 fois par C_1 , 2 fois par C et simplement par C_4 et les droites d_i .

B. d'Orgeval.

Herszberg, J.: A note on a result of Zariski. J. London math. Soc. 33, 478—481 (1958).

Verf. betrachtet wie Zariski (dies. Zbl. 55, 388) eine Folge $\{V_i\}$ von birational äquivalenten und projektiv normalen algebraischen Mannigfaltigkeiten der Dimension $d \geq 2$ mit dem gemeinsamen Funktionenkörper Σ . P_i sei ein Punkt von V_i und $Q(P_i)$ der Quotientenring von P_i . Verf. zeigt: Ist $\Omega = \bigcup Q(P_i)$ in einem Bewertungsring einer s -dimensionalen Bewertung von Σ enthalten und s die kleinste positive Zahl mit dieser Eigenschaft, so gibt es für $s \geq 2$ eine Zahl τ derart, daß das Zentrum der s -dimensionalen Bewertung auf allen V_i mit $i \geq \tau$ s -dimensional wird und eindeutig bestimmt ist.

W. Engel.

Severi, Francesco: Nuove relazioni fra il genere aritmetico d'una ipersuperficie generale A tracciata sopra una varietà algebrica e i generi aritmetici delle varietà caratteristiche di A . Atti. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 26, 3—5 (1959).

Aus der Formel $R = P_a^r + P_a^{r-1} - 1$ für die Dimension R des adjungierten Systems $|A'|$ zu einer genügend allgemeinen Hyperfläche A auf einer irreduziblen singularitätenfreien Varietät M_r (P_a^r und P_a^{r-1} bedeuten die arithmetischen Geschlechtsszahlen von M_r und A), deren allgemeiner Beweis von Kodaira stammt, können weitere interessante Relationen abgeleitet werden; sie sind Verallgemeinerungen von solchen, die für Flächen ($r = 2$) bereits bekannt sind. Insbesondere verweist Verf. mit Nachdruck auf die Möglichkeit eines neuen Beweises für die oben angeschriebene Relation von Severi-Kodaira; dieser müßte auf einem neuen, unabhängigen Nachweis für die Relation $i_r = q_r + q_{r-1}$ beruhen, welche die Anzahl der linear unabhängigen Differentialformen 1. Gattung auf M_r mit den Irregularitäten verknüpft.

W. Gröbner.

Matsusaka, T.: Polarized varieties fields of moduli and generalized Kummer varieties of polarized abelian varieties. Amer. J. Math. 80, 45—82 (1958).

Soit une variété complète V , nonsingulière en codimension un, X_0 un V -diviseur positif, $G_a(V)$ le groupe des V -diviseurs algébriquement équivalents à 0. On désigne par U l'ensemble des diviseurs positifs X tels que, pour deux entiers positifs m et m' , on ait $mX \equiv m'X_0$ modulo $G_a(V)$. L'ensemble V , uniquement déterminé par la donnée d'un de ses éléments, définit une structure sur V qui est appelée „structure de polarisation“ lorsque V contient un diviseur linéairement effectif.

L'auteur étend alors le fait suivant lequel l'ensemble E des variétés projectivement équivalentes à une variété de l'espace projectif forment une famille algébrique de la manière suivante. Soit pour $S \subset V$, $P(V, S)$ l'ensemble des transformées de V par les diverses immersions projectives f_X non dégénérées de V , déterminées par les diviseurs linéairement effectifs X de S . On a alors le théorème suivant (section 7): si V est une variété non singulière de l'espace projectif et L une famille complète de V -diviseurs positifs, algébriquement effectifs, alors on peut munir $P(V, L)$ d'une structure de variété algébrique. L'A. emploie la terminologie d'A. Weil et utilise le résultat de A. Néron sur la finitude du groupe $G(V)/G_a(V)$ pour toute variété V de l'espace projectif, nonsingulière en codimension un. Il rappelle en préambule les notions classiques de spécialisations de cycles, d'équivalences diverses, de familles algébriques de V -diviseurs positifs et de variété de Picard au sens de Néron-Samuel [Ann. Inst. Fourier 4, 1—30 (1959)]. Cet article traite du même sujet qu'un article de l'A., de même titre, paru aux Proc. Japan Acad. 32, 367—372 (1956).
J. Guérindon.

Rosina, B. A.: Sugli spazi lineari contenuti in un'ipersuperficie con un punto multiplo. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 28, 290—321 (1958).

L'A. démontre que sur une hypersurface d'ordre n d'un espace S_r , possédant un point O multiple d'ordre $n - s$, se trouvent au plus trois familles d'espaces linéaires S_k ($k \geq 1$). La première contient les espaces S_k passant par O , la seconde les espaces S_k situés dans les espaces S_{k+1} passant par O . Les conditions pour que ces familles existent sont données, de même que la condition pour qu'il existe une troisième famille. Celle-ci est étudiée en détail.
L. Godeaux.

Godeaux, L.: Sur les involutions cycliques privées de points unis appartenant à une surface algébrique. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 5—12 (1958).

Verf. kommt zu seinem beliebten Thema zurück, d. h. zum Studium der zyklischen Involutionen ohne invariante Punkte auf einer algebraischen Fläche F , von der er diesmal nicht voraussetzt, daß sie regulär ist, jedoch immer die Möglichkeit ausschließt, daß ihr kanonisches und bikanonisches System mittels eines Büschels zusammengesetzt wird. Er studiert weiter die Fläche F' , d. h. die Abbildung der gegebenen Involution. Er kommt zu folgenden Ergebnissen: Enthält die algebraische Fläche F vom arithmetischen Geschlecht $p_a > 0$, deren kanonisches und bikanonisches System nicht mittels eines Büschels zusammengesetzt ist, eine zyklische Involution ohne invariante Punkte von der Ordnung $p < p_a + 1$, so hat ihr kanonisches System p lineare Untersysteme, welche zu der Involution gehören. Diese Untersysteme entsprechen auf F' , wofür p'_a positiv ist, einerseits dem kanonischen System, andererseits $p - 1$ linearen Systemen von der Dimension p'_a . Dasselbe gilt auch dann, wenn $p = p_a + 1$ gilt und die Fläche F' irregulär ist, mit der Abänderung, daß jetzt $p'_a = 0$ ist. Wenn aber $p = p_a + 1$ gilt und F' regulär ist, dann erhält man: Das kanonische System der Fläche F enthält $p - 1$ lineare Untersysteme, welche zu der Involution gehören; das bikanonische System hat p solche Untersysteme. F' hat diesmal kein kanonisches System, dagegen aber ein irreduzibles bikanonisches System. Ausführliche Ergebnisse unterscheiden weiter je nach dem, ob p ungerade oder gerade ist. Für gerades p findet man ein interessantes Resultat, nämlich daß es möglich ist eine algebraische Fläche (F') zu konstruieren, welche kein kanonisches System hat ($p'_g = 0$), aber ihr bikanonisches System einige zweimal gerechnete Kurven enthält. (Vgl. das übernächste Referat).
J. Metelka.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles (addition). Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 44, 942—944 (1958).

Verf. kehrt zu seinem gleichbetitelten Artikel (dies. Zbl. 83, 368) zurück und findet einen kürzeren Beweis für eine darinstehende Behauptung. Der Haupt-

gedanke des Beweises bleibt unverändert, nur die arithmetischen Mittel sind einfacher.

J. Metelka.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces de genres nuls possédant des courbes bicanoniques irréductibles. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 1764—1765 (1959).

Diese kurze Notiz gehört zu der großen Serie von Artikeln des Verf., welche dasselbe Thema behandeln: Die zyklischen Involutionen ohne invariante Punkte und daraus abgeleitete Flächen mit den beiden Geschlechtern Null und mit irreduziblen bikanonischen Kurven (Vgl. dies. Zbl. 83, 368 und die beiden vorstehenden Referate). Durch das wohlbekannte, diesmal aber sehr kurz gefaßte Verfahren wird bewiesen: Sei gegeben eine algebraische Fläche mit $p_a = p_g = 0$, $P_2 = \pi$ ($\pi = 4$ oder 5) und mit einem irreduziblen System von bikanonischen Kurven. Man findet auf der Fläche eine solche isolierte Kurve Γ vom Geschlechte π , daß 2Γ eine bikanonische Kurve ist.

J. Metelka.

Godeaux, Lucien: Sulle superficie algebriche di genere zero e di bigenere uno. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 531—534 (1958).

Si l'on se donne une surface F de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$ et qu'il existe une courbe bicanonique C_2 d'ordre non nul donc elliptique, il existe une courbe tricanonique C_3 ne contenant pas C_2 . Il en résulte l'existence d'un faisceau de courbes 6-canoniques elliptiques comme toutes les pluricanoniques successives. Il y a donc des courbes 5-canonique et 6-canonique ayant une partie commune. De leurs relations mutuelles se déduisent des relations entre C_2 et C_3 . L'étude de ces relations montre l'existence sur F d'un faisceau de courbes C_3 et de deux courbes c_1 et c_2 elliptiques ne se rencontrant pas, dont les triples appartiennent au faisceau $[C_3]$. On en déduit immédiatement les plurigenres $P_2 = 1$, $P_3 = 2 = P_5$, $P_4 = 1$, $P_6 = 3$, $P_{3i} = 3i + 1$, $P_{3i+1} = 3i$, $P_{3i+2} = 3i + 1$. L'A. donne un exemple effectif de surfaces de ce type.

B. d'Orgeval.

Rosina, Bellino Antonio: Sui multilateri sghembi connessi in relazione alla classificazione delle curve algebriche sghembe. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 525—530 (1958).

L'A. expose la méthode qu'il a donné pour obtenir, pour chaque ordre n e genre p , tous les types possibles de multilatères gauches avec $n + p - 1$ sommets de connexion, et desquels le genre p soit compris entre zéro et le maximum possible du genre des courbes gauches algébriques du même ordre n . Il donne les résultats qu'il a obtenus pour les valeurs de $n \leq 7$. — Il démontre que, en général (sauf quelque exception qu'on peut facilement déterminer) les multilatères trouvés sont cas limites de courbes gauches algébriques irréductibles. Il a trouvé aussi, que dans chaque famille et sous-famille de la classification des courbes gauches algébriques il y a, comme cas limites, des multilatères de même ordre et genre des courbes de la famille (ou sous-famille), multilatères dont l'A. a déterminé le nombre et la nature, pour $n \leq 7$. La méthode est illustrée enfin avec un exemple très intéressant, qui s'occupe du cas $n = 7$, $p = 6$.

M. Piazzolla Beloch.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

Pâquet, P. V.: Sur l'utilisation des opérateurs de projections dans l'enseignement de la géométrie vectorielle. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 898—919 (1957).

Verf. empfiehlt, die Studenten sobald wie möglich mit den linearen Operatoren vertraut zu machen und will hier zeigen, wie natürlich und elementar sich die Einführung derselben gestaltet, wenn man sie geometrisch und im Affinen bleibend auf den Projektionsoperatoren aufbaut. Neben dem dreidimensionalen Raum E der Vektoren \vec{v} wird der duale Raum E_* betrachtet, dessen Elemente (covecteurs) \vec{u}_* die geordneten Paare paralleler Ebenen sind. Das skalare Produkt $\vec{u}_* \cdot \vec{v}$ wird geometrisch

dargestellt, wie auch $u_*^1 + u_*^2$ und $k u_*$. Als Projektionsoperator wird die Dyade $(a \bar{b}_*)$ mit $\bar{b}_* \cdot a = 1$ eingeführt. $(\bar{a} \bar{b}_*) \bar{v}$ ist dann die parallel zu den Ebenen von b_* ausgeführte Projektion von \bar{v} auf \bar{a} . Die zu einer Basis $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ von E duale Basis von E_* wird durch die Ebenenpaare definiert, welche den von e_1, e_2, e_3 aufgespannten Spat begrenzen. Es wird auch gezeigt, daß $u_* \cdot v$ in das wie üblich definierte skalare Produkt, die duale Basis in die reziproke übergeht, wenn man jedes Ebenenpaar durch den Normalenvektor ersetzt, dessen Länge der reziproke Wert des Ebenenabstands ist.

E. Schönhardt.

Kervaire, Michel A.: Sur les formules d'intégration de l'analyse vectorielle. Enseignement math., II. Sér. **3**, 126—140 (1957).

By means of elementary methods the author gives precise demonstrations of the theorems of Gauss-Ostrogradski and Stokes in the vector analysis.

Su Buchin.

Trupin, Š.: Zur Frage der Kollinearität und der Komplanarität in einem dimensionslosen Raum. Izvestija Akad. Nauk Latvijisk. SSSR **8** (133), 83—92 (1958) [Russisch].

Let us name the three affinors $A x_1 \dots x_k$, $B y_1 \dots y_l$ and $C z_1 \dots z_m$ coplanar with linear independent vectors $p_1 \dots p_n$, if

$$\begin{bmatrix} k & l & m \\ A x \dots x & B x \dots x & C x \dots x \end{bmatrix} p_1 \dots p_n = 0$$

on condition, that $[p_1 \dots p_n] \neq 0$. The author proves the following theorem. If the affinors $A x_1 x_2$, $B y$ and $C z$ are coplanar with linear-independent vectors $p_1 \dots p_n$, then exist such scalar linear functions $\alpha x y$, $\beta x y z$, $\gamma x y z$ and $\delta_i x y z u$, ($i = 1, \dots, n$), that

$$\alpha x x A x x + \beta x x x B x + \gamma x x x C x + \sum_{i=1}^n p_i \delta_i x x x x = 0.$$

W. Wrona.

Norden, A. P.: Über eine komplexe Darstellung der Tensoren des Lorentz-Raumes. Izvestija vyssh. učebn. Zaved., Mat. **1** (8), 156—163 (1959) [Russisch].

The author considers the correspondence between the biplanar, the complex affine and the Lorenz spaces: B_6, A_3 and L_4 , and shows in what manner the above correspondence can be utilized for investigating the structure of bitensors, i. e. such tensors of Lorenz space, that possess similar properties of symmetry as the curvature tensor.

W. Wrona.

Fierz, M.: Die Anzahl der mit Hilfe von $2l$ Diracschen Spinoren zu bildenden Invarianten. Helvet. phys. Acta **31**, 587—590 (1958).

Verf. leitet mit Hilfe des Van der Waerdenschen Spinorkalküls ganz elementar zuerst ab, daß zwei Spinoren 10 Invarianten geben, welche in Spezialfällen teilweise verschwinden und berechnet dann die Zahl der Invarianten für $2l$ Spinoren auf $N_l = (2l)! 2^{l+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l+1)/l!(l+1)!(l+2)!$.

E. M. Bruins.

Craig, Homer V.: On primary extensors. Tensor, n. Ser. **8**, 196—206 (1958).

The primary extensors relative to a function $F(x, x')$ of the coordinates x^a and their derivatives x'^a with respect to a parameter t are defined as the extensors $F_{;\alpha a} = \partial F / \partial x^{(\alpha) a}$ and $F_{\alpha a} = T_a^{(1-\alpha)}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, M$), subject to the stipulations: $M = 1$, and T_a is the non-vanishing tensor member of $F_{;\alpha a}$. It is also presented a definition of the primary extensors associated with a function $f(x, y_a)$ of the x^a and the components y_a of a covariant tensor, and then proved that if $F(x, x')$ and $f(x, y_a)$ are related by a certain Legendre transformation, then their primary extensors are the same. An immediate conclusion is that the Lagrangian and Hamiltonian equations each express the equality of the same pair of extensors. Examining the first variation of the kinetic-potential expressed as a Legendre transform of the Hamiltonian total energy $h(q, p)$, it is found that it is expressible in two different ways as extensor

constructions one of which leads to the extensor construction of the Lagrangian brackets. In consideration of the possibility of altering the key functions for the Lagrangian equations of motion, one finds that any two linearly independent combinations of kinetic and potential energy may be used as key functions. Finally it is noted in the case of calculus of variations problems with added conditions of the type $G(x, x') = 0$, that $G(x, x')$ is not necessarily indicated as a key function but instead a function of the type $g(t)G(x, x')$ with only the very slight restriction that $g(t)G(x, x') = 0$ and $\dot{G}(x, x') = 0$ define the same set of admissible arcs.

A. Kawaguchi.

Bereis, Rudolf: Kinematik in der Gaußschen Zahlenebene. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 8 (1958/59), 1—8 (1959).

Die Note gibt die Antrittsvorlesung des Verf. an der Technischen Hochschule Dresden wieder und stützt sich sachlich auf zwei frühere Arbeiten (dies. Zbl. 47, 149; 51, 409), deren wesentliche Ergebnisse übersichtlich dargestellt werden. Den Schluß bildet eine neue einfache Konstruktion des Ballschen Punktes bei einem Gelenkviereck allgemeiner Lage.

K. Strubecker.

Bereis, Rudolf: Über sphärische Radlinien. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 7 (1957/58), 841—844 (1958).

Rollt ein Drehkegel auf einem anderen, ruhenden, so durchläuft jeder mitgenommene Punkt eine „sphärische Radlinie“. Verf. zeigt mittels einer komplexen Darstellung, daß sich diese Kurven im Normalriß auf eine zur Rastkegelachse normale Ebene π i. a. als Radlinien 3. Stufe im Sinne der vom Ref. entwickelten Systematik der „höheren Radlinien“ abbilden. (Anm. des Ref.: Im Schrägriß auf π würden sich Radlinien 5. Stufe, im Parallelriß auf eine beliebige Ebene solche 8. Stufe ergeben). Eine Reduktion der Projektionskurven auf gewöhnliche Radlinien (2. Stufe) tritt ein, wenn der mitgenommene Punkt in der Hauptscheitelebene des Gangkegels liegt oder die beiden Kegel kongruent sind (Pascalschnecken). Im Grenzfall des zu einer Ebene abgeplatteten Rastkegels erhält man Parallelkurven von Hypozykloiden. Artet umgekehrt der Gangkegel zu einer Ebene aus, so beschreiben deren Punkte bekanntlich sphärische Böschungslinien (sphärische Kreisevolventen), die im Normalriß als Epizykloiden erscheinen (Blaschke).

W. Wunderlich.

Drăgan, Corneliu: Tenseurs de position et tenseurs-vitesses dans la théorie des mécanismes à coulisse de l'espace. Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 3 (7), Nr. 3/4, 175—184, russ. und französ. Zusammenfassg. 184 (1957) [Rumänisch].

Pour la résolution de l'un des problèmes les plus difficiles de la théorie des mécanismes et des machines, à savoir, celui de la détermination des configurations des chaînes cinématiques et des mécanismes de l'espace, on a utilisé nombre de méthodes, parmi lesquelles la méthode des accélérations réduites d'ordre quelconque (Mangeron, ce Zbl. 78, 137) et une nouvelle méthode tensorielle [D. Mangeron et C. Drăgan, ibid, Nr. 1/2, 151—164 (1957), ce Zbl. 83, 186] semblent d'être les plus récentes. L'A. expose quelques formes tensorielles des équations de mouvement concernant le problème de l'analyse et de la synthèse des mécanismes à coulisse de l'espace.

D. J. Mangeron.

Irimiciuc, N. et Izu Klepper: L'application de la méthode des coordonnées vectorielles cylindriques dans la théorie des mécanismes et machines. I. Bull. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 3 (7), Nr. 3/4, 205—210, russ. und französ. Zusammenfassg. 210 (1957) [Rumänisch].

D. Mangeron and C. Drăgan (this Zbl. 83, 186) have introduced in teaching and research concerning mechanism engineering a new method of reduced accelerations of any order that allows the systematic and general solution of the accelerations of the arbitrary order distribution problem for the spatial mechanisms and the mechanisms moving parallelly to a fixed plane. The authors apply the

“cylindrical vector coordinates method” (s. the next review) to the spatial kinematic of a straight line segment and that of some spatial joint mechanisms.

D. J. Mangeron.

Irimiciuc, N.: La présentation graphique de l'algèbre vectorielle spatiale par la méthode des „coordonnées“ vectorielles cylindriques. Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 3 (7), Nr. 3/4, 195—199, russ. und französ. Zusammenfassg. 199—200 (1957) [Rumänisch].

L'A., proponendo di rappresentare un vettore libero ed un vettore scivolante tramite le scomposizioni apposite di essi in un vettore parallelo ad un piano fisso ed un altro ancora parallelo ad un asse normale sul detto piano, perviene alla risoluzione del problema di riduzione grafica di un sistema di vettori spaziali qualsiasi mediante quello della riduzione dei sistemi di vettori piani. Nel quadro dell'algebra vettoriale operante sui vettori testè ottenuti e detti „coordinate vettoriali cilindriche“ si formulano, tra l'altro, le regole atti ad ottenere i prodotti scalare, vettoriale, misto e vettoriale doppio.

D. J. Mangeron.

Litvin-Sedoj, M. Z.: Quelques relations géométriques concernant les systèmes mécaniques à plusieurs degrés de liberté. Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 4 (8), Nr. 1/2, 85—98, français. Zusammenfassg. 98 (1958) [Russisch].

Ju. F. Moroškin [Doklady Akad. Nauk SSSR 91, 745—748 (1953)] et ensuite D. Mangeron et C. Drăgan [Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 3 (7), Nr. 1/2, 151—164 (1957), ce Zbl. 83, 186], tout en utilisant les méthodes de l'algèbre linéaire, le calcul matriciel ou bien le calcul tensoriel, ont étudié du point de vue des configurations et de la distribution des vitesses les chaînes cinématiques et les mécanismes, constitués par des systèmes de solides rigides à liaisons holonomes et scléronomes. L'A. examine quelques applications de l'algèbre linéaire et du calcul matriciel à la géométrie d'un ensemble de trièdres mobiles. L'exposé est suivi d'exemples concernant la cinématique, la géométrie des mécanismes et, en particulier, le joint de Cardan.

D. J. Mangeron.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● Alexandrow (Aleksandrov), A. D.: Kurven und Flächen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959. 82 S. mit 52 Abb. DM 4,—.

Übersetzung des siebenten Kapitels aus dem Buche des Verf. „Die Mathematik. Ihr Inhalt, ihre Methoden und ihre Bedeutung. Bd. II (Moskau 1956)“. Anschauliche Differentialgeometrie, fast ohne Formeln.

H. Freudenthal.

Mack, Sidney F.: Second derivatives on level surface elements. Amer. math. Monthly 65, 758—760 (1958).

Euler untersuchte die Krümmung einer Kurve auf einer Fläche $z = z(x, y)$. Verf. nimmt nun an, daß die Fläche durch eine implizite Gleichung $F(x, y, z) = \text{const.}$ gegeben, das Koordinatensystem aber so gewählt sei, daß die Flächennormale im betreffenden Punkt P in die z -Richtung fällt. Die Normalkrümmung, die geodätische Windung der Flächenstreifen, die in der x - bzw. y -Richtung durch P gehen sowie die mittlere Krümmung der Fläche in P werden durch die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von F ausgedrückt.

D. Roether.

Marcus, Froim: Sur les surfaces dont les courbes asymptotiques d'un système sont centro-affine équivalentes. Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 4 (8), 39—44, russ. und français. Zusammenfassg. 44 (1958) [Rumänisch].

L'A. détermine les surfaces dont la propriété est d'avoir une famille de courbes asymptotiques formée par des courbes centro-affines équivalentes. Dans ce cas on peut démontrer que la famille formée par les autres a la même propriété. Les surfaces en question sont des surfaces minima centro-affines.

Gh. Th. Gheorghiu.

Hsiung, Chuan-Chih: Some global theorems on hypersurfaces. *Canadian J. Math.* **9**, 5—14 (1957).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung von Ergebnissen der Arbeit von H. Hopf, K. Voss (dies. Zbl. **48**, 153) auf Hyperflächen. Verf. erhält u. a. den folgenden Satz: V, V^* seien zwei geschlossene orientierbare n -dimensionale Mannigfaltigkeiten der Klasse C^2 im $(n+1)$ -dimensionalen euklidischen Raum E^{n+1} ($n+1 \geq 3$). Es existiere eine eindeutige reguläre Abbildung f der Klasse C^1 von V auf V^* mit folgenden Eigenschaften: a) f ist Orientierungstreu, b) für jeden Punkt $P \in V$ ist die Gerade durch P und $f(P)$ parallel zu einer festen Richtung, c) für jeden Punkt $P \in V$ haben V und V^* in P und $f(P)$ die gleiche erste mittlere Krümmung, d) V und V^* besitzen keine zylindrischen Elemente, deren Erzeugende parallel zu der festen Richtung sind. Dann können V und V^* durch eine Translation ineinander übergeführt werden.

W. Rinow.

Voss, K.: Über geschlossene Weingartensche Flächen. *Math. Ann.* **138**, 42—54 (1959).

A surface in ordinary Euclidean space is called a Weingarten surface or simply a W -surface, if the Gaussian and mean curvatures of the surface at each point are dependent of each other. Suppose that an analytic surface contains an umbilical point O and other points besides umbilical points; and that $\lim (H - H_0)/\sqrt{H^2 - K} = \lambda$ exists at O , where H_0 is the mean curvature of the surface at O . Then the umbilical point O is said to be elliptic, parabolic or hyperbolic according as $\lambda < 1$, $\lambda = 1$ or $\lambda > 1$. The author first deduces the following Theorem 1, the main theorem in the paper, from the following Theorems 2 and 3; and then proves the last two theorems. Theorem 1: The only analytic closed W -surfaces homeomorphic to spheres are surfaces of revolution. Theorem 2: Let F be an analytic W -surface containing not only umbilical points, and O an umbilical point of the parabolic type on F . Then on F through O there is a regular curve Γ , which contains only umbilical points and all the umbilical points of F in the neighborhood of O . Furthermore, along Γ the limits of the two principal directions of F exist and are tangent and orthogonal to Γ respectively. Theorem 3: If O is an umbilical point of the hyperbolic type on an analytic W -surface F , then F is a surface of revolution with its normal at O as the axis of revolution.

C. C. Hsiung.

Nitsche, Johannes C. C.: On an estimate for the curvature of minimal surfaces $z = z(x, y)$. *J. Math. Mech.* **7**, 767—769 (1958).

The author proves the following inequality on minimal surface solutions $z = z(x, y)$ of class C_2 in the disc $x^2 + y^2 < R^2$: Let K_0 be the Gaussian curvature of the surface at the origin, then $|K_0| \leq \frac{49}{4} R^{-2}$. This inequality includes the inequality originally proved by E. Heinz (this Zbl. **48**, 154) and is similar to the one derived by E. Hopf (this Zbl. **51**, 126). The author's estimate is based on his earlier work on harmonic mappings [*Proc. Amer. math. Soc.* **9**, 268—271 (1958)]. The question of the best constant in the estimate remains open.

Y. W. Chen.

Osserman, Robert: An analogue of the Heinz-Hopf inequality. *J. Math. Mech.* **8**, 383—385 (1959).

In this paper the author proves the following theorem, which is analogous to a result of E. Heinz (this Zbl. **48**, 154) and E. Hopf (this Zbl. **51**, 126). Let S be a simply-connected portion of a minimal surface, and assume that there is some fixed direction in space and a number $\alpha > 0$ such that every normal of S makes an angle at least α with the fixed direction. Let p be any point of S , and s the geodesic distance from p to the boundary of S . Then the Gaussian curvature K of S at p satisfies $|K| \leq h(s, \alpha)$, where h is independent of the particular surface S , but only dependent of the numbers s and α . In particular, we may have

$$h(s, \alpha) = (2s^{-1} \cot \frac{1}{2} \alpha \csc^2 \frac{1}{2} \alpha)^2.$$

Furthermore, if the normal of S at p makes an angle ω with the fixed direction, then

$$|K| \leq [(R^2 - r^2)/s]^2 \cdot [2(1 + R^2)/R(1 + r^2)]^2,$$

where $R = \cot \frac{1}{2} \alpha$ and $r = \cot \frac{1}{2} \omega$.

C. C. Hsiung.

Saban, Giacomo: *Nuovo caratterizzazioni della sfera*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 25, 457—464 (1959).

Let ϱ , τ and s respectively be the radius of curvature, torsion and arc length at a point of a curve in an ordinary Euclidean space. It is proved that for any closed curve C on a sphere (*) $I_n \equiv \int_C \varrho^n \tau ds = 0$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Conversely, if (*) holds for an arbitrary given nonnegative value of n and every closed curve C on a surface S , then S is either a sphere or a plane. C. C. Hsiung.

Suñ, Ché-šén (Khe-shen): On the rigidity of an unclosed surface of non-negative curvature in the case of a non-orthogonal bushing linkage. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 229—232 (1958) [Russisch].

Let S be a truncated ovaloid with n openings L_1, L_2, \dots, L_n which are circles. Consider the case $n = 1$ for example; let the contour of the opening L be filled in by means of a certain immovable body (or bush) whose surface Σ always keeps contact with S along L . Denoting by \mathbf{U} the vector of displacement of a point on S and by $\vec{\nu}$ the normal vector of Σ at a point, we call $\mathbf{U} \cdot \vec{\nu} = 0$ (on L) the condition of the bushing linkage. If θ denotes the angle between the principal normal of L and the exterior normal of S at a point of L , and τ denotes a constant angle between $\vec{\nu}$ and the binormal of L , then a sufficient condition in order that S should be rigid is found to be

$$\max_L \theta - \pi \leq \tau \leq \pi - \arctan(\max_L \tan \theta + 2 \tan \omega_0),$$

where $\omega_0 = \min \omega$ and ω denotes the angle between the axis of revolution of the circle L and the radius vector of S , the origin being taken on the axis. In the case of n circles assume that the axes of revolution of these circles are concurrent in a point (taken for the origin); the author has carried out sufficient conditions as follows:

$$\max [0, (\max_{L_i} \theta_i - \pi)] \leq \tau_i \leq \pi - \max [\omega_i, \arctan(\max_{L_i} \tan \theta_i + 2 \tan \omega_i)]$$

($i = 1, 2, \dots, n$). A similar condition is given for the case where one part of the contours is composed of plane curves instead of circles.

Su Buchin.

Drăgilă, Pavel: Transport parallèle distancié. Bull. Sci. math., II. Sér. 82, 59—67 (1958).

Seien S, \bar{S} Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum, $\{k, k'\}$ ein Kurvennetz auf S , und die Bijektion $\varphi: S \rightarrow \bar{S}$ sei so beschaffen, daß die Tangentialvektoren an die k parallel zu ihren Bildern sind. Verf. benutzt eine von Myller stammende, anschaulich formulierte Verallgemeinerung der Parallelverschiebung von Levi-Civita (Ann. sci. Univ. Jassy 13): Aus Bedingungen für die in diesem Sinne kovarianten Ableitungen der Tangentialvektoren an die $k, k', \varphi k, \varphi k'$ werden Eigenschaften der k, k' , der Netze $\{k, k'\}$ oder ihrer Bilder φk usw. hergeleitet. Wenn z. B. die Bilder der Tangentialvektoren an die k längs der $\varphi k'$ zueinander „parallel“ sind, so ist $\{k, k'\}$ ein Netz von Konjugierten.

K. Legrady.

Backes, F.: Sur une question relative aux système triples orthogonaux. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 63—65 (1957).

L'A. en introduisant trois fonctions auxiliaires transforme le système aux dérivées partielles qui exprime l'intégrabilité d'une famille continue ∞^3 de trièdres orthogonaux, de façon qu'il puisse appliquer un théorème d'existence de Darboux et déduire le nombre de fonctions et de variables arbitraires qui déterminent l'intégrale.

J. Teixeira.

Jha, P.: On the characteristic equation of a rectilinear congruence. Math. Student 26, 9—16 (1958).

Sind zwei binäre quadratische Formen gegeben, deren eine das Linienelement der Einheitskugel darstellt, so läßt sich die Konstruktion des zugehörigen Strahlensystems auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen, die aus den beiden Differentialformen durch ein Eliminationsverfahren hervorgeht. Diese „charakteristische“ Differentialgleichung vereinfacht Verf. durch Wahl von geographischer Länge und Breite als Parameterlinien auf der Einheitskugel und durch Wahl der (reellen) Mittenfläche des Strahlensystems als Leitfläche. Sodann gelingt die Integration der charakteristischen Gleichung in gewissen Spezialfällen und damit auch die Konstruktion der entsprechenden Strahlensysteme. Insbesondere ergeben sich Strahlensysteme, für welche das Produkt der Abstände, Brenn- und Grenzpunkte, konstant ist.

M. Pinl.

Strubecker, Karl: Über Komplexflächen bei euklidischen Schraubungen. Monatsh. Math. 62, 297—323 (1958).

Aus gegebenem Anlaß kommt Verf. auf gewisse Ergebnisse seiner zusammen mit A. Frey entwickelten Transformationstheorie des Schraubtangentenkomplexes zurück (dies. Zbl. 56, 405). Der quadratische Bahntangentenkomplex \mathfrak{K} einer euklidischen Schraubung mit der Achse z und dem Parameter 1 gestattet eine dreigliedrige Gruppe \mathfrak{G}_3 von reellen Affinitäten $x' + i y' = (\alpha + i \beta)(x + i y)$, $z' = z + \gamma$, die sich aus Schraubungen um z und axialen Streckungen von z aus zusammensetzen lassen. Jede Verlagerung $P \rightarrow P'$ eines Punktes kann (i. a.) durch eine Affinität $\mathfrak{S} \in \mathfrak{G}_3$ bewirkt werden und zieht damit eine entsprechende Verlagerung $Q \rightarrow Q' = \mathfrak{S} \cdot Q$ jedes weiteren Punktes nach sich, wobei wegen der Kommutativität von \mathfrak{G}_3 die beiden Anfangslagen P, Q und die beiden Endlagen P', Q' durch dieselbe Affinität $\mathfrak{T} \in \mathfrak{G}_3$ verknüpft sind. Durchläuft P insbesondere eine Komplexkurve k (deren sämtliche Tangenten \mathfrak{K} angehören), so beschreibt Q gleichfalls eine Komplexkurve, nämlich $\mathfrak{T} \cdot k$ („Komplexschiebung“). — Betrachtet werden in der Folge ausschließlich die speziellen Komplexkurven

$$k_m: x + i y = (1 + i \alpha)^m (x_0 + i y_0), \quad z = z_0 + m \alpha,$$

die im Normalriß auf die (x, y) -Ebene als Sinusspiralen vom Index $-m$ erscheinen; für $m = 1$ stellen sich die Komplexstrahlen selbst ein. Die Bahntangenten der Punkte von k_m umhüllen eine k_{m+1} , umgekehrt erfüllen die Gratpunkte der Tangenten einer k_{m+1} eine k_m . Analoge Beziehungen gelten für die dualen Gebilde, die Komplextorsen k_m^* , die als Gratlinie eine k_{2-m} haben und mit den k_m durch die Polarität \mathfrak{P} am Paraboloid $z = x y$ zusammenhängen; die Torse k_m^* ist auch die Einhüllende der Bahnschmiegebenen einer k_{-m} . — Untersucht werden ferner die „Komplexflächen“

$$\Pi_{m,n}: x + i y = (1 + i \alpha)^m (1 + i \beta)^n (x_0 + i y_0), \quad z = z_0 + m \alpha + n \beta,$$

sowie die dazu dualen „Komplexmannigfaltigkeiten“ $\Pi_{m,n}^*$, deren Ebenen eine $\Pi_{1-m,1-n}$ einhüllen. Die auf einer $\Pi_{m,n}$ verlaufenden Komplexkurven k_m ($\beta = \text{const}$) und k_n ($\alpha = \text{const}$) bilden ein konjugiertes Netz und hüllen gemeinsam die durch $\alpha = \beta$ erklärte k_{m+n} ein, die für $m \neq n$ eine Rückkehrkante und für $m = n$ eine reguläre Schmieglinie darstellt; die Fläche kann durch Komplexschiebung einer k_m längs einer k_n oder umgekehrt erzeugt werden. Für $n = 1$ erhält man insbesondere die Tangentenfläche $\Pi_{m,1}$ einer Komplexkurve k_{m+1} . — Die Schraubtangenten der Punkte einer $\Pi_{m,n}$ bilden eine Strahlkongruenz, deren Torsen von dem erwähnten konjugierten Netz der k_m und k_n auf der Fläche herrühren; die zugehörigen Gratlinien k_{m+1} und k_{n+1} erfüllen die beiden Brennflächen $\Pi_{m+1,n}$ und $\Pi_{m,n+1}$ usw. Mit $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ gelangt man schließlich zu ergänzenden Aussagen über die kürzlich von R. Bereis und H. Brauner (dies. Zbl. 78, 346) untersuchte Kongruenz der das hyperbolische Paraboloid $x y = z$ berührenden Schraubtangenten: Es handelt

sich dabei um die Bahntangenten der Punkte einer Komplexfläche 4. Ordnung und 9. Klasse $\Pi_{-1/2,1/2}$, deren Brennflächenpaar von dem genannten Paraboloid $\Pi_{1/2,1/2}$ und einer weiteren, in \mathfrak{P} autopolaren Komplexfläche $\Pi_{-1/2,3/2}$ (9. Ordnung und Klasse) geliefert wird; die in der Kongruenz enthaltenen Torsen $\Pi_{-1/2,1}$ und $\Pi_{1,1/2}$ haben Kurven 4. Ordnung $k_{1/2}$ auf dem Paraboloid bzw. Kurven 16. Ordnung $k_{3/2}$ auf der anderen Brennfläche zu Gratlinien.

W. Wunderlich.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Svoboda, Karel: Sur une classe de surfaces sphériques dans un espace à courbure constante. Czechosl. math. J. 8 (83), 399—444, russ. Zusammenfassg. 444—447 (1958).

Le Mémoire est consacré à l'étude d'une classe de surfaces, qui se trouvent plongées dans un espace à $n + 1$ dimensions à courbure constante et qui jouissent de la propriété que, dans un point quelconque de la surface, les indicatrices de courbure normale, en nombre de $m - 1$, sont des circonférences, dont les centres se confondent avec les traces des perpendiculaires menées par les points de la surface aux plans des circonférences en question. Après avoir fait des recherches relatives à l'existence et la généralité, on donne les propriétés fondamentales des surfaces considérées et on déduit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de l'espace projectif à $n + 1$ dimensions puisse être définie comme une surface d'un espace à courbure constante qui jouit des propriétés métriques mentionnées. Ces conditions sont examinées à la base de la relation existant entre les surfaces considérées et les surfaces minima d'un espace à n dimensions à courbure constante, dont les indicatrices de courbure normale, en nombre de $m - 1$, sont des circonférences.

W. Wrona.

Kručovič (Kruechkovich), G. I. and Gu Čao-chao (Ku Chao-hao): The semi-reducibility criterion for homogeneous Riemannian spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 1183—1186 (1958) [Russisch].

Let us consider the proper Riemann ($ds^2 > 0$) homogeneous space V_n with a continuous group of motions G_r , and a stationary sub-group H of a given point M . Let us assume that H , considered as a group of rotations in Euclidean tangent space E_n of the point M is decomposed into the direct product of two sub-groups: $H = H_0 \times H_1$ applied respectively to planes E_q and E_{n-q} , which are obviously, mutually orthogonal. The purpose of the paper is to establish in what measure the above decomposition of the stationary group H results in the stratification of the space V_n into mutually complementary orthogonal surfaces V_q and V_{n-q} .

W. Wrona.

Nagano, Tadashi: Sur des hypersurfaces et quelques groupes d'isométries d'un espace riemannien. Tôhoku math. J., II. Ser. 10, 242—252 (1958).

The paper deals with the problem: Given a Riemannian manifold M , on which a field normal to a hypersurface B is a Killing field, what restrictions does this impose on the manifold, especially on its group of isometries? If B is complete, it is shown that M is then also complete, and the group of isometries generated by normal Killing fields is at most of dimension 1. The group of isometries of M is locally the product of the group generated by the Killing field and the group of isometries leaving B invariant, if M is compact, or also if the vector are of constant length.

H. Guggenheimer.

Havlíček, Karel: Übersicht über die Grundbegriffe aus der Geometrie der gekrümmten Räume. Pokroky Mat. Fys. Astron. 3, 639—659 (1958) [Tschechisch].

Dans ce Mémoire l'A. passe en revue les notions connues de la géométrie différentielle des espaces à connexion (vecteur, tenseur, connexion, symboles de Christoffel, tenseur de courbure, dérivation covariante et absolue, lignes géodésiques, parallélisme des vecteurs). En appliquant les notions en question il donne une explication élémentaire

taire de l'interprétation géométrique du parallélisme des vecteurs sur une surface de l'espace euclidien à trois dimensions.

K. Svoboda.

Hlavatý, Václav: The holonomy group. I: The curvature tensor. *J. Math. Mech.* 8, 285—307 (1959).

This paper is the introductory part of a series of papers which will be published later. It deals with the following problem: to determine the affine connections having a given curvature tensor. In order to give a tensorial form to the problem the author makes use of an auxiliary connection ${}^0\Gamma$. The solution, when it exists, depends upon a tensor $Y_{\omega\mu\lambda}^{\nu}$ symmetric in ω, λ whose skew-symmetric part in ω, μ represents the difference between the given tensor and the curvature tensor of ${}^0\Gamma$ and can be obtained by what the author calls "elementary algebraic methods" that is to say by the methods of solving either a system of algebraic equations or a completely integrable system of partial differential equations (of the first order) by means of power series. Then, conditions are studied in order that the problem should admit metric connections among the solutions. Applications are given to some particular transformations of a riemannian connection called general, special and restricted minimal-geodesic.

T. Hangan.

Wakakuwa, Hidekiyo: On Riemannian manifolds with homogeneous holonomy group $Sp(n)$. *Tôhoku math. J.; II. Ser.* 10, 274—303 (1958).

The manifolds in question possess two (and consequently three) independent Kähler structures. The geometry of these spaces is studied, and the known properties of Kähler manifolds are used to obtain stronger results for these special cases, e. g. the odd-dimensional Betti numbers are $\equiv 0 \pmod{4}$, the even dimensional Betti numbers are $\geq \binom{r+2}{r}$ in dimension $2r$. [The decomposition theorem 10.3 may be somewhat improved to give relations between the different ε_p 's].

H. Guggenheimer.

Auslander, Louis: On the sheeted structure of compact locally affine spaces. *Michigan math. J.* 5, 163—168 (1958).

Soit Γ le groupe d'holonomie d'une variété M^n compacte, à connexion affine localement euclidienne, complète. On sait alors qu'on peut identifier M^n à l'espace quotient A^n/Γ de l'espace euclidien affine A^n , où opère Γ . Soit T le noyau de l'homomorphisme canonique de Γ sur le groupe d'holonomie homogène $h(\Gamma)$ de M^n . T est un groupe abélien de translations, ayant un nombre fini $s \geq 1$ de générateurs libres. Soit p_* la projection de A^n sur A^{n-s} suivant la direction de l'espace vectoriel engendré par les générateurs de T . Soit X l'espace quotient de A^n/Γ et de l'équivalence définie par: $m_1, m_2 \in A^n/\Gamma$ sont équivalents si les Γ -classes m_1, m_2 contiennent des éléments \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 ayant la même projection, $p_*(\tilde{x}_1) = p_*(\tilde{x}_2)$. L'A. montre que: Si le groupe $h(\Gamma)$ ne contient pas des éléments d'ordre fini, alors X admet une structure de variété compacte à connexion affine localement euclidienne et le groupe fondamental de X est isomorphe à $h(\Gamma)$. De plus, M^n admet une structure fibrée sur X ayant le tore T^s comme fibre. Ces résultats sont ensuite généralisés dans le cas où $h(\Gamma)$ contient d'éléments d'ordre fini et on montre que cette conjecture peut se présenter.

C. Teleman.

Auslander, L. and L. Markus: Flat Lorentz 3-manifolds. *Mem. Amer. math. Soc.* Nr. 30, 60 p. (1959).

Le but de ce mémoire est la détermination des variétés compactes M^3 à connexion affine localement euclidienne, complète, dont les groupes d'holonomies homogènes H appartiennent à la composante connexe de l'unité du groupe pseudo-orthogonal et sont des groupes abéliens. On montre que ces variétés M^3 s'obtiennent de l'espace affine A^3 en considérant les classes de transitivité d'un groupe π_1 de l'un des types suivants: 1. Type elliptique; le groupe H est engendré par un seul générateur et π_1 est l'un des groupes d'holonomie d'un espace métrique localement euclidien.

dien, orientable et compact. 2. Type hyperbolique; le groupe H est engendré par un seul générateur, tandis que π_1 est engendré par les affinités: $t' = pt$, $x' = x/p$, $y' = y + 1$; $t' = t + 1$, $x' = x + 1$, $y' = y$; $t' = t + (a + p - 1)/b$, $x' = x + (a + 1/p - 1)/b$, $y' = y$; où $p > 1$ et $k = p + 1/p$, a, b sont des nombres entiers tels que: $k \geq 3$, $b \geq 1$, $1 \leq a \leq b$ et $(k - 2)(a - 1) + a^2$ est divisible par b . L'espace A^3/π_1 est désigné par $M_k^3(a, b)$. 3. Type parabolique. Cas a), le groupe H engendré par un seul générateur. Le groupe π_1 est engendré par les transformations $t' = t + x + y$, $x' = x + y$, $y' = y + 1$; $t' = t$, $x' = x + \beta$, $y' = y$; $t' = t + \beta/k$, $x' = x$, $y' = y$; où $\beta > 0$ et k est un entier positif. L'espace A^3/π_1 est désigné par $M_{k\beta}^3$. Cas b), le groupe H est engendré par un nombre fini de générateurs, plus grand que 1. π_1 est engendré par les transformations $t' = t + x + y$, $x' = x + y$, $y' = y + 1$; $t' = t + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda(\lambda + 1)y$, $x' = x + \lambda y + s$, $y' = y + \lambda$; $t' = t + \eta/k$, $x' = x$, $y' = y$; où λ est un nombre réel irrationnel, $\eta = s - \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1) \neq 0$ est réel et k est un entier positif. Dans ce cas H est isomorphe à $Z \times Z$. Soit $M_k^3(\lambda, \eta) = A^3/\pi_1$. Le type elliptique contient 5 classes d'espaces, chaque classe contenant des variétés M^3 différant par une constante et deux variétés appartenant à des classes différentes n'ayant pas le même type homotopique. Deux variétés $M_{k_1}^3(a_1, b_1)$, $M_{k_2}^3(a_2, b_2)$ ayant $k_1 \neq k_2$ ont des types d'homotopie différents. Deux variétés $M_{k_1\beta_1}^3$, $M_{k_2\beta_2}^3$ sont applicables l'une sur l'autre par un homéomorphisme différentiable si $k_1 = k_2$; si $k_1 \neq k_2$, $M_{k_1\beta_1}^3$, $M_{k_2\beta_2}^3$ ont des types homotopiques différentes. On a un résultat analogue pour deux variétés $M_k^3(\lambda, \eta)$. Les espaces du cas elliptique ont le tore T^3 comme espace de recouvrement. $M_{1\beta}^3$ et $M_1^3(\lambda, \eta)$ recouvrent les variétés du type parabolique.

C. Teleman.

Otsuki, Tominosuke: Note on homotopies of some curves in tangent bundles. Math. J. Okayama Univ. 7, 191—194 (1957).

In seinen früheren Untersuchungen führte Verf. den Begriff der α -Kurven (dies. Zbl. 81, 382) in die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten \mathfrak{X} ein. Jetzt wird der folgende Satz bewiesen: Sind zwei α -Kurven zueinander homotop und ist $\dim \mathfrak{X} \geq 3$, so sind diese α -Kurven zueinander auch α -homotop.

A. Moór.

Otsuki, Tominosuke: Note on curvature of Finsler manifolds. Math. J. Okayama Univ. 8, 107—116 (1958).

Certain global theorems of Riemannian geometry were generalized to Finsler geometry by L. Auslander (this Zbl. 66, 162). In particular, it was shown that: a complete n -dimensional Finsler manifold whose mean curvature $M \geq e^2$, is compact and has a diameter less than or equal to π/e . The present paper is devoted to a critical appraisal of Auslander's definition of M as well as of his method of proof. The author re-defines M and proves the theorem again by means of an alternative approach to the theory of the second variation of the length integral. Since this work is expressed entirely in the terminology of the author's theory of affine connections of the space of tangent directions of a differentiable manifold (this Zbl. 81, 382), his comparisons with Auslander's definitions and results are not immediately obvious.

H. Rund.

Laptev, G. F.: Hypersurface in the space of projective connection. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 41—44 (1958) [Russisch].

In that paper is constructed the differential geometry of a hypersurface in multi-dimensional space of projective connection with curvature and torsion. The attention is focussed on such objects, that generalize the fundamental notions of projective differential geometry of an ordinary surface. The constructions are made on the basis of the group-theoretical method and are of invariant character. Due to this they apply to hypersurfaces in spaces of Riemann, Weyl and also of affine connection.

W. Wrona.

Svejkin (Shveikin), P. I.: Invariant constructions on m -dimensional surface in n -dimensional affine space. Doklady Akad. Nauk SSSR **121**, 811—814 (1958) [Russisch].

The author considers the sequence of fields of fundamental objects on m -dimensional surface in the n -dimensional affine space. It is known that a field with an arbitrary generating object can be included in a field of fundamental object of sufficiently high order. The purpose of the paper is the construction and investigation of such inclusions. In the paper the author makes use of the invariant group method of G. F. Laptev.

W. Wrona.

Yano, Kentaro: Affine connexions in an almost product space. Kōdai math. Sem. Reports **11**, 1—24 (1959).

The problem studied in this paper is connected with the almost complex structures and generalizes the notion of a paracomplex structures. Given two complementary distributions of tangential elements, of dimensions p and q respectively, and let be B_{α}^{λ} and C_{β}^{λ} the respective projection tensors, then $F_{\alpha}^{\lambda} = B_{\alpha}^{\lambda} - C_{\alpha}^{\lambda}$ satisfies $F_{\alpha}^{\lambda} F_{\lambda}^k = +A_k^{\lambda}$. The non-holonomic frame defined by the distributions is $A_{\beta}^{\lambda} = (B_{\beta}^{\lambda}, C_{\beta}^{\lambda})$. The equivalent of the Nijenhuis tensor will be the object $\Omega_{\gamma\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}(\theta_{\gamma} A_{\beta}^k - \theta_{\beta} A_{\gamma}^k) A_k^{\alpha}$. All integrability conditions for one or both the distributions may be expressed as properties of $\Omega_{\gamma\beta}^{\alpha}$. Affine connections are introduced for a multitude of special cases, expressing special properties of the non-holonomic structure on the manifold. These properties are then related to a structure tensor.

H. Guggenheimer.

Lelong-Ferrand, Jacqueline: Sur les champs de vecteurs définissant un groupe d'homéomorphismes d'une variété différentiable. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 1491—1493 (1957).

L'A. s'occupe des conditions dans lesquelles une transformation infinitésimale $X = \xi^i \partial/\partial x^i$ définie par un champ ξ de vecteurs de classe C_1^0 (c_1^k classe des fonctions admettant des dérivées lipschitziennes d'ordre k) sur une variété V_n de classe C_1^1 correspond à un groupe global à un paramètre d'homéomorphismes de V_n . $r(x)$ étant une fonction positive de classe C_1^0 telle que l'ensemble $E_R = \{x | x \in V_n, r(x) \leq R\}$ soit compact et $X r(x)$ étant l'une des valeurs d'adhérence au point $\varepsilon = 0$ du rapport

$$\varepsilon^{-1} [r(x^1 + \varepsilon \xi^1, \dots, x^n + \varepsilon \xi^n) - r(x^1, \dots, x^n)]$$

on fait la notation

$$\theta_s(u) = \sup_{r(x)=u} |X r(x)|, \quad \theta_i(u) = \inf_{r(x)=u} |X r(x)|.$$

Parmi les résultats annoncés, citons: Pour que ξ définisse un groupe global de transformations de la variété V_n sans bord a) il suffit que l'intégrale $\int_R^{\infty} \frac{du}{\theta_s(u)}$ diverge quel que soit R ; b) s'il existe une valeur u_0 telle que pour $r(x) > u_0$ les nombres $X r(x)$ gardent un signe constant, il est nécessaire que l'intégrale $\int_R^{\infty} \frac{du}{\theta_i(u)}$ diverge, quel que soit $R > u_0$. Comme application de ce théorème on déduit que toute transformation infinitésimale conforme ξ à divergence bornée sur une V_n riemannienne complète correspond à un groupe global de transformations conformes. T. Hangan.

Lelong-Ferrand, Jacqueline: Sur les transformations infinitésimales d'une variété différentiable, considérées comme des opérateurs hilbertiens. C. r. Acad. Si., Paris **245**, 1585—1588 (1957).

Etant donné un champ de vecteurs ξ sur une variété V_n à bord régulier munie d'une mesure $d\tau$, on lui associe des opérateurs dans l'espace de Hilbert H des fonctions de carré sommable et dans l'espace H_p^q (si V_n est riemannienne) des tenseurs p fois

covariants et q fois contrevariants de carré scalaire sommable sur V_n . Dans ce cadre, sous des conditions faibles de régularité, l'A. donne des conditions nécessaires et suffisantes afin que ξ , supposé à divergence bornée, définisse un groupe global à un paramètre d'homéomorphismes de V_n et applique ses résultats aux transformations infinitésimales isométriques et conformes d'une V_n riemannienne. Les méthodes d'analyse fonctionnelle permettent de même de donner des conditions nécessaires et suffisantes afin que ξ définisse sur V_n , supposée riemannienne, un groupe compact d'isométries à un paramètre. La note ne contient aucune démonstration (v. le rapport ci-dessous).
T. Hangan.

Lelong-Ferrand, Jacqueline: Application des méthodes de Hilbert à l'étude des transformations infinitésimales d'une variété différentiable. Bull. Soc. math. France 86, 1—26 (1958).

Soit un champ de vecteurs ξ , sur une variété différentiable V^n . Les problèmes que l'A. se propose à résoudre sont les suivantes: 1. A quelles conditions doit satisfaire le champ ξ pour que la transformation infinitésimale $X_\xi = \xi^i \partial/\partial x^i$, définie par ce champ, corresponde à un groupe global de transformation de V^n ? 2. A quelles conditions doit satisfaire le champ ξ pour que la transformation infinitésimale associée X_ξ définisse un groupe compact à un paramètre? 3. A quelles conditions doit satisfaire le champ ξ pour que l'opérateur associé X_ξ donne lieu à une décomposition „forte“ (analogue à celle de Kodaira) de l'espace des fonctions, ou, plus généralement des tenseurs, de carré sommable sur V^n ? Les méthodes employées sont essentiellement des méthodes d'analyse fonctionnelle, fondées sur les propriétés des opérateurs adjoints dans un espace de Hilbert. Les résultats obtenus, qui ont été énoncés dans une note antérieure (rapportée ci-dessus) sont d'une nature assez différente.

V. Dumitras.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Künnet, Hermann: Dualisierbare Kurven im R^3 . J. reine angew. Math. 201, 84—99 (1959).

Verf. verallgemeinert den von A. Rosenthal [Math. Ann. 73, 480—521 (1913)] eingeführten Begriff der ebenen dualisierbaren Kurve für den Fall des projektiven 3-dimensionalen Raumes R^3 . Gefordert werden von der Kurve $C \subset R^3$: Existenz und Stetigkeit von Tangente und Schmiegeebene; jede Tangente soll Limes von Schmiegebenen-Schnitten sein; die Punktkurve soll Erzeugnis ihrer Schmiegebenen, kurz: Schmiegebenenkurve, sein, d. h. jeder Kurvenpunkt p soll Limes von Schnitten der Tangente in p mit den Schmiegebenen in zu p benachbarten Kurvenpunkten sein (1. Dualitätsbedingung); schließlich soll C auch Erzeugnis ihrer Tangenten, kurz: Tangentenkurve, sein, d. h.: Es seien p, p' Kurvenpunkte und T, T' bzw. s, s' die Tangenten bzw. Schmiegebenen in p, p' ; konvergiert p' gegen p , so soll gelten: Der Limes des Geradenetzes mit den Leitlinien T, T' zerfällt in das Geradenbündel mit dem Scheitel p und in das Geradenfeld von s ; außerdem soll der Schnittpunkt von T' mit s gegen p konvergieren und diejenige Ebene, welche durch T' und p aufgespannt wird, gegen s (2. Dualitätsbedingung). — Gezeigt wird: Die Schnittpunkte der Tangenten von C mit einer zu C fremden Ebene bilden eine dualisierbare, ebene Kurve, die Tangentenspurkurve von C ; es ist C abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen Bogen 3. Ordnung. An Singularitäten hat man neben den Rückkehrstellen der Punkt- und Schmiegebenenkurve (d. h. den Spitzen und den sogenannten Torsionsstellen) noch die Rückkehrstellen der Tangentenkurve (sogenannte Verbiegungsstellen); außerdem Häufungsstellen solcher Singularitäten. Für die isolierten Singularitäten wird der Zusammenhang mit anderen Singularitätenklassifikationen besprochen. Den Verbiegungs- und Torsions-

stellen von C entsprechen in einer Tangentenspurkurve von C die Spitzen und Wendestellen. Entsprechende Untersuchungen für dualisierbare Kurven in R^n , $n \geq 4$, werden in Aussicht gestellt.

Otto Haupt.

Nasu, Yasuo: On asymptotes on a 2-dimensional metric space. Tensor, n. Ser. 7, 173—184 (1957).

Verf. untersuchte bereits in zwei früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 66, 4050; 83, 171) metrische Räume, in denen zwischen je zwei Punkten x, y ein Segment existiert, dessen Länge gleich dem Abstand xy ist, und in denen die Fortsetzung jedes Segments lokal möglich und eindeutig ist. In solchen G -Räumen sind die Begriffe Halbgerade l , Asymptote zu l und asymptotisch konjugierter Punkt bezüglich l , d. h. Anfangspunkt einer Asymptote, definiert. Während die zweite der genannten Arbeiten G -Flächen mit nicht-positiver Krümmung (im Sinne von H. Busemann) behandelte, die homöomorph zur endlich punktierten Sphäre sind, werden in vorliegender Abhandlung zunächst beliebige G -Flächen untersucht. Dabei ergeben sich u. a. folgende Resultate: (1) Wenn die Menge $K(l)$ der asymptotisch konjugierten Punkte zu einer Halbgeraden l abgeschlossen ist, dann ist $K(l)$ leer oder besteht nur aus einem Punkt oder höchstens abzählbar vielen stetigen Kurven. (2) Wenn $K(l)$ abgeschlossen ist und jede Asymptote zu l einen Anfangspunkt hat, so ist $K(l)$ zusammenhängend. (3) Wenn $K(l)$ kompakt ist, hat jede Asymptote zu l einen Anfangspunkt. — Schließlich werden noch die G -Flächen mit nicht-positiver Krümmung näher untersucht.

W. Barthel.

Barthel, Woldemar: Zum Busemannschen und Brunn-Minkowskischen Satz. Math. Z. 70, 407—429 (1959).

Let $K_{\lambda_0}, K_{\lambda_1}$ be two sets of points contained in different hyperplanes λ_0, λ_1 of the $(n+1)$ -dimensional affine space R_{n+1} ; let T be the $(n-1)$ -dimensional linear space in which λ_0 and λ_1 intersect. The linear cover $[K_{\lambda_0}, K_{\lambda_1}]$ is defined as the set composed by: a) the shadow of K_{λ_0} with respect to K_{λ_1} , i. e. the set of points of R_{n+1} whose union (rectilinear) with the points of K_{λ_1} intersect K_{λ_0} ; b) the union of K_{λ_0} and K_{λ_1} , i. e. the set of all segments determined by points of K_{λ_0} and K_{λ_1} respectively; c) the shadow of K_{λ_1} with respect to K_{λ_0} . The linear pencil determined by K_{λ_0} and K_{λ_1} , noted $[K_{\lambda_0}, K_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}$, is defined as $[K_{\lambda_0}, K_{\lambda_1}] \cap (\text{half hyperplane } (1-t)\lambda_0 + t\lambda_1)$. Then, the fundamental theorem reads: If K_{λ_0} is a convex body and K_{λ_1} is a compact set, both with positive n -dimensional measure $|K_{\lambda_0}|_n, |K_{\lambda_1}|_n$, which do not intersect T , then for $0 < t < 1$ the inequality

$$|[K_{\lambda_0}, K_{\lambda_1}]_{(1-t)\lambda_0+t\lambda_1}|_n^{-1} \leq (1-t)|K_{\lambda_0}|_n^{-1} + t|K_{\lambda_1}|_n^{-1}$$

holds, where the sign of equality holds if and only if K_{λ_1} is a parallel projection of K_{λ_0} . The theorem remains true if K_{λ_0} and K_{λ_1} are convex bodies and $K_{\lambda_0} \cap T = K_{\lambda_1} \cap T$ with $|K_{\lambda_i} \cap T|_{n-1} > 0$. The prolongation to values $t > 1$ is also considered. The theorem generalizes a result of Busemann (this Zbl. 32, 190). In analogous way the author generalizes to proper pencils of hyperplanes some results of Hadwiger for parallel pencils (this Zbl. 40, 383).

L. A. Santaló.

Firey, Wm. J.: A note on a theorem of H. Knothe. Michigan math. J. 6, 53—54 (1959).

Let $C(u)$ be the cylinder whose generators have the direction u and which circumscribes a given convex body K . Denote by $S(u)$ the lateral area of that part of $C(u)$ which lies between the support planes of K in the directions u and $-u$. Theorem: If $S(u)$ is constant, then K is of constant breadth. From here a simple proof follows of the following theorem of Knothe (this Zbl. 77, 359): If $S(u) = \text{area of } K$, then K is a sphere.

L. A. Santaló.

Moser, W. O. J.: On the relative widths of coverings by convex bodies. Canadian math. Bull. 1, 154, 168, 174 (1958).

If K is a convex region in the plane, denote by $w(K, \zeta)$ the length of the orthogonal projection of K onto a line of direction ζ . The author gives a short proof by means of elementary geometry of the following result. If K , K_1 , and K_2 are convex regions such that $K \subset K_1 \cup K_2$, and if ζ_1 and ζ_2 are arbitrary directions, then

$$w(K_1, \zeta_1)/w(K, \zeta_1) + w(K_2, \zeta_2)/w(K, \zeta_2) \geq 1.$$

For more general results compare Th. Bang, this Zbl. 44, 378; Tz. Y. Lee and others, this Zbl. 52, 394. K. Mahler.

Ohshio, Shigeru: On the discontinuity of the total mean curvature $M^*(t)$ of inner parallel surfaces in E_3 and supplements and corrections for the previous paper. Tensor, n. Ser. 9, 126—141 (1959).

(Vgl. Verf., dies. Zbl. 82, 157.) Das damals vom Ref. Vermerkte gilt auch für diesen neuen Versuch des Verf., seine Betrachtungen durch einschränkende Voraussetzungen über die zugelassenen Körper zu sichern. G. Bol.

Laugwitz, Detlef: Eine Bemerkung über konvexe Kurven. Math. Z. 70, 463—464 (1959).

Let K be a compact set in the plane. A support parallelogram of K is a parallelogram PR_1QR_2 whose opposite vertices R_1, R_2 are on the boundary of K and whose sides QR_1, QR_2 lie on support tangents of K . The author proves that if P is an inner point of K then there are at least two support parallelograms of K with P as a vertex. This conclusion followed from stronger hypotheses on K in the reviewer's Theorem (b) of the paper, reviewed in this Zbl. 79, 164. The reviewer's theorems (a) and (c), couched in the terminology of support parallelograms rather than the mapping g , are also valid for the general K defined above. S. Stein.

Laugwitz, Detlef: Die Geometrien von H. Minkowski. Mathematikunterricht Heft 4, 27—42 (1958).

Verf. gibt eine anschauliche und exakte Einführung in die Minkowskische Geometrie, in erster Linie für Lehrer an höheren Schulen. Er behandelt u. a. axiomatische Fragen, das Verhältnis von Minkowskischem Umfang und Durchmesser der Eichkurve (minimaler Wert 3, maximaler 4), das Löwnersche Ellipsoid, Kennzeichnungen der euklidischen Ebenen bzw. Räume unter den Minkowskischen. H. Lenz.

Topologie:

Roppert, Josef: Untersuchungen über Fréchet-Räume. Monatsh. Math. 62, 345—356 (1958).

Nach einer Untersuchung der Beziehungen zwischen der Ableitung E' und der Hülle $H(E)$ einer Menge E im Fréchet'schen Raum K gibt Verf. einen Überblick über die Mengen, die von einer Menge E bei wiederholter Anwendung der beiden Operationen der „Hüllenbildung“ und „Komplementbildung“ entstehen. Es gibt höchstens 14 Möglichkeiten. Die entsprechenden Ordnungsschemata werden angegeben. Bedingungen, die notwendig und hinreichend sind, für die Additivität der Hülle (d. h. $(A + B) = \overline{A + B}$) sind: (für jedes Paar von Mengen A, B von K) $A - B \supset A - \overline{B}$ oder, $\overline{AB} \supset A - B^{c-c}$. Die Umgebungen sind nicht notwendig offen; \overline{A} oder A^- , als Durchschnitt aller A enthaltenden abgeschlossenen Mengen definiert, enthält die, ist aber nicht notwendig gleich der Menge

$$H(A) = \{p \in K; U(p) \cap A \neq \emptyset \text{ für alle } U(p)\};$$

hier nennt man E abgeschlossen, wenn $E = H(E)$ gilt. Es ist zu beachten, daß die „Hüllenbildung“ A^- von A gibt (nicht $H(A)$). Die Additivität von $(-)$ folgt aus der Additivität von $H(-)$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Additivität von $H(-)$ ist: für beliebige Mengenfolgen A_i, B_i gilt $\limsup A_i +$

$\limsup B_i = \limsup (A_i + B_i)$, ($p \in \limsup A_i$, wenn jede Umgebung von p A_i für unendlich viele i trennt. (In der letzten Zeile der Seite 345 lies für „C“ „D“.)

V. S. Krishnan.

Katetov, M.: Über die Fortsetzung lokal endlicher Überdeckungen. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 145—151 (1958) [Russisch].

This paper is mainly of an expository character and deals with various kinds of normalities and coverings of spaces. A normal space P is strongly normal (i. e. collectively normal and countably paracompact) if and only if each locally finite system S of sets be embeddable in a locally finite system of G -sets of the space P (Theorem 4. 1); then S is also uniformly locally finite in the sense that there exists an open cover U of the space such that each term of S intersects $< \aleph_0$ terms of U ; and vice versa: if S is uniformly locally finite, then the space is collectively normal and countably paracompact (Th. 5. 4). A space P is said to be collectively normal, if for each system F of sets $\subseteq P$ whose closures are pairwise disjoint there exists a family F' of open sets in which F is inscribed and such that for every finite subfamily f of F one has $\cap f \neq \emptyset \Leftrightarrow \cap f' \neq \emptyset$, f' being the corresponding subfamily of F' (cf. the next review).

G. Kurepa.

Šedivá, Vera: On collectionwise normal and hypocompact spaces. Czechosl. math. J. 9 (84), 50—61, engl. Zusammenfassg. 62 (1959) [Russisch].

For the terminology cf. also the foregoing paper of Katetov. The theorem 1. 1 of the paper is the theorem 4. 1 of the preceding paper with a different proof. Every F_σ -set of a collectively normal [c. n.] space is also c. n. (Th. 1. 3). If each G -set of a space is a c. n. space, then the space is hereditary c. n. (Th. 1. 4). Several theorems on strongly paracompact [s. p.] spaces are given (a space is s. p. or hypocompact if in each of its open covers a starfinite open cover is inscriptible). E. g. if P is a s. p. space and Y is a F_σ -set in P such that each $x \in Y$ has a connected neighborhood in some space Z where $Y \subseteq Z \subseteq X$, then Y too is s. p. (Th. 2. 2.). Let X_1, X_2 be metric spaces and $X = X_0 \times X_1$; if X_0, X_1 are locally separable, X is hereditary s. p. If X_i is not locally separable and if $\text{ind } X_{1-i} > 0$, then X is not hereditary s. p. (Th. 2. 4); if X_0 is locally separable and $\dim X_1 \leq 0$, then X is hereditary s. p. if and only if X is locally separable or $\dim X \leq 0$ (Th. 2. 5).

G. Kurepa.

Smirnov, Ju. (Yu.): A completely regular non-semibicompact space with a zero-dimensional Čech complement. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 1204—1206 (1958) [Russisch].

Skljarenko (Sklarenko), E.: Bicomcompact extensions of semibicompact spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 1200—1203 (1958) [Russisch].

Die Semibikompaktheit von R ist notwendig und hinreichend für die Bikompaktisierbarkeit mit Hilfe einer nulldimensionalen Menge. Dies wurde von H. Freudenthal (dies. Zbl. 43, 165) für Räume mit abzählbarer Basis bewiesen, aber allgemein behauptet. Beim Beweise des „hinreichend“ meinte Freudenthal, daß ein nulldimensionaler Raum bei Addition eines Punktes stets nulldimensional bleibe. Smirnov gibt hierzu ein Gegenbeispiel, wobei er sich eines nulldimensionalen Raumes von Dowker bedient, der bei der Überdeckungsdefinition positiv-dimensional wird (dies. Zbl. 66, 412). Der mit einem Punkt kompaktifizierbare Raum ist also nicht semibikompakt. Skljarenko beweist von neuem, daß obige Bedingung hinreichend ist, indem er sich der Nachbarschaftsräume bedient und allgemeiner zeigt, daß gewisse Kompaktifizierungen immer mittels nulldimensionaler Mengen geschehen. Für Nulldimensionalität im Sinne Ind gilt das noch, wenn man sich auf eine Klasse \mathcal{S} von Räumen beschränkt, die folgendermaßen definiert sind: R heiße von abzählbarem Gewicht über der Teilmenge A , wenn ein abzählbares Umgebungssystem von A in R existiert, das in jede Umgebung von A hineinkriecht; die Räume \mathcal{S} sind definitionsgemäß von abzählbarem Gewicht über jedem Bikompaktum.

H. Freudenthal.

Alexandroff, P. and V. Ponomarev: On bicompact extensions of topological spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 575—578 (1958) [Russisch].

Verff. heben die Bedeutung des Enden-Begriffes für die Beschreibung der kompakten Erweiterungen eines [vollständig regulären] topologischen Raumes hervor und geben zunächst auf diesem Begriff fußend die folgende, mit einem Ergebnis von Ju. M. Smirnov (dies. Zbl. 47, 419) im wesentlichen äquivalente Charakterisierung aller kompakten Erweiterungen bX des Raumes X . Durch bX wird zwischen den abgeschlossenen Mengen F und den offenen Mengen G von X eine „Einschachtelung“ $F < G$ gegeben, und zwar soll $F < G$ genau dann bestehen, wenn die abgeschlossene Hülle $[F]_{bX}$ von F in bX in einer offenen Menge H von bX mit $H \cap X = G$ liegt. Diese Einschachtelung $F < G$ hat die folgenden Eigenschaften: $X - G < X - F$; $F \subseteq G$; $F_0 < G_0$ für $F_0 \subseteq F$, $G \subseteq G_0$; $F < H$ und $[H] < G$ für eine geeignete offene Menge H ; aus $F_i < G_i$ folgt $F_1 \cup F_2 < G_1 \cup G_2$; $\emptyset < \emptyset$ zu jeder Umgebung U von x gibt es eine Umgebung V von x mit $[V] < U$. ($[A]$ bezeichnet die abgeschlossene Hülle von A in X .) Geht man umgekehrt von einer Einschachtelung v mit diesen Eigenschaften aus, so ist der im folgenden beschriebene zugehörige Endenraum vX eine kompakte Erweiterung von X und zwar ist vX über X homöomorph zu bX , wenn v die von bX induzierte Einschachtelung ist. Der Endenraum besteht dabei aus allen v -Enden = Filtern ξ über dem System der offenen Mengen von X , die maximal sind bezüglich der Eigenschaft: Zu jedem $G \in \xi$ gibt es ein $H \in \xi$ mit $[H] v G$. Eine Basis für die offenen Mengen des Enden-Raumes wird gebildet von der Gesamtheit aller Mengen $\Omega_G = \{\xi; G \in \xi\}$. Im Rahmen dieser Überlegungen gelangen die Verf. zu der folgenden Verschärfung eines Ergebnisses von E. Skljarenko [vorstehende Besprechung; vgl. auch H. Freudenthal, Ann. of Math., II. Ser. 43, 261—279 (1942), dies. Zbl. 60, 400]: Eine Menge N heiße nulldimensional eingebettet in einen Raum E , wenn es eine Basis \mathfrak{B} für die offenen Mengen von E gibt, so daß N fremd zum Rand jedes Elementes von \mathfrak{B} ist. Genau dann, wenn X semikompakt ist, d. h. eine Basis von offenen Mengen mit kompakten Rändern besitzt, gibt es eine kompakte Erweiterung bX von X , so daß $bX - X$ nulldimensional eingebettet ist in bX . Die Einschachtelungen, die zu solchen kompakten Erweiterungen führen, werden vermittels der randlosen Basen von X gekennzeichnet. Ist die große induktive Dimension $\text{Ind } X = 0$, so ist X nulldimensional eingebettet in jede kompakte Erweiterung von X . H. Salzmann.

Williams, R. F.: Local contractions and the size of a compact metric space. Duke math. J. 26, 277—289 (1959).

Die Untersuchungen über Kontraktionen und lokale Kontraktionen kompakter Räume, die mit einer Arbeit von H. Freudenthal und W. Hurewicz (dies. Zbl. 13, 283) eingeleitet und von A. Edrei (dies. Zbl. 42, 168; 47, 163) und Verf. (dies. Zbl. 57, 149) fortgesetzt wurden, erstrecken sich in dieser Arbeit auf spezielle kompakte Räume. Es ergibt sich: Eine Lokalkontraktion eines Bogens auf sich ist eine Involution. Eine Lokalkontraktion eines metrischen Raumes auf sich, bei der jeder Punkt eine endliche Periode besitzt, ist lokalisometrisch. Bei einem Dendriten mit abzählbar vielen Endpunkten ist eine „Lokalkontraktion auf“ eine Isometrie; jeder Punkt hat endliche Periode. (Für beliebige Dendriten ist das nicht wahr.) Man kann den Kreis so metrisieren, daß die Rotation über einen Radial Lokalkontraktion, aber nicht Lokalisometrie ist. Lokale Kontraktionen erhöhen das Hausdorffsche p -Maß nicht. H. Freudenthal.

Mrówka, S.: A necessary and sufficient condition for m -almost-metrisability. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 627—629 (1957).

A space is said to be m -almost-metrisable if there exists a family of pseudometrics (on the space X) of cardinal m such that the spheres of positive radii, about the points of X as centres, relative to these various pseudometrics, form a basis (of open sets) of X . If a system of continuous functions (f) on the space X to the

unit interval, indexed by a family \mathfrak{R} of subsets of X , exists such that $f_U(x) = 1$ for $x \in U$ ($U \in \mathfrak{R}$), and such that the system of subsets $(x \in X: f_U(x) > 0)$, $U \in \mathfrak{R}$ is locally finite (or discrete) then the system of subsets \mathfrak{R} is also said to be locally finite (or discrete, respectively). The main result of the paper is: Theorem. Let X be a completely regular space. Then the following conditions are equivalent: (a) X is m -almost-metrisable; (b) X has a basis which is the union of m functionally discrete systems; (c) X has a basis which is the union of m functionally locally finite systems.

V. S. Krishnan.

Groot, J. de and H. de Vries: Metrization of a set which is mapped into itself. Quart. J. Math., Oxford. II Ser. 9, 144—148 (1958).

The problem of constructing a topology for a set S such that a given mapping Φ of S in itself becomes continuous, is answered in a stronger form by replacing the topology by a metric topology itself. The main results proved are: Theorem I. If S is an infinite set and $\Phi(S) \subset S$, one can always introduce a non-discrete metric in S under which Φ is continuous. Theorem II. If S has at most continuously many elements and $\Phi(S) \subset S$, then one can imbed S into the discontinuum of Cantor (and so certainly into the unit segment) so that Φ becomes continuous. Under the assumption that Φ is one-to-one, it is shown that the above metrics can be chosen so that Φ is topological. Some examples are also given to discuss negative results.

V. S. Krishnan.

Borsuk, K.: Remarques sur la quasi-homéomorphie. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 1—4 (1958).

Es werden zwei quasi-homöomorphe Teilmengen des 3-dimensionalen Euklidischen Raumes definiert, von denen die erste einer Teilmenge der Ebene homöomorph ist, während die andere sich nicht in die Ebene einbetten läßt. Dabei heißen zwei kompakte metrische Räume X und Y quasi-homöomorph falls es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei solche stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ gibt, daß $f(X) = Y$, $g(Y) = X$, $\text{diam } f^{-1}(y) < \varepsilon$ und $\text{diam } g^{-1}(x) < \varepsilon$ für jedes $x \in X$ und $y \in Y$ gilt.

T. Ganea.

Fort jr., M. K.: ε -mappings of a disc onto a torus. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 51—54, russ. Zusammenfassg. V (1959).

Answering a problem raised by S. Ulam, the author proves that there is no continuous map f of the unit disc onto a 2-dimensional torus T with the property that $\text{diam } f^{-1}(y) < \frac{1}{8}$ for every $y \in T$. Reviewer's remarks: The second theorem according to which two closed, orientable, 2-manifolds which are quasi-homeomorphic also are homeomorphic is valid also for non-orientable 2-manifolds and may be derived as an immediate consequence of early results by S. Eilenberg [Fundamenta Math. 29, 101—122 (1937) this; Zbl. 17, 40] especially p. 102 and 117 Stronger results concerning n -dimensional manifolds have been found shortly before the author by the reviewer [Fundamenta Math. 47, 35—44 (1959)].

T. Ganea.

Schubert, Horst: Semisimpliziale Komplexe. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 61, 126—138 (1959).

Expository paper.

T. Ganea.

Heinz, Erhard: An elementary analytic theory of the degree of mapping in n -dimensional space. J. Math. Mech. 8, 231—247 (1959).

This paper deals with the Brouwer degree for continuously differentiable mappings, then with the fixed point theorem, the notion of index and the Leray's product theorem. The Brouwer degree is defined as follows: let Ω be a bounded open set in R^m and $y: \Omega \rightarrow y(\Omega) \subset R^m$ a continuously differentiable mapping in Ω , defined in $\bar{\Omega}$ and continuous in $\bar{\Omega}$; $|y|$ stands for the usual euclidean norm and it is assumed that $y(\dot{\Omega}) \cap (z) = \emptyset$ (\emptyset : empty set), where $z \in R^m$ is fixed; $\dot{\Omega} = \bar{\Omega} - \Omega$.

The Brouwer degree $d[y; \Omega; z]$ is the value of the integral

$$(*) \quad \int_{\Omega} \Phi(|y(x) - z|) J(y) dx$$

where $J(y)$ stands for the jacobian of the mapping and $\Phi(r)$ is a continuous function of a positive real variable such that: (1) it vanishes in the vicinity of the origin and also für $\varepsilon \leq r < \infty$ where

$$0 < \varepsilon < \inf_{x \in \Omega} (|y(x) - z|); \quad (2) \quad \int_{R^m} \Phi(|x|) dx = 1.$$

It is not difficult to prove that the value of (*) is independent of the function Φ . Further it is shown that if two mappings, y_1 and y_2 , are such that $|y_1(x) - y_2(x)| < \varepsilon$ for $x \in \Omega$ and $|y_i(x) - z| > 7\varepsilon$, $i = 1, 2$, for $x \in \Omega$, then $d[y_1; \Omega; z] = d[y_2; \Omega; z]$. If $\{y_k\}$ is a sequence of mappings, defined and continuous in $\bar{\Omega}$ and continuously differentiable in Ω , converging uniformly to y and such that $y_k(\bar{\Omega}) \cap (z) = \emptyset$, then $\lim_{k \rightarrow \infty} d[y_k; \Omega; z] = d[y; \Omega; z]$. Lastly if $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ and y is defined in $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$,

under the same conditions as above: $d[y; \Omega_1 \cup \Omega_2; z] = d[y; \Omega_1; z] + d[y; \Omega_2; z]$. Also if the mapping depends continuously on a parameter $t \in (0, 1)$ and $y(\Omega, t) \cap (z) = \emptyset$, $d(y; \Omega; z)$ is constant for $t \in (0, 1)$. It is shown that the Brouwer degree is an integer. It is proved also that if $d[y; \Omega; z] \neq 0$ there exists at least an $\xi \in \Omega$ such that $y(\xi) = z$. In particular the continuous mapping of a closed ball into itself has a fixed point. All the proofs call only into play propositions of classical Analysis. The index of a mapping is defined in the usual manner when the solution of the equation $y(x) = z$ has only isolated solutions. In the last section of the paper the author proves the following product theorem: let y be a continuous mapping of Ω into R^m and D_i , $i = 1, 2, \dots$ denote the components of the open set $R^m - y(\bar{\Omega})$. Let z be another continuous mapping defined in $y(\bar{\Omega})$ and such that $z[y(\bar{\Omega})] \cap (u_0) = \emptyset$ where u_0 is a fixed point. Let $u = z(y)$. Then

$$d[u; \Omega; u_0] = \sum_i d[y; \Omega; D_i] \cdot d[z; D_i; u_0].$$

The proof is an application of the following proposition: if f is a real-valued function defined in R^m , vanishing in a vicinity of $y(\bar{\Omega})$ and for large values of $|y|$, $\{y_k\}$ being a sequence of continuously differentiable mappings uniformly converging to y , for $k \geq k_0$:

$$\int_{\Omega} f(y_k(x)) J(y_k) dx = \sum_i d[y; \Omega; D_i] \int_{D_i} f(z) dz,$$

and $f(y_k)$ vanishes in a vicinity of $\bar{\Omega}$.

C. Racine.

Jaworowski, J. W.: A note of correction to the paper "Some consequences of the Vietoris mapping theorem". Fundamenta Math. 46, 359 (1959).

Betrifft die in diesem Zbl. 80, 381 angezeigte Arbeit.

James, I. M.: Multiplication on spheres. II. Trans. Amer. math. Soc. 84, 545—558 (1957).

(Part I cf. this Zbl. 78, 371). — The homotopy classes of multiplications on spheres S^n are in 1-1-correspondence with the elements of $\pi_{2n}(S^n)$. Their number is 1 for $n = 1$, 12 for $n = 3$, eight of which are homotopy-associative, and four are not; they divide in six pairs of pairwise inverse multiplications. For $n \neq 1, \neq 3$ there is no homotopy-associative multiplication. In the proof of this main result extensive use is made of the methods developed in another paper of the same author (this Zbl. 78, 157).

H. Freudenthal.

Weier, Joseph: Über einen Homomorphismus bei der Transformation von Sphären. Proc. Japan Acad. 34, 487—488 (1958).

Voranzeige (ohne Beweise).

Milnor, John: Some consequences of a theorem of Bott. *Ann. of Math.*, II. Ser. 68, 444—449 (1958).

Verf. leitet aus einem tiefliegenden, schon von Borel und Hirzebruch vermuteten Theorem von R. Bott, wonach die Pontrjaginsche Klasse $p_k(\xi) \in H^{4k}(S^{4k}, \mathbb{Z})$ eines O_m -Bündels ξ über der Sphäre S^{4k} durch $(2k-1)!$ teilbar ist und aus einem Theorem von Wu Wen-Tsün, wonach die Pontrjaginschen Klassen mod 4 eines solchen Bündels durch die Stiefel-Whitneyschen Klassen bestimmt sind, einige höchst interessante Folgerungen ab. (1) Es existiert ein O_m -Bündel ξ über der Sphäre S^n mit einer Stiefel-Whitneyschen Klasse $w_n(\xi) \neq 0$ nur für die Werte $n = 1, 2, 4, 8$. Dies wird für die folgenden Ergebnisse benützt: (2) Die Sphäre S^r ist parallelisierbar nur für $r = 1, 3, 7$. (3) Sind die Kohomologiegruppen $H^i(M^{2n}, \mathbb{Z})$ einer einfach zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^{2n} für $i = 0, n, 2n$ unendlich zyklisch und sonst Null, so muß n entweder 2, 4, oder 8 sein. Aus (2) erhält man z. B. folgendes Korollar: Nur für die Werte $n = 1, 2, 4, 8$ existiert eine Divisionsalgebra vom Range n über dem Körper der reellen Zahlen. (1) und (2) wurde schon früher von Bott und Verf. mitgeteilt (dies. Zbl. 82, 166). Die Aufzählung der erhaltenen Ergebnisse ist nicht vollständig, es wird auch noch der Zusammenhang des Theorems von Bott mit der Frage nach der Existenz von Abbildungen, deren Hopfsche Invariante $\neq 0$ ist, erörtert.

H. Götz.

Adachi, Masahisa and Nobuo Shimada: On tangent structures of lower dimensional manifolds. *Proc. Japan Acad.* 34, 417 (1958).

Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Wu Wen-tsun (Proposition 7'', S. 71 der in diesem Zbl. 49, 126 besprochenen Arbeit). Keine Beweise.

Haefliger, André: Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoides. *Commentarii math. Helvet.* 32, 248—329 (1958).

In this paper, one finds first a rather detailed exposition of Ehresmann's theory of jets, which is used to revamp Reeb's theory of "leave spaces" (espaces feuilletées) in order to apply to it the sheaf-theoretical methods of algebraic topology developed for fibre bundles. In this review, we will suppose known the theory of jets [cf. C. Ehresmann, this Zbl. 43, 174; P. Libermann, *Colloque de Topologie de Strasbourg Années 1954—1955*, 20 p. (1955)], it is redefined in the first paragraphs of the first chapter, together with the notions of groupoid and of fiber space. The essential innovation here is the introduction of a groupoid of operators on a fiber space, rather than of a group, and the introduction of a fiber bundle with structure groupoid. In the second chapter it is shown that the methods of sheaf theory carry over to groupoid-sheaves at least to the extent necessary to define the first set of cohomology $H^1(X, \mathfrak{f})$ of a topological space X with values in the sheaf of groupoids \mathfrak{f} . The procedure is analogous to that used to define the corresponding set with coefficients in a non-abelian sheaf of groups. [cf. P. Dedecker, *Acad. roy. Belgique Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. 41, 1132—1146 (1955)]. It is shown that the map induced on H^1 by a representation of one sheaf into another is a functorial map. A 1-cocycle is essentially the inductive limit, in the set of open coverings $\{U_i\}_{i \in I}$ of a family of maps $f_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathfrak{f}$ with the compatibility condition $f_{ik} = f_{ij} f_{jk}$. Now, for the covering $\{U_i\}_{i \in I}$ consider the space $\bigcup_{i \in I} (i, E_i^f) / E_i^f = p^{-1} f_{ii}(U_i)$, with the relation of equivalence $(i, x_i) \sim (j, x_j)$ if and only if $x_j = f_{ji} x_i$. Now, for a space X with sheaf of groupoids \mathfrak{f} one may construct a fiber space (E, p, B) whose base is the space of units of \mathfrak{f} , with \mathfrak{f} as groupoid of operators on E . In this case the equivalence of the foregoing construction is compatible both with p and with the projection of \mathfrak{f} onto X , so the quotient is a new fiber space (E^f, p^f, \mathfrak{f}) defined by the cohomology class of f up to an isomorphism. In this way, one may associate to any element $s \in H^1(X, \mathfrak{f})$ a sheaf of groups \mathcal{G}^f , starting from the subsheaf \mathcal{G} on B formed by the elements

of \mathfrak{k} with identical right and left units. The sheaf \mathfrak{G}^f obtained by the construction has a canonical representation on the groupoid of germs of local automorphisms of (E^f, p^f) . Especially important is the principal fiber space (\mathfrak{f}^s, a^s) defined in this way, with $a: \mathfrak{k} \rightarrow B$. Now consider B as a faisceau \mathfrak{B} over X , the action of \mathfrak{k} on \mathfrak{B} determines a quotient sheaf $\mathfrak{B}/\mathfrak{k}$. Then, there is a functorial homomorphism $H^1(X, \mathfrak{k}) \rightarrow H^0(X, \mathfrak{B}/\mathfrak{k})$. The inverse images of the elements of $H^0(X, \mathfrak{B}/\mathfrak{k})$ (i. e. essentially the sections of $\mathfrak{B}/\mathfrak{k}$ over X) are determined by the sheafs \mathfrak{G}^s . Now, take the case where \mathfrak{k} is the sheaf of germs of constant maps of X into a groupoid π . In this case, \mathfrak{B} will be isomorphic to $X \times B$, where B is the set of units of π . The principal fiber space (\mathfrak{f}^s, a^s) will admit a groupoid of isomorphism of fibers $\varphi_{xy}: \mathfrak{f}_x^s \rightarrow \mathfrak{f}_y^s$ compatible with the operation of π on the fiber. This groupoid Φ^s , with the projection $\alpha: \varphi_{xy} \rightarrow x$ may be given a topology that turn it into a covering of X . If X is locally connected, the union of the connected components of the units of Φ^s will be the groupoid of holonomy of X , the group generated by the φ_{xx} will be the holonomy group of X in x . Then one has the usual representation theorem of the fundamental group onto the holonomy group. In this connection, it is shown that the rudiments of exact sequences available in the non-abelian case carry over to the groupoid theory. Now let Γ be a pseudogroup of local automorphisms of B . Its groupoid of local jets $X \rightarrow \pi_\Gamma$ defines a sheaf \mathfrak{k}_Γ . Then a Γ -structure is an element of $H^1(X, \mathfrak{k}_\Gamma)$. By the preceding theory this definition is functorial, and any Γ -structure defines a principal fiber space over X , up to an isomorphism. There is a partial order in the Γ -structures, deriving from the notion of sub-pseudogroup. Now, if G is an automorphism group of B , the Γ_G -structures over X are in canonical 1 — 1 correspondence with the equivalence classes of sections of the fiber spaces (E, B, X, G) . A leaved-structure over X is then finally an element of $H^0(X, \mathfrak{B}/\Gamma)$. By the homomorphisme described above, the Γ -structures are mapped into the leaved Γ -structures (not necessarily onto). Defining a new topology on X by taking the intersection of the open sets of X with the inverse images of the elements of B under the maps of the functions of the Γ -structures σ , a leaf is a connected component of X in the new topology. The principal result is then the theorem of stability: Given a space X with a Γ -structure s , such that the topology of the leaves of the corresponding leaved structure is Hausdorff and locally connected, that any point of X has a compact neighbourhood, and that B is Hausdorff, then any compact leaf with finite holonomy group has a fundamental system of neighbourhoods saturated with compact leaves. The space of leaves \hat{X} is derived from X in identifying all points in one leaf. In this projection, the natural generalization of the notion of section in a fiber space is that of transversal space. It is then shown that the holonomy groupoid defined by two points x, x' may be realized by local isomorphisms of the transversal spaces in x onto those in x' . Chapters IV and V of this papers treat of two different applications of the foregoing theory. In IV, one determines the isomorphy-classes of germs of imbeddings of a space into another, invariant under a pseudogroup of automorphisms of the second spaces. Let \mathfrak{G}^s be the faisceau of groups of germs of local automorphisms of the imbedding space, reducing to the identity on the image of X . Then, if X admits a Γ -structure s , the set of isomorphy classes is $H^1(X, \mathfrak{G}^s)$. This result is then used to determine variations of structures, differentiable and analytic structures. In the last chapter, special methods are developed to discuss structures defined by the pseudogroup of local analytic automorphisms of the real line, Γ_ω . The important special property appearing here is, that any closed transversal to a leaved Γ_ω -structure represents an element of infinite order of the fundamental group of X . This theorem then has many applications to special cases.

H. Guggenheimer.

Gottschalk, W. H.: Minimal sets: An introduction to topological dynamics.
Bull. Amer. math. Soc. 64, 336—351 (1958).

If the phase space of a dynamical system is nonvacuous, closed, invariant and minimal with respect to these properties, then the space is called a minimal set. In this expository paper the author provides a valuable summary of important results known in minimal sets, especially those arising from the iteration of a single homeomorphism of a topological space onto itself and continuous dynamical systems generalizing the classical systems given by a system of first order autonomous differential equations. Numerous unsolved problems are mentioned. *W. R. Utz.*

Seibert, Peter: On a problem of Mazurkiewicz concerning the boundary of a covering surface. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **45**, 50—54 (1959).

Verf. setzt seine Untersuchungen über den Rand von Mazurkiewicz fort (s. dies. Zbl. **84**, 394) und beweist: ist F eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der Riemannschen Sphäre und ihr Rand Z lokal kompakt, so ist $\dim Z \leq 1$. Ist aber Z nicht einfach zusammenhängend, so kann Z der Sphäre homöomorph sein, was Verf. mittels eines Beispiels zeigt. *C. Constantinescu.*

Nettleton, R. E., K. Goldberg and M. S. Green: Dense subgraphs and connectivity. *Canadian J. Math.* **11**, 262—268 (1959).

Es handelt sich hier um lineare ungerichtete Graphen G . Zwei in G direkt verbundene Punkte werden „Nachbarn“ genannt. Unter einem „Subgraph“ G' von G wird (spezieller als bei einem Teilgraph) eine Teilmenge T der Punkte von G zusammen mit allen Kanten aus G verstanden, welche nur Punkte von T miteinander verbinden; G' ist also durch G und T bestimmt. $G - G'$ besteht aus den in G' nicht vorkommenden Punkten von G und ihren Verbindungskanten aus G . G' „trennt“ (disconnects) den zusammenhängenden Graphen G , wenn $G - G'$ nicht zusammenhängend ist. Die Vereinigung bzw. der Durchschnitt zweier Subgraphen G_1 und G_2 von G mit den Punktmengen T_1 und T_2 ist der durch die Vereinigungsmenge $T_1 + T_2$ bzw. den Durchschnitt $T_1 T_2$ bestimmte Subgraph. — Verf. untersuchen die trennenden Subgraphen eines gegebenen zusammenhängenden Graphen. Hierbei spielen besonders die folgenden Typen eine Rolle: „ k -Isthmus“ von G heißt ein vollständiger, G trennender Subgraph mit k Punkten, welcher keinen echten, vollständigen, G trennenden Subgraph enthält; „ k -Artikulator“ von G ist ein nicht vollständiger, G trennender Subgraph G' mit k Punkten und der Eigenschaft, daß in jedem der zusammenhängenden Teile von $G - G'$ zu jedem Punkt von G' ein Nachbar existiert. Ein zusammenhängender Subgraph G' von G heißt „dicht“, wenn entweder $G' = G$ ist, oder wenn jeder Punkt von $G - G'$ in G' einen Nachbar hat. — Unter anderen werden folgende Sätze aufgestellt: (1) Die Menge der dichten Subgraphen von G zusammen mit dem leeren Graph G_0 bilden einen Verband, wenn man unter dem Durchschnitt zweier Elemente, falls er nicht dicht ist, G_0 versteht. (2) Die Vereinigung aller derjenigen dichten Subgraphen von G , welche „minimal“ sind, d. h. keinen andern dichten Subgraph enthalten, enthält jeden Isthmus und jeden Artikulator von G . (3) Jeder G trennende Subgraph enthält einen Artikulator oder einen Isthmus. — Einige weitere Aussagen beziehen sich auf Graphen, die „ m -zusammenhängend“ sind, d. h. bei denen $G - G'$ für jeden Subgraph G' mit weniger als m Punkten zusammenhängend ist. *E. Schönhardt.*

Angewandte Geometrie:

● **Kramer, Werner:** Darstellende Geometrie. I. (Hochschulbücher für Mathematik. Bd. 38.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959. VIII, 188 S. mit 221 Abb. DM 12,50.

Das Buch behandelt trotz seines geringen Umfangs sehr ausführlich und mit großem Geschick an Hand einprägsamer Figuren die senkrechten Parallelprojektionen des Raumes auf eine oder mehrere Rißtafeln. Schräg- und Zentralbilder sollen in einem anschließenden Band dargestellt werden. Im ersten Teil wird nur eine Riß-

tafel benutzt, und zwar für die wichtigsten Grundaufgaben über die Raumelemente, für die Darstellung von Dächern, Böschungen, Sonnen-Uhren, des Kreises, des Kreiszylinders, Kreiskegels und der Kugel mit vielen schönen Anwendungen auf die mathematische Erd- und Himmelskunde. Der 2. und 3. Teil ist dem Zweitafelsystem gewidmet, wobei z. B. die Kegelschnitte besonders liebevoll und ausführlich erörtert werden. Für Ingenieure und Mathematiker ist das Buch sehr zu empfehlen.

F. Rehbock.

Sconzo, Pasquale: Sul calcolo automatico della soluzione del problema fondamentale della navigazione astronomica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 26, 207—209 (1959).

Theoretische Physik.

Mechanik:

● **Webster, Arthur Gordon:** The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, being lectures on mathematical physics. 2nd ed. Unabridged and unaltered republ. of the second ed. 1912. New York: Dover Publications, Inc. 1959. XI, 588 p. \$ 2,35.

Questa classica opera, pubblicata in 1^a edizione nel 1904 e in 2^a edizione nel 1912 appare in nuova edizione Dover come ristampa della 2^a edizione. — Lo scopo principale dell'A. è di discutere ciò che è essenziale in meccanica per comprendere i fenomeni fisici, lasciando da parte tutto ciò che ha principalmente interesse matematico. Per questa ragione il libro è raccomandabile specialmente agli studenti di fisica. — Il metodo di esposizione dell'A. è fondato sull'idea generale che non debba dominare esclusivamente nè il punto di vista lagrangiano (metodo analitico), nè il punto di vista geometrico (metodo di Poincaré e Hamilton). — L'A. dice che è perfettamente possibile servirsi di entrambi i metodi e riesce così a presentare i fondamenti della scienza meccanica in un'opera che è senza dubbio della più alta importanza. — Questa è divisa in tre parti. Nella 1^a Parte vengono presentate le leggi del moto in generale e i metodi che sono applicabili a sistemi dinamici di qualunque natura. È sottolineata l'importanza del principio di Hamilton che insieme con le equazioni di Lagrange costituisce uno strumento essenziale per la fisica. Viene poi esposta la teoria delle oscillazioni e del fenomeno della risonanza di grande interesse fisico. La 2^a Parte è dedicata al moto dei corpi rigidi con particolare riguardo ai moti giroscopici. Nella 3^a Parte l'A. espone anzitutto i fondamenti della teoria della funzione potenziale, la discussione generale degli sforzi e delle deformazioni come nozioni propedeutiche ad alcuni tra i più semplici problemi di elasticità. — L'opera si chiude con la trattazione di argomenti scelti di idrodinamica e precisamente dei moti ondosi e vorticosi.

G. Lampariello.

Hronec, J.: Die Bewegung mit n Freiheitsgraden, wo die kinetische und die potentielle Energie mit der quadratischen Form gegeben ist. Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Comenian Mathematica 3, 1—13, slowak. u. russ. Zusammenfassg. 14—15 (1958).

Die Transformation der potentiellen und kinetischen Energie auf Diagonalform führt zur Lagrangeschen Bewegungsgleichung in Normalkoordinaten. Bei der Diskussion dieser Gleichungen können naturgemäß keine neuen Resultate erwartet werden.

F. Selig.

Jovanović, Božidar D.: Quelques théorèmes sur les systèmes des forces dans espace. Godišnj. filos. Fak. u Novom Sadu 2, 381—387, français. Zusammenfassg. 387 (1957) [Serbo-kroatisch].

Dans la note présente on étudie, sous la direction du souscripteur, les deux théorèmes suivants concernant aux vecteurs glissants: 1° La condition de la coupure

des axes centrales de deux torseurs $\mathfrak{T}_i \{\vec{F}_i, \vec{M}_i\}$, $i = 1, 2$, est $\mathfrak{R} + (\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) - (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \{p_1 + p_2\} = 0$, où \mathfrak{R} est le comoment de vecteurs \vec{F}_i , $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$ le produit scalaire de torseurs et (\vec{F}_1, \vec{F}_2) celui de vecteurs, p_i sont les pas réduits. 2° Soient D_i , $i = 1, 2, 3$, trois droites quelconques. N_{jk} , $j, k = 1, 2, 3$, $j \neq k$, les perpendiculaires communes à ces droites prises deux à deux, X_i ($i = 1, 2, 3$) la perpendiculaire commune à D_i et à N_{jk} , $i \neq j \neq k$, alors les trois droites X_i coupent une même droite à angle droit (le théorème de Morley-Petersen). Le preuve a donné à l'aide de l'algèbre des torseurs.

D. Rašković.

Moljukov, I. D. und V. A. Sapa: Tensorform der Bewegungsgleichungen eines Systems mit veränderlicher Masse. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. 7 (11), 89—94 (1959) [Russisch].

Gli aa., prendendo le mosse dalle equazioni del moto dei sistemi meccanici con masse variabili scritte sotto le forme oramai note dovute all' A. A. Kosmodemjanskij, V. F. Kotov, V. A. Sapa, G. I. Boldinskij e A. I. Zeltin, perviene, partendo dalle equazioni del moto dei sistemi nelle coordinate generalizzate, alle equazioni di Schouten-Synge nelle coordinate olonomi ed anolonomi. I risultati conseguiti corrispondono rispettivamente ai casi in cui: a) la forza reattiva deriva dalla velocità assoluta delle particole variabili e b) la forza reattiva deriva dalla velocità relativa di tali particole. Il sistema con masse variabili si suppone ad essere una funzione esplicita del tempo t .

D. J. Mangeron.

Novoselov, V. C.: Reduktion eines Problems der nichtholonomen Mechanik auf ein bedingtes Problem der Mechanik holonomer Systeme. Leningradsk. Gosudarst. Univ., Učenyje Zapiski Nr. 217, mat.-mech. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 31 28—49 (1957) [Russisch].

Si un système matériel est soumis à des liaisons nonholonomes et nonlinéaires d'une forme convenablement choisie, l'étude du mouvement d'un tel système peut être réduite à l'étude du mouvement d'un système auxiliaire holonome. Les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses généralisées dans les équations de Lagrange sont arbitraires dans le cas du système holomome, mais dans le cas du système nonholomome ces valeurs doivent satisfaire à des liaisons nonholonomes. L'A. analyse les équations de mouvement dans les deux cas et détermine plusieurs propriétés du mouvement qui sont analogues dans les deux cas. Quelques exemples sont donnés pour illustrer la théorie exposée.

C. Woronetz.

Novoselov, V. S.: Anwendung der nichtlinearen nichtholonomen Koordinaten in der analytischen Mechanik. Leningradsk. Gosudarst. Univ., Učenyje Zapiski Nr. 217, mat.-mech. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 31 50—83 (1958) [Russisch].

L'A. introduit les coordonnées nonlinéaires et nonholonomes dans les équations déterminant le mouvement d'un système matériel soumis à des liaisons nonholonomes. Une méthode est développée permettant de traiter le problème d'intégration des équations obtenues. Cette méthode généralise les méthodes connues dans le cas considéré. Une partie du travail est consacrée à la comparaison de plusieurs formes des équations du mouvement données par S. Čaplygin, P. Woronetz, G. Hamel, V. Volterra, L. Boltzmann, G. Maggi et autres savants, et à la discussion se rapportant à la possibilité d'appliquer ces équations dans les divers cas.

C. Woronetz.

Novoselov, V. S.: Die erweiterten Bewegungsgleichungen nichtlinearer nicht-holonomer Systeme. Leningradsk. Gosudarst. Univ., Učenyje Zapiski Nr. 217, mat.-mech. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 31, 84—89 (1957) [Russisch].

Dans deux notes précédentes (v. les rapports précédentes) l'A. a donné les équations sous la forme de Čaplygin et de Woronetz-Hamel pour des systèmes mécaniques nonlinéaires et nonholonomes. Ces équations ne peuvent pas servir à la détermination des réactions des liaisons nonholonomes. Dans le présent travail les

systèmes des équations sont complétés par des termes permettant de trouver ces réactions. Par la méthode exposée sont obtenues les solutions de deux problèmes particuliers. *C. Woronetz.*

Nožička, František: Les lignes géodésiques, asymptotiques et les lignes de courbure du point de vue de la mécanique d'un point matériel. Českosl. Akad. Věd, Apl. Mat. 4, 83—105, russ. und französ. Zusammenfassg. 105—108 (1959) [Tschechisch].

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, on considère une surface aux équations paramétriques $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3; a, b = 1, 2$) comme le lieu d'un point matériel et on suppose que cette surface soit plongée dans un champ de force défini par le vecteur de force F^α . Le mouvement du point matériel lié à la surface est décrit par le système d'équations $m \nabla_t d\eta^a/dt = B_\alpha^a F^\alpha$ ($B_\alpha^a = g_{\alpha\beta} g^{ab} \partial x^\beta / \partial \eta^a$, $g_{\alpha\beta}$ étant le tenseur métrique de la surface), où m signifie la masse du point matériel, t le temps et ∇_t est le symbole de la dérivation absolue. Les résultats principaux sont fournis par la description des lignes privilégiées de la surface du point de vue de la mécanique d'un point matériel: Le point matériel lié à la surface en cas d'absence de forces extérieures reste en repos, ou se meut sur la surface uniformément le long de la ligne géodésique. Si le trajet d'un point matériel lié à la surface correspond à une ligne asymptotique de la surface, la pression du point matériel à la surface est nulle. Si le point matériel lié à la surface parcourt une courbe telle que la pression totale a la valeur extrême dans chaque point de la courbe, il parcourt une ligne de courbure de la surface. *K. Svoboda.*

Quilghini, Demore: Sul principio dell'effetto giroscopico. Ricerche Mat. 7, 205—231 (1958).

In Ergänzung der Arbeiten von F. Stoppelli (dies. Zbl. 42, 178; 48, 174) über das Verhalten der Achse schneller Drehung des unsymmetrischen, schnellen Kreisels bestätigt Verf. zuerst dessen Ergebnisse durch ein abgeändertes Beweisverfahren, das nunmehr den Grenzübergang zu ebener Massenverteilung des Kreisels gestattet. Sei $T(O; i, j, k)$ im Stützpunkt O ein Hauptachsendreibein und gelte für die entsprechenden Drehmassen $A > B > C$ oder $A < B < C$ und außerdem $A + B = C$ (ebene Massenverteilung). Sei weiter $\omega_0 = p_0 i + q_0 j + r_0 k$ der Drehvektor für $t = 0$, wobei $p_0, q_0, 1/r_0$ von gleicher Ordnung klein sind, ferner M das eingeprägte Moment, so bleiben für $t > 0$ die Komponenten p und q des Drehvektors auch für

$r_0 \rightarrow \infty$ endlich (nicht unendlich klein), sofern der Vektor $k \times \int_0^t M d\tau$ für $r_0 \rightarrow \infty$

von endlichem Betrag (nicht unendlich klein) ist. D. h. im allgemeinen beharrt die Achse schneller Drehung eines unsymmetrischen Kreisels in ihrer räumlichen Lage um so weniger, je mehr dieser Kreisel ein ebener ist. Als Beispiel wird ein flacher Kreiszylinder (dünne Scheibe) untersucht. *K. Zoller.*

• **Schuler, Max:** Mechanische Schwingungslehre. Teil 1: Einfache Schwinger. 2. bearb. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1958. VIII, 158 S. mit 123 Bild. DM 15,—.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. in diesem Zbl. 37, 268.

• **Andronov, A. A., A. A. Vitt und S. É. Chaikin:** Theorie der Schwingungen. [Teorija kolebanij.] Überarbeitung und Ergänzungen von N. A. Železov. 2. Aufl. Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 915 S. R. 31,50 [Russisch].

In der vorliegenden 2. Auflage des 1937 erschienenen bekannten Werkes findet man einige Änderungen und Ergänzungen, die vor allem durch die inzwischen erschienenen Arbeiten und Resultate des Verf. und seiner Schüler bedingt sind; sie spiegeln die Entwicklung der Theorie der autonomen nichtlinearen Systeme mit einem Freiheitsgrad während der letzten zwanzig Jahre wider. Das Buch, das für

wissenschaftliche Mitarbeiter, Ingenieure und Techniker, die auf ihrem Arbeitsgebiet mit verschiedenen Schwingungsvorgängen in Berührung kommen, gedacht ist, behandelt in 10 Kapiteln die folgenden Problemkreise. Zunächst wird der lineare Oszillator mit einem Freiheitsgrad an Hand zahlreicher Beispiele aus der Mechanik und Elektrodynamik eingehend untersucht; dabei werden verschiedene Reibungsarten berücksichtigt. Der Leser wird mit der Darstellung der Prozesse durch das Phasenbild sowie mit Stabilitätsbegriffen vertraut gemacht. Es folgen die konservativen nichtlinearen Systeme, bei denen auch die Abhängigkeit von einem Parameter studiert wird; einige allgemeine Betrachtungen gelten den Bewegungsgleichungen, dem Variationsprinzip und der Analogie zwischen den Phasenbahnen und den Stromlinien einer stationären Flüssigkeitsströmung. Anschließend werden nichtkonservative Systeme erläutert; breiten Raum nehmen die dissipativen Systeme mit Coulombscher Reibung und vor allem die sehr schön dargelegte Theorie der Pendeluhren unter Berücksichtigung ihrer Selbststeuerung ein. Bei dynamischen Systemen 1. Ordnung werden die Entstehungsbedingungen von Kippschwingungen untersucht. Bei den Systemen 2. Ordnung wird im linearen Fall die übliche Klassifizierung der Singularitäten des Phasenbildes vorgenommen; ferner wird der Begriff des Grenzzyklus behandelt. Weitergehende topologische Betrachtungen betreffen die qualitative Theorie der Differentialgleichungen 2. Ordnung. Dann folgen Systeme mit zylindrischer Phasenfläche. Ein ausgedehntes Kapitel ist der Methode der Punkttransformation und ihrer Anwendung auf die Analyse stückweise-linearer Systeme vorbehalten. Zum Studium fastharmonischer Schwingungen bei nichtlinearen Systemen werden mehrere bekannte Näherungsverfahren eingeführt und an Beispielen erläutert. Das letzte Kapitel befaßt sich schließlich eingehend mit dem wichtigen Fall der sogenannten verborgenen oder parasitären Parameter, die das Auftreten von Relaxationsschwingungen zur Folge haben können. Dazu wie auch zu allen anderen Teilen des Buches werden zahlreiche ausgezeichnete Anwendungsbeispiele angeführt. Diese sind ein wesentliches Element der Darstellungsweise, die sich eng an die Praxis anlehnt.

R. Reißig.

Colombo, Giuseppe: *Sopra il problema del „lacet“.* J. Math. Mech. 7, 483—501 (1958).

Il problema tecnicamente importante e scientificamente interessante, del moto di serpeggiamento di una vagone ferroviario in moto sulla sua sede, ha trovato sin qui la sua trattazione più ampia nei volumetti di Rocard (La stabilité de route des locomotives, Paris 1935) in cui tuttavia il problema è affrontato nell'ambito linearizzato. — Nel presente lavoro il problema generale è affrontato in modo più ampio e approfondito, adottando tra l'altro una legge non lineare per le forze di pseudostrisciamento e approssimando con legge parabolica i profili di ruota e rotaia. Pur con l'adozione di varie semplificazioni quali quella di presupporre l'insieme vagone assali rigidamente connesso, trasferendo l'elasticità del sistema all'armamento, lo spostamento elastico funzione lineare delle forze che il vagone esercita sulle rotaie, il sistema delle equazioni dinamiche risulta molto complesso, non solo perché non lineare, ma perché i singoli gradi di libertà risultano tra loro accoppiati. Una ulteriore semplificazione, risultante dalla ipotesi di grande cedevolezza verticale dell'armamento, consente di ridursi allo studio di un sistema ridotto nelle incognite spostamento orizzontale trasversale alle rotaie del baricentro e angolo di serpeggiamento, tuttavia non lineare, che rappresenta una generalizzazione delle equazioni di Rocard. Nell'ambito linearizzato (anche per i profili di ruota e rotaia) e trascurando l'elasticità trasversale, questo sistema mostra che, conformemente ai risultati di Rocard, le oscillazioni sono instabili. L'A. riesce invece a dimostrare che il sistema non lineare da lui considerato, anche se si trascura l'elasticità trasversale della rotaia, implica che le oscillazioni siano limitate ed anzi arriva a determinare delle limitazioni per la loro massima ampiezza.

T. Manacorda.

Colombo, Giuseppe: Teoria del regolatore di Bouasse e Sarda. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 28, 338—347 (1958).

Verf. betrachtet ein mechanisches System von zwei Freiheitsgraden: auf einer Welle befindet sich eine Walze, von der über eine Schnur eine Masse m abgerollt wird. Die in Rotation versetzte Welle beeinflusst über ein Schubkurbelgetriebe eine vertikal an einer Feder schwingende Masse M . Diese Schwingungen wirken zurück auf die Drehungen der Welle. Es wird gezeigt, daß nicht nur die bei nichtlinearen Schwingungen bekannten Amplitudensprünge auftreten können, sondern daß auch ein bezüglich der Frequenz instabiler Bereich existiert. Bei stetiger Veränderung eines Parameters (z. B. der Masse m) springt die Frequenz nach Erreichen der Grenzen dieses Bereiches plötzlich auf einen anderen Wert. Bei umgekehrter Veränderung des Parameters erfolgt ein Zurückspringen bei anderen Frequenzen. Es existiert ein gewisser Hysteresebereich, wie er bezüglich der Amplitude von dem Verhalten erzwungener nichtlinearer Schwinger (z. B. beim Duffing-Problem) bekannt ist.

K. Magnus.

Coppel, W. A.: On the equation of a synchronous motor. Quart. J. Mech. appl. Math. 12, 242—256 (1959).

Verf. behandelt die Gleichung eines Synchronmotors mit konstanter Belastung $x'' + \alpha x' + \sin x = \beta$ [$\alpha, \beta > 0$]; für Phasenbahnbögen in der xy -Ebene ($y = x'$), die sich in der Form $y(x)$ darstellen lassen, kann man auch $y dy/dx + \alpha y + \sin x = \beta$ schreiben. Die wichtigste Frage gilt dem asymptotischen Verhalten der Lösungen $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$, vor allem seiner Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und den Parametern α, β . Mit diesen Problemen haben sich schon verschiedene Autoren befaßt, und der Verf. erwähnt zunächst einige bekannte qualitative Resultate. Es gibt zwei Lösungstypen $x(t)$: konvergente, die für $t \rightarrow \infty$ zu einem endlichen Grenzwert hinstreben und divergente, die sich wie die Summe aus einer periodischen und einer linearen Funktion verhalten. Divergente Lösungen $x(t)$ existieren stets dann und nur dann, wenn eine positive Lösung $y(x)$ mit $y(x + 2\pi) = y(x)$ vorhanden ist. Für $\beta > 1$ sind alle Lösungen divergent; für $\beta < 1$, $\eta = \beta/\alpha > \eta_c$ treten sowohl divergente als auch konvergente Lösungen auf und für $\beta < 1$, $\eta < \eta_c$ sind sämtliche Lösungen konvergent. Die quantitativen Ergebnisse betreffen bisher nur den Wert $\eta_c(\beta)$. Darum setzt sich Verf. das Ziel, Lösungen nach bekannten Näherungsverfahren zu berechnen. Hierbei berücksichtigt er, daß der Koeffizient α in den technischen Anwendungen meistens klein ist, so daß man das Problem als quasikonservativ ansehen kann. Die Grundgleichung nimmt Verf. zuerst in der allgemeineren Form $y dy/dx + g(x) = \alpha f(x, y)$

an, wobei $f(x + \omega, y) = f(x, y)$, $g(x + \omega) = g(x)$, $G(\omega) = \int_0^\omega g(x) dx = 0$, und

fragt nach einer positiven Lösung $y(x)$, $y(x + \omega) = y(x)$, für kleine Werte von α (Methode des kleinen Parameters). Sie geht aus einer bestimmten (erzeugenden) Lösung der Mannigfaltigkeit für $\alpha = 0$, $\frac{1}{2} Y(x)^2 + G(x) = C$ hervor. Der Parameter C dieser Lösung muß eine Wurzel der Gleichung $\varphi(C) = \int_0^\omega f(x, Y(x, C)) dx = 0$

sein. Verf. erörtert deren Lösbarkeit und die Stabilität der gefundenen periodischen Lösung. Außerdem stellt er Bedingungen auf, unter denen eine eindeutige bzw. überhaupt keine periodische Lösung existiert. Dann wendet er seine Resultate auf den eingangs erwähnten Sonderfall an und zeigt, wie man die Rechenergebnisse noch verbessern kann (Verfahren von Lindstedt). Anschließend lehnt er sich an das Verfahren von Kryloff-Bogoliuboff an, um beliebige Lösungen zu untersuchen. Zu diesem Zweck schreibt er die Ausgangsgleichung als $x'' + \sin x = \alpha(\eta - x)$. Im Fall $\alpha = 0$ existieren die Zwischenintegrale $W = \sin^2 \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x^2 = 1/k^2$; dann gilt in der ersten Viertelperiode nach dem Durchgang durch

die Gleichgewichtslage $x = 0$: $u = \frac{t}{k} = \int_0^{x/2} (1 - k^2 \sin^2 \xi)^{-1/2} d\xi$. Verf. führt für den Fall $\alpha > 0$ die beiden Größen k^{-2} , u als abhängige Variablen ein und findet für sie ein Differentialgleichungssystem, woraus er $d(k^{-2})/dt = O(\alpha)$, $du/dt = k^{-1} + O(\alpha)$ schließt. Die Integration wird nach der Methode der langsam veränderlichen Amplitude und Phase ausgeführt. Die Auswertung der Resultate ergibt folgendes: Im Fall $\eta < 4/\pi$ konvergieren für $t \rightarrow \infty$ alle Lösungen $x(t)$ gegen einen endlichen Grenzwert, aber im Fall $\eta > 4/\pi$ konvergieren nur diejenigen Lösungen, bei denen anfänglich $x < 0$ oder $\sin^2 \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x^2 \leq 1$. Die übrigen verhalten sich hingegen so, als ob x der Drehwinkel eines umlaufenden Pendels der Länge g wäre.

R. Reißig.

Harvey, T. J.: Natural forcing functions in nonlinear systems. J. appl. Mech. 25, 352—356 (1958).

Verf. behandelt das Problem der Resonanz ungedämpfter nichtlinearer Systeme zweiter Ordnung mit dem Ziel, gewisse „natürliche“ Erregerfunktionen zu bestimmen, die es gestatten, eine allgemeine Gleichung zwischen den Amplituden der ausgeübten Kraft und der Rückstellkraft aufzustellen. Eine Kritik an der Zielsetzung liegt auf der Hand: Die Erregerkraft ist im allgemeinen vorgegeben und kann daher nicht so gewählt werden, daß die Bewegungsdifferentialgleichung in irgendeiner Hinsicht möglichst einfach wird. Verf. geht von der Annahme aus, daß die freien Schwingungen, für die die Gleichung $\ddot{y} + \omega_n^2 f(y) = 0$ besteht, hinreichend bekannt sind und reduziert nun das Problem der erzwungenen Schwingungen, die durch eine partikuläre Lösung $y(t)$ der Gleichung $\ddot{y} + \omega_n^2 f(y) = E(t)$ dargestellt werden, auf das der freien Schwingungen, indem er die natürliche Erregerfunktion $E(t) = K f(y(t))$ einführt. Dadurch erhält er für die erzwungenen Schwingungen die Gleichung $\ddot{y} + (\omega_n^2 - K)f(y) = 0$. Jede Lösung dieser Gleichung ergibt sich zwischen den Maximalausschlägen b und $a > b$ durch zweimalige Differentiation als $t = \int_b^y \left[-2(\omega_n^2 - K) \int_b^{y_1} f(y_2) dy_2 \right]^{-1/2} dy_1$, so daß die zugehörige Periode

$$T = 2(\omega_n^2 - K)^{-1/2} \int_b^a \left[-2 \int_b^{y_1} f(y_2) dy_2 \right]^{-1/2} dy_1 = J(a) [\omega_n^2 - K]^{-1/2}$$

beträgt. Hieraus berechnet Verf. $K = \omega_n^2 (1 - J^2/\omega_n^2 T^2)$ oder $\delta = K/\omega_n^2 = 1 - (T_n/T_0)^2 (T_0/T)^2$, wobei T_n die Periode der freien Schwingungen ($K = 0$) mit der Amplitude a und T_0 eine passende Bezugszeit, nämlich T_n für $a = 0$ bezeichnet. Als Beispiel nimmt nun Verf. $T_n/T_0 = (1 + m^2)^{-1/2}$ an, wobei $m = f(a)$ die Amplitude der Rückstellkraft ist, und berechnet die Resonanzkurve im Achsenkreuz $(m, T_0/T)$. Dann wendet er sein Verfahren auf das lineare und das Duffing'sche System an und bestimmt die natürlichen Erregerfunktionen sowie die Resonanzkurven, die er im zweiten Beispiel mit den durch Näherungsverfahren für den Fall harmonischer Erregung gewonnenen Diagrammen vergleicht. R. Reißig.

Mitterlehner, G.: Die Lenkstabilität des luftbereiften Kraftwagens gegenüber kleinen Störungen. Ingenieur-Arch. 27, 88—103 (1959).

Untersucht wird die Fahrzeugstabilität gegenüber von der Fahrbahn her oder durch Luftkräfte bewirkten Störungen unter Einführen eines vereinfachten Ersatzsystems von drei Freiheitsgraden: Flattern der Vorderräder, Seitenschiebung und Gierschwingung (um die Hochachse) des Fahrzeuges, während der Einfluß der Federungen einer späteren Untersuchung vorbehalten bleibt. Bei Behandlung zunächst ohne den sogenannten Nachlauf des Lenkzapfens zeigt sich, daß bei genügend hoher Frequenz der Lenkschwingung die Fahrzeugbewegung auch ohne Dämpfung — in passend definiertem Sinne — stabil ist, womit der wesentliche Einfluß dieser Frequenz hervortritt. Bei Berücksichtigung des Nachlaufes n wird die wesentlich verwickeltere Stabilitätsuntersuchung an Hand eines (n, v) -Diagrammes (Fahrzeuggeschwindigkeit

keit v) mit den Frequenzen als Parametern durchgeführt. Bei zusätzlicher Berücksichtigung der Luftkräfte erweist sich vor allem der Luftwiderstand infolge der durch ihn bewirkten Entlastung der Vorderräder als entstabilisierend. In jedem Falle läßt sich eine gewisse Mindestgröße des Nachlaufes n angeben, für die die Bewegung stabil bleibt.

R. Zurmühl.

● **Wickleder, Karl-Heinz:** Die mathematische Behandlung der Bewegungsvorgänge von Körpern auf einer bewegten Fläche und deren Anwendung im Bergmaschinenbau. (Freiberger Forschungshefte. A 91.) Berlin: Akademie-Verlag 1958. 51 S. Brosch. DM 6,—.

Wie Verf. in der Einleitung mitteilt, behandelt seine Arbeit die Bewegung eines Körpers auf einer biegsamen Fläche F , die auf einer Unterlage F' mit konstanter Geschwindigkeit gleitet; die Fläche F' soll durch die Gesamtheit der Binormalen einer ebenen Kurve K gebildet werden. Auf den Körper wirken Schwerkraft und Festreibung ein. Solche Vorgänge spielen sich beim Transport von Massen mit Hilfe von Förderbändern ab, wobei die ebene Kurve oft eine Gerade ist. Soll mit einem möglichst kurzen Band eine maximale Fördergeschwindigkeit erzielt werden, so entsteht das Problem, diese an jeder Stelle des Bandes zu berechnen. Verf. bildet zunächst die Bewegungsgleichungen des Körpers auf der bewegten Fläche und berechnet daraus dessen Relativgeschwindigkeit. Dann diskutiert er den allgemeinen Bewegungsvorgang und betrachtet den Fall, daß die Kurve K in Parameterdarstellung vorliegt. Er erweitert seine Resultate auf eine allgemeinere Klasse von Kurven und gibt Näherungsverfahren zur Berechnung seiner Geschwindigkeitsformeln an. Ferner geht er kurz auf das mit der betrachteten Aufgabe zusammenhängende Variationsproblem ein. Auf Grund seiner Resultate berechnet Verf. die wichtigsten Betriebsdaten einer Vorsatzschleuder (Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad, optimale Bandgeschwindigkeit und Einfluß der Anfangsbedingung). Er vergleicht die Daten bei einigen speziellen Kurvenformen (Kreis, Zykloide, Kreisevolvente, logarithmische Spirale). Im letzten Teil seiner Arbeit widmet er sich experimentellen Untersuchungen, die die Brauchbarkeit der Theorie bestätigen.

R. Reißig.

Meyer zur Capellen, W.: Die Beschleunigungsänderung. I. Ingenieur-Arch. 27, 53—65 (1959).

Die Ermittlung der Beschleunigungsextrema eines Getriebegliedes ist durch das Nullsetzen der als Ruck bezeichneten dritten Ableitung des Weges nach der Zeit möglich. Dafür werden Sätze über den Ruck aufgestellt, zunächst für Schiebung und Drehung. Der Satz von Euler für eine Zweipunktführung wird auf den Ruck erweitert. Die Punktbahnkomponenten des Ruckes bei reiner Drehung, bei elliptischem Bahnverlauf und bei beliebiger Bahn werden bestimmt. Dann werden die Ruckkomponenten einer bewegten Ebene entwickelt. Hierfür lassen sich Gleichungen zweier Kreise finden, ähnlich den Bresschen Kreisen mit den Schnittpunkten im Momentanpol und Beschleunigungspol, hier mit Schnittpunkten im Momentanpol und Ruckpol: Der Tangentialkreis als geometrischer Ort der Punkte, für die die Normalkomponenten des Ruckes verschwinden, der Normalkreis entsprechend bei Verschwinden der Tangentialkomponenten. Der Ruck des Momentanpols wird berechnet. Für Punkte, welche momentan ein Extremum der Tangentialbeschleunigung besitzen, errechnet sich als geometrischer Ort eine Kurve vierter Ordnung. Für die Relativbewegung werden die Beziehungen der Relativbeschleunigung und des Relativruckes abgeleitet.

A. Hückler.

Munteanu, Octavian: Das Studium der Bewegung eines Kurvengetriebes durch Fouriersche Reihen. Bul. Inst. Politehn. Iaşi, n. Ser. 3 (7), Nr. 3/4, 211—212, russ. und deutsche Zusammenfassg. 212 (1957) [Rumänisch].

Si stabiliscono i sviluppi in serie Fourier concernenti le leggi di spazio-tempo, di velocità-tempo e di accelerazione-tempo spettanti al moto di una camma.

D. J. Mangeron.

Noli, W.: Über Schraubentriebe mit parallelen Achsen zur kombinierten Grob- und Feineinstellung. *Z. angew. Math. Mech.* 39, 19—24 (1959).

Bei Paarung von Schraubenmutter und Schraubenspindel mit geringem Spiel ergeben sich Schraubentriebe, die je nach Art des Formschlusses verschiedenen, d. h. groben oder feinen Vortrieb liefern. Verf. stellt nun die Bedingung für die Linienberührung der hierfür benötigten Schraubenflächenpaare dar und zeigt die Wege zu ihrer Formgebung.

W. Meyer zur Capellen.

Rešetov, L. N.: Konstruierung rationeller Mechanismen. *Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 3 (7), Nr. 3/4*, 185—194, deutsche Zusammenfassg. 194 (1957) [Russisch].

L'A., prendendo le mosse dalla constatazione che le deviazioni nelle dimensioni degli organi componenti un meccanismo non ne esercitano l'influenza sensibile sulle forze trasmesse nel caso in cui il meccanismo considerato costituisce un sistema staticamente determinato, e cioè sia privo dei legami passivi, espone i calcoli concernenti l'argomento e ne dà un numero di esempi di costruzione di tali meccanismi.

D. J. Mangeron.

Zil'berman, Ja, S. (I. S.): Application de la théorie des accélérations réduites à l'analyse cinématique des mécanismes plans de troisième classe. *Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 3 (7), Nr. 1/2*, 165—172, français. Zusammenfassg. 173 (1957) [Russisch].

Mangeron et Dragan (ce *Zbl.* 78, 137; 81, 182) ont élaboré une simple méthode grapho-analytique originale et générale de l'analyse des mécanismes plans d'un grand intérêt pour la théorie et pour la pratique. Dans cet article on expose, en se basant sur la théorie des accélérations réduites, une méthode purement géométrique de l'analyse cinématique des mécanismes plans de 3. classe. Cette analyse est faite couramment par la méthode des lieux géométriques ou celle des points d'Assour. Toutes ces méthodes ont l'inconvénient d'avoir dû appeler tant aux constructions supplémentaires quant aux tracés des plans des vitesses et des accélérations. Cette méthode géométrique n'exige pas la construction des points d'Assour ou celle des plans des vitesses et des accélérations. Les résultats acquis peuvent être utilisés dans la pratique des analyses cinématiques des mécanismes plans à plusieurs organes. La théorie des accélérations réduites peut être appliquée à la détermination des rayons et des centres de courbure des trajectoires des points d'un mécanisme plan par une voie purement géométrique. Un exemple de l'analyse cinématique d'un mécanisme à six organes de la classe est donné. *D. Rašković.*

Elastizität. Plastizität:

Doyle, Thomas C.: Higher order invariants of stress or deformation tensors. *J. Math. Physics* 36, 297—305 (1958).

Einige Probleme der nichtlinearen Elastizitätstheorie können deswegen gelöst werden, weil die elastische Dehnungsenergie eines elastischen isotropen Stoffes in den drei Invarianten der Ordnung Null des metrischen Tensors g_{ij} und des Cauchy-Greenschen Deformationstensors c_{ji} ausgedrückt werden kann. Es wird vermutet, daß man eine Theorie entwickeln kann, die nach entsprechender Anwendung der Invarianten der Ordnung $p \geq 1$ verlangt. Man hat dann die Frage zu lösen, wieviel solche funktionell unabhängigen Invarianten es gibt und wie sie zu bilden sind. Zunächst wird ein Fundamentalsystem der Ordnung p von irrationalen Invarianten des metrischen Tensors g und eines Zweiindex-Gattungstensors a abgeleitet, sodann für $p = 1$ ein rationales Fundamentalsystem von 18 Invarianten. Wird die Allgemein-

heit von a physikalisch beschränkt, etwa durch Einsetzen eines Spannungstensors eines bei Fehlen von Körperkräften im Gleichgewicht befindlichen Festkörpers, so werden die 21 Fundamentalinvarianten der Ordnung $p \leq 1$ voneinander abhängig.
J. Pretsch.

● Iosipescu, N.: Einführung in die Fotoelastizität. [Introducere în fotoelasticitate.] Bd. I. (Academia Republicii Populare Romîne, Știință și Tehnică. 12.) Bucu-rești: Editura Tehnică. 1958. 190 S. Lei 6,00 [Rumänisch].

L'A. donne, dans ce premier volume, les notions générales qu'on doit avoir pour pouvoir comprendre les résultats expérimentaux de la photoélasticité et pour pouvoir les interpréter du point de vue théorique. On présente, dans la I^{ère} partie, des notions d'élasticité bidimensionnelle: les équations générales en coordonnées cartésiennes, l'application des polynômes biharmoniques, les équations en coordonnées polaires. Une étude spéciale est consacrée aux courbes caractéristiques et à leurs équations ainsi qu'aux points singuliers. La II^{ème} partie est consacrée aux notions d'optique ondulatoire: la production et la transmission des ondes de lumière, les phénomènes d'interférence et la polarisation plane et circulaire. Dans la III^{ème} partie on donne des notions de photoélasticité: la biréfringence accidentale, les courbes caractéristiques et leur utilisation, les conditions de similitude, les méthodes supplémentaires expérimentales, les possibilités d'étude. La IV^{ème} partie s'occupe des divers appareils, des dispositifs utilisés et des matériaux. L'exposition est d'autant plus intéressante que l'A. est lui-même un bien connu expérimentateur.
P. P. Teodorescu.

Jakubovič (Jakubovich), V. A.: On the dynamic stability of elastic systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 602—605 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet elastische dynamische Systeme, die im ungestörten Zustand durch eine Gleichung $dx/dt = Cx$ und im gestörten Zustand in der Form $dx/dt = A(\theta t)x$ beschrieben werden; dabei soll C eine konstante Matrix mit lauter rein imaginären Eigenwerten und $A(\tau)$ eine periodische Matrix, $A(\tau + 2\pi) = A(\tau)$ darstellen. Die Frequenz $\theta > 0$ nennt er Resonanzfrequenz, wenn für ein beliebiges

$\varepsilon > 0$ eine Matrix $A(\tau)$, $\int_0^{2\pi} \|A(\tau) - C\| d\tau < \varepsilon$, existiert, so daß die gestörte Gleichung für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkte Lösungen besitzt. Die Frequenz $\theta_0 > 0$ heißt

kritisch, wenn es zu beliebigen $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ eine Matrix $A(\tau)$, $\int_0^{2\pi} \|A(\tau) - C\| d\tau < \varepsilon$,

und eine Zahl θ , $|\theta - \theta_0| < \delta$, gibt, so daß die gestörte Gleichung für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkte Lösungen zuläßt. Von besonderem Interesse für die Anwendungen ist der Fall $d^2y/dt^2 + P_0 y = 0$, wo die gestörte Gleichung $d^2y/dt^2 + P(\theta t)y = 0$ oder spezieller $d^2y/dt^2 + [P_0 + \varepsilon Q(\theta t)]y = 0$ lautet. Im letzten Fall bildet in der $\varepsilon\theta$ -Ebene die Gesamtheit der Punkte, für die unbeschränkte Lösungen auftreten, den Bereich der dynamischen Instabilität. Verf. zitiert ohne Beweis Sätze über dessen Abgrenzung, insbesondere über den Zusammenhang zwischen den Eigenfrequenzen und kritischen Frequenzen sowie über deren Bedeutung für die Stabilitätsgrenze. Zwei Beispiele werden durchgerechnet.
R. Reiffig.

Klein, Bertram: A simple method of matrix structural analysis. IV: Nonlinear problems. J. Aero-Space Sci. 26, 351—359 (1959).

The method presented in the previous parts (s. this Zbl. 77, 237; 78, 228; 80, 183) is employed to solve various kinds of nonlinear problems, such as problems concerning large deflections or buckling, or thermal creep, or inelastic stress redistributions involving thermal gradients, or design. The procedure used in each case is one of direct iteration — i. e., after one assumes a starting point all subsequent cycles are self-generating. Simple numerical examples are worked out.
Author's summary.

Naleszkiewicz, J.: Energy levels in dynamics of elastic systems. Proc. 2nd Congr. theor. appl. Mech., New Delhi 1956, Oct. 15—16, 111—126 (1957).

Verf. bemüht sich, die Begriffe Energieniveau und Energiequant in die Theorie der Bewegungsvorgänge dynamischer Systeme einzuführen. Dabei geht er von der Vorstellung aus, daß ein solches System, zu dem mehrere stabile Gleichgewichtslagen gehören, unter dämpfenden Einflüssen je nach seinen Anfangsbedingungen zu einer dieser Lagen asymptotisch hinstrebt und somit letzten Endes nur einer Reihe diskreter Energiebeträge fähig ist. Die ungedämpften Bewegungen, zu denen ein Kontinuum von Energiewerten gehört, sind streng genommen nicht realisierbar. Verf. untersucht als Beispiel eingehend einen einfachen Schwinger mit nichtlinearer Rückstellkraft und verfolgt dessen Bewegung in einer xH -Ebene, wobei x der Ausschlag und H die Gesamtenergie, $H = H_p + H_k$ ist. In dieser Ebene wird die der potentiellen Energie H_p entsprechende Kurve eingetragen; ihre Maxima gehören zu instabilen und ihre Minima zu stabilen Gleichgewichtslagen. Während die augenblickliche Bewegungsphase im reibungsfreien Falle durch einen Punkt, der auf einer durch die Anfangsbedingungen bestimmten Horizontalen hin- und herwandert, dargestellt wird, läuft der Bildpunkt im Falle der Dämpfung auf einer ständig abfallenden Bahn. Diese untersucht der Verf. bei verschiedenen Reibungsgesetzen und entwickelt auch graphische Konstruktionsverfahren. Schließlich behandelt er das Problem, wie man aus der Anfangslage auf die letztlich angestrebte Gleichgewichtslage schließen kann.

R. Reißig.

Paria, Gunadhar: Axisymmetric consolidation for a porous elastic material containing a fluid. *J. Math. Physics* 36, 338—346 (1958).

Die von Biot entwickelte Theorie der Deformation eines elastischen porösen Stoffes, der eine kompressible Flüssigkeit enthält, wird auf axialsymmetrische Deformation ausgedehnt. Das Problem des halbumendlich ausgedehnten, mit Oberflächenkräften belasteten Mediums wird mit Laplace-Hankel-Transformierten gelöst. Als Beispiel für die Berechnung der Spannungen und Dehnungen wird die axiale Normalspannung behandelt.

J. Pretsch.

Vodička, Václav: Ein durch allgemeine Massenkräfte beanspruchtes unendliches elastisches Medium. *Z. angew. Math. Mech.* 39, 2—8 (1959).

L'A. utilise la transformée tridimensionnelle de Fourier pour étudier le problème d'un milieu infini, actionné par des forces massiques quelconques. Il réussit ainsi de donner la forme explicite des composantes du tenseur tension. En particulier on retrouve les résultats bien connus pour une force concentrée intérieure. Ces résultats généralisent ceux donnés par J. Sneddon (*Fourier Transforms*, New York 1950) pour le cas bidimensionnel.

P. P. Teodorescu.

Barr, Allan D. S.: Cross-section distortion and the Timoshenko beam equation. *J. appl. Mech.* 26, 143—144 (1959).

Berücksichtigt man bei der Untersuchung der Biegeschwingungen von Stäben die Schubspannungen, so muß man auch die Verwölbung der Querschnitte beachten. Die Form der von Timoschenko für die Durchbiegung abgeleiteten Differentialgleichung bleibt erhalten, nur der Koeffizient, durch den die Schubspannungen berücksichtigt werden, nimmt eine etwas andere Gestalt an. Für den Rechteckquerschnitt erhält man $\frac{5}{6}$ statt $\frac{2}{3}$ und für den Kreisquerschnitt $\frac{9}{10}$ statt $\frac{3}{4}$.

A. Weigand.

Brandt, Andrzej and Józef Ignaczak: The form of a cantilever beam. *Rozprawy inż.* 6, 167—179, russ. und engl. Zusammenfassg. 179—180 (1958) [Polnisch].

Il s'agit des poutres en béton précontraint de sections rectangulaires, par exemple des poutres-dalles horizontales soumises au poids propre, aux surcharges uniformément réparties le long de la poutre et aux forces et moments fléchissants donnés, agissant à l'extrémité libre. Leur forme est déterminée suivant la condition de minimum du potentiel interne total contenu dans une poutre d'un volume constant donné. Cette condition est identique à celle de minimum de matériel et

de potentiel interne total constant. On démontre que ces conditions sont remplies si les valeurs extrêmes des contraintes sont égales en chaque section, et le problème se réduit à la recherche des poutres d'égale résistance. Il est à remarquer que si l'on prend pour mesure de rigidité l'inverse du potentiel, ces conditions conduisent à la recherche des constructions les plus rigides formées d'un volume donné de matériel, ou à des constructions de minimum de matériel et d'une rigidité donnée. On considère deux cas. Le premier, celui d'une poutre précontrainte par un câble horizontal, parallèle à la surface supérieure. En ce cas on cherche la fonction donnant le tracé de la surface inférieure d'après la condition d'égales contraintes minimum à la surface supérieure. Le second, celui d'une poutre précontrainte par un câble courbe; la surface supérieure de la poutre est horizontale. En ce cas on a à déterminer deux fonctions inconnues: l'une — donnant le tracé de la surface inférieure, l'autre — le tracé du câble. On les détermine d'après les conditions d'égales contraintes minima à la surface supérieure et d'égales contraintes maxima à la surface inférieure. En premier cas on obtient une équation intégrale nonlinéaire qui, dans de certaines conditions, prend la forme d'une équation de Volterra de seconde espèce, ou bien d'une équation algébrique. La solution générale du problème est ramenée à une intégrale elliptique. On donne aussi une solution approximative sous forme d'un polynôme. En second cas on trouve une solution générale d'une forme fermée et une solution plus simple en forme d'un développement. Les deux cas sont illustrés par des exemples numériques. On conclue que les résultats obtenus sont applicables en pratique et peuvent donner une économie considérable du matériel. Si les surcharges ne sont pas grandes par rapport au poids propre le tracé du câble ne diffère pas beaucoup d'une droite. La courbure de la surface inférieure de la poutre, contrairement à l'usage des constructeurs, n'est pas d'un signe constant; il y a un point d'inflexion situé vers la moitié de la portée et vers l'encastrement, la surface de l'intrados est convexe.

Z. Wasiutyński.

Chattarji, P. P.: Torsion of composite epitrochoidal sections. *Z. angew. Math. Mech.* 39, 135—138 (1959).

L'A. étudie le problème de la torsion des barres qui ont une section transversale formée par deux domaines concentriques et épitrochoïdes, correspondant à des corps élastiques, isotropes, homogènes et faits de deux matériaux différents. On utilise la théorie des fonctions de variables complexes; on fait une transformation conforme du domaine (les deux frontières) sur un domaine limité par deux cercles concentriques (problème dont la solution est bien connue). L'A. donne des indications aussi pour d'autres courbes frontière. L'extension à un nombre quelconque de matériaux est immédiate.

P. P. Teodorescu.

Chen, Shu-tao: On the repeated procedures in designing suspension bridges. *Science Record*, n. Ser. 1, Nr. 3, 53—58 (1957).

On indique une manière d'ordonner les calculs de dimensionnement des ponts suspendus ayant pour but d'éviter aussi que possible la nécessité de reprendre plusieurs fois la voie de fausse position. On déduit les formules pour la force horizontale H , les moments fléchissants maximum M dans la poutre de rigidité de même que les coefficients auxiliaires et en partant des dimensions acceptées dans un avant-projet on propose suivre une voie consistant à calculer les valeurs extrêmes de la poussée et des moments fléchissants, puis à corriger la section de la poutre de rigidité et de déterminer les valeurs définitives des moments fléchissants. Pour faciliter les calculs on a tabélarisé les formules, mais ces tables ne sont pas contenues dans cette publication. De même les conditions de convergence de la voie proposée ne sont pas discutées et les conditions dans lesquelles les formules étaient déduites ne sont pas indiquées.

Z. Wasiutyński.

Chen, Shu-tao: Analysis of open-webbed arches. *Science Record*, n. Ser. 2, 263—269 (1958).

Cette étude a pour sujet des arcs soutenant des poutres horizontales par des montants verticaux; ce sont par exemple des ponts-arcs à tablier supérieur. On regarde ces systèmes comme des poutres Vierendeel à membrure inférieure courbe. Plusieurs cas sont distingués: section constante et variable de l'arc, arcs à deux, trois et sans articulations. La méthode de solution est élémentaire. Une voie d'approximations successives et plusieurs simplifications sont indiquées. On fait rappel des travaux de C. B. McCullough, E. S. Thayer, M. Roš, G. E. Beggs, L. P. Popova, N. I. Polivanov, I. M. Rabinovič. L'A. est d'avis que le but d'application de ces constructions est le même que celui des poutres Vierendeel; cet avis semble être discutable, car le rôle d'un arc est autre que celui d'une membrure inférieure, et les montants soutenant le tablier servent à transmettre des charges verticales et non des moments, comme c'est le cas dans les poutres Vierendeel.

Z. Wasiutyński.

Dabrowski, Ryszard: The torsion of thin-walled bridge and hydraulic structures with closed cross-sections. *Rozprawy inż.* 6, 281—344, russ. und engl. Zusammenfassg. 344—346 (1958) [Polnisch].

Ce mémoire comprend l'étude des déformations et des contraintes dues à la torsion des poutres en caisson à parois minces. Il se rapporte à des constructions en acier ou en béton, des travées des ponts et des secteurs mobiles des barrages, de sections constantes, symétriques par rapport à l'axe vertical, avec deux ou plusieurs âmes verticales ou obliques, composées d'un ou de plusieurs contours fermés et réunis par une membrure supérieure horizontale et bornée par les âmes extérieures ou prolongées en consoles, et des membrures inférieures continues ou discontinues. Ce sont surtout les constructions des ponts-poutres modernes en tôle ou en béton, d'ont la largeur de la voie surpasse la largeur de la poutre. Dans de telles poutres les surcharges mobiles évoquent des torsions considérables et causent des contraintes additionnelles tangentielles et normales. Cette étude est divisée en cinq parties. La première contient une description de l'état actuel des théories de torsion des poutres à parois minces et un rappel sommaire des travaux de E. Reissner, H. Ebner, A. Grzedzielski, A. A. Umanski, F. W. Bornscheuer, S. Timoshenko, S. U. Benscotter. La seconde partie est une description des formes et des propriétés mécaniques des poutres des ponts modernes et des secteurs mobiles des barrages. La troisième partie expose la théorie de torsion dans l'hypothèse que les sections ne se déforment pas transversalement. Le cas de torsion pure est examiné de même que les déplacements longitudinaux libres ou restreints à des certaines conditions dans des sections données. L'A. suit la théorie développée par A. A. Umanski. Les équations générales sont appliquées à l'étude des cas particuliers. Cette partie se termine par l'indication de la possibilité de simplification des formules générales. La quatrième partie contient une généralisation des résultats précédents aux cas des sections en caisson avec des membrures en consoles, l'étude numérique des diverses sections soumises à des charges excentriques, concentrées ou continues et l'examen des poutres courbes d'un constant rayon de courbure horizontale. La cinquième partie expose l'étude des poutres à sections déformables transversalement et munies des pannes. Ce mémoire est un abrégé d'un cours lithographié publié par l'Ecole Polytechnique de Gdańsk en 1958.

Z. Wasiutyński.

Johnson, W.: Experiments in the cold extrusion of rods of non-circular section. *J. Mech. Phys. Solids* 7, 37—44 (1958).

Lampsi, B. B.: On the limit of equilibrium of the steel beams. *Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser.* 4(8), Nr. 1/2, 381—393, engl. Zusammenfassg. 393—394 (1958) [Russisch].

Elastic-plastic bending of a steel beam is analysed as a plane stress problem. Equations of the deformation theory of plasticity are accepted and an assumption

is made that the law of distribution of strains over the cross-section in the elastic range remains valid also in the plastic region. Assuming Huber-Mises yield condition to be valid, the corresponding equation of the yield surface in terms of bending moment, shear force, and intensity of loading is derived. Stress distribution at the plastic hinge for a rectangular and Γ -shaped cross-sections is obtained. No comparison is given of the limit load obtained according to the proposed approach and that evaluated using the simplified theory, based on one dimensional state of stress at the plastic hinge. In the reviewer's opinion the assumption concerning the strain distribution in the plastic region is not justified and besides is not necessary to the exact solution of the problem if the deformation theory is used consistently. *A. Sawczuk.*

Langefors, B.: Theory of aircraft structural analysis. Z. Flugwiss. 6, 281—291 (1958).

Im Aufsatz werden Matrizenrechnungen beschrieben, mit deren Hilfe Konstruktionen insbesondere für den Flugzeugbau sich statisch berechnen lassen. Der besondere Vorteil ist darin zu erblicken, daß bei Konstruktionsänderungen zum Zwecke besserer Gestaltung bzw. Materialausnutzung die Rechnung sehr vereinfacht werden kann, wenn man bei der Aufstellung der Gleichungen und Matrizen entsprechend vorgeht. Die Auswirkung von Änderungsmaßnahmen läßt sich so bis zu einer optimalen Konstruktion verfolgen. Algebraische Axiome beschreiben die Elemente und ihren Zusammenhang in einem Knotensystem. Dadurch, daß die Matrix für die Einleitung der Verschiebungen in das System in die für die Ableitung der Kräfte aus der Struktur umgewandelt werden kann, braucht bei solchen als „cotransferent“ bezeichneten Systemen nur die leichter zu behandelnde Matrix berechnet zu werden. Die Anwendung des Verfahrens auf einige allgemeine Fälle wird behandelt, so für aus Teilen zusammengesetzte Konstruktionen, oder durch Herausschneiden von Teilen usw. geänderte Konstruktionen; weiter wird angeführt, daß durch Orthogonalisieren gegenüber der üblichen Gaußschen Elimination ungeeignete Matrizen vermieden, Fehler bei der Aufstellung und Rechnung der Matrizen leichter abgeschätzt und die Gleichungen näherungsweise gelöst werden können. Schließlich wird die Aufstellung von Matrizen für Gerberträger mit Querkraftfläche und von schubbeanspruchten Platten (shear field) gezeigt. Verf. beabsichtigt, später Einzelheiten bez. Anwendung des Verfahrens sowie Routinerechnung mitzuteilen, woraus eine bessere Beurteilung möglich sein wird. Eine Bestätigung der Ergebnisse durch Messung wäre wünschenswert. *E. Krägeloh.*

Pan, Chia-cheng: Analysis of stepped beams on spring-foundation. Sci. Sinica 7, 856—870 (1958).

Cette étude a pour but d'ordonner et de faciliter la recherche des forces intérieures et déformations des éléments fléchis de section variable, soumis à des réactions élastiques proportionnelles aux flèches et distribuées d'une manière continue. Il s'agit surtout des dalles de fondation de sections variables par gradins. Le point de départ de cette étude est l'équation de E. Winkler et H. Zimmermann. On déduit des formules générales pour le calcul des forces internes et des déformations aux abouts des tronçons de la poutre. On obtient ainsi des équations pour déterminer les constantes pareillement qu'en cas des poutres à béquilles. Les fonctions qui entrent dans ces calculs furent tabélarisées. On donne des exemples numériques et on indique divers cas d'application. On ne discute pas les limites dans lesquelles cette méthode donne des résultats suffisamment exactes, ni la grandeur des erreurs qui peuvent intervenir à cause de concentration des déformations auprès des points de discontinuité des sections, ou à cause de la non-homogénéité du sol et des déformations dues aux efforts tranchants. *Z. Wasiutyński.*

● **Novozhilov, V. V.: The theory of thin shells.** Transl. by P. G. Lowe. Edited by J. R. M. Radok. Groningen: P. Noordhoff Ltd. 1959. XVI, 376 p. Dfl. 36.00; \$ 9.50.

Cet ouvrage est la traduction en langue anglaise de l'édition originale publiée en 1951 en Union Soviétique (v. ce Zbl. 45, 445). L'A. est un spécialiste de la théorie des coques minces à laquelle il apporte, depuis près de 20 ans, d'intéressantes contributions originales. Le 1. chapitre est consacré à la théorie générale des coques minces. Après une introduction géométrique, on étudie les déformations et tensions, les équations de la statique et les conditions aux limites. L'A. met ensuite les équations de la théorie des coques sous une forme originale, découverte par lui en 1946 et basée sur l'introduction de forces et déplacements complexes, qui servira de point de départ pour les applications traitées dans les chapitres ultérieurs. — Le 2. chapitre expose l'approximation constituée par la théorie des membranes qu'il établit d'abord et applique ensuite aux coques présentant les principales formes usuelles. Ce chapitre s'inspire des recherches de Sokolovskij, N. Rabotnov et V. Z. Vlasov. — Dans le 3. chapitre, les équations plus rigoureuses obtenues au chap. I. sont appliquées à l'étude des coques cylindriques. Les résultats obtenus par l'A., Vlasov, G. I. Džanelidze, A. L. Gol'denweizer, A. I. Luře, Ch. M. Muštari etc. pour les coques et plaques cylindriques dans le cas de diverses sections droites y sont exposés. — Le 4. chapitre traite des coques de révolution qui sont également étudiées par la méthode des fonctions complexes. Les équations aux déformations sont intégrées par diverses méthodes et des applications à plusieurs cas particuliers sont examinées. Dans sa préface à cette traduction, l'A. rappelle qu'il n'a pas été tenu compte de recherches postérieures à 1950, ce qui apparaît également lors de la consultation de la bibliographie assez complète, surtout en ce qui concerne les travaux écrits en russe, placée en fin de volume. Toute la théorie de l'élasticité non linéaire qui se développe actuellement est donc passée complètement sous silence et les contributions fondamentales de Truesdell aux hypothèses de base de toute mécanique des milieux élastiques ne sont pas mentionnées. A cause de ces lacunes, sans doute volontaires, ce livre ne s'adresse pas aux physiciens théoriciens mais, à notre avis, à l'ingénieur des constructions civiles et au mathématicien appliqué. A ces derniers il pourra rendre de grands services, non seulement par la clarté et la précision du mode d'exposition, mais aussi grâce aux nombreuses remarques historiques et critiques qu'il renferme et aux méthodes de calcul qu'il met au point.

N. Forbat.

● Yitzhaki, David: *Prismatic and cylindrical shell roofs*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1959. VII, 253 p. Guilders 42,—.

Das Buch bringt Berechnungsmethoden für prismatische und zylindrische Schalen jeder geometrischen Form unter Berücksichtigung verschiedener Belastungen, Durchlaufwirkungen und Auflagerbedingungen. Die Berechnung wird so zergliedert, daß sie weitgehend mit Hilfe der Methoden der elementaren Statik durchgeführt werden kann. Wenn große Genauigkeit gewünscht wird, können Nebenspannungen durch schrittweise Näherung erfaßt werden. Der Vorteil des Verfahrens liegt u. a. darin, daß Schalen mit veränderlicher Dicke und ungleichmäßig verteilten Lasten behandelt werden können. Jedem Statiker, der sich mit der Berechnung von Schalen befaßt, kann dieses Buch zum Studium sehr empfohlen werden.

W. Zerna.

Conway, H. D.: *Note on Way's large-deflection solution for the uniformly loaded and clamped circular plate*. J. appl. Mech. 24, 151—152 (1957).

Il lavoro è inteso a confrontare numericamente i risultati ottenuti da una teoria linearizzata, ma non elementare, della flessione di una piastra circolare incastrata con quelli ottenuti dalla soluzione esatta di Way [Trans. Amer. Soc. mech. Engineers, 56, 627 (1934)]. Il confronto mostra che, almeno per i valori della tensione radiale per i quali è effettuato il calcolo, l'influenza dei termini non lineari è assai limitata.

T. Manacorda.

Fulton, J. and I. N. Sneddon: The dynamical stresses produced in a thick plate by the action of surface forces. *Proc. Glasgow math. Assoc.* 3, 153—163 (1958).

Il problema della determinazione dello spostamento e dello stato di tensione interna in una piastra indefinita di spessore $2d$, soggetta a soli sforzi normali sulle facce libere è formalmente risolto facendo uso della trasformata multipla di Fourier. Naturalmente, il procedimento conduce ad integrali il cui calcolo effettivo si presenta generalmente come estremamente arduo. Vengono esaminati in particolare i casi di una distribuzione di carico a simmetria cilindrica e piana, e quello di un carico, piano, che si propaga con velocità costante. In quest'ultimo caso, quando il carico si riduca ad essere applicato in un punto, l'integrale che dà lo sforzo normale nel piano mediano può effettivamente essere calcolato. Il caso statico è infine trattato come caso limite di quello dinamico. *T. Manacorda.*

Raven, Francis H.: Analytical design of disk cams and three-dimensional cams by independent position equations. *J. appl. Mech.* 26, 18—24 (1959).

Verf. stellt nach einigen allgemeinen grundlegenden Bemerkungen die Gleichungen verschiedener Kurvenscheiben in Polarkoordinaten dar, und zwar Kurvenscheiben mit Flachstößel, mit geradeführendem, exzentrischem Stößel, sowie mit schwingendem Abtrieb einschließlich des Sonderfalls, daß eine Gerade auf der Kurvenscheibe gleitet. Zum Schluß werden allgemeine Gleichungen für räumliche Kurvenscheiben aufgestellt. *W. Meyer zur Capellen.*

Reiss, Edward L.: Axially symmetric buckling of shallow spherical shells under external pressure. *J. appl. Mech.* 25, 556—560 (1958).

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem dreh-symmetrischen Durchschlagproblem eines flachen ringsum eingespannten Kugelabschnitts unter hydrostatischem Außendruck. Die zahlreichen bisher durchgeführten theoretischen Lösungen dieses nicht-linearen Problems sind zum größten Teil Näherungen, die sich mit Versuchsergebnissen nur in gewissen Parameterbereichen befriedigend decken. Soweit die Übereinstimmung besser ist, muß ein sehr großer Rechenaufwand in Kauf genommen werden [vgl. E. L. Reiss, H. J. Greenberg und H. B. Keller, *J. aeronaut. Sci.* 24, 533—543 (1957)]. Verf. entwickelt in der vorliegenden Arbeit ein Näherungsverfahren, das von dem in klassischer Weise linearisierten Beulproblem der Kugelschale ausgeht. In dieses wird die zusätzliche Vereinfachung eingeführt, daß beim Ausbeulen die Membranspannungen konstant bleiben, was einer Vernachlässigung der beim Beulprozeß wirksam werdenden Dehnungssteifigkeit gleichkommt. Die niedrigsten der sich so ergebenden Eigenwerte liegen verständlicherweise in einem großen Parameterbereich zu tief. Verf. nimmt nun das gewöhnliche lineare Biegeproblem der Kugelschale zu Hilfe, um weitere Aussagen über die Form der Biegelinie zu gewinnen. Es ergeben sich drei Parameterbereiche mit Biegelinien, die sich durch das Vorzeichen der Krümmung im Kugelscheitel unterscheiden. Diesen Bereichen werden verschiedene Eigenfunktionen des Beulproblems zugeordnet und die zugehörigen Eigenwerte als maßgeblich angesehen. Die Übereinstimmung der Lösung mit Versuchsergebnissen ist nicht schlecht und wird sehr gut, wenn die Sprungstellen, an denen von einer zur anderen Eigenfunktion übergewechselt wird, den Versuchen entsprechend korrigiert werden. *A. Pflüger.*

Jung, H.: Über die Bestimmung der Wärmespannungen in ungleichförmig erwärmten Kontaktöfen. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 11, 257—264 (1958).

Ausgehend von der Differentialgleichung und den Randbedingungen im Polarkoordinatensystem für stationäre Wärmeleitung im kreiszylindrischen Rohr mit endlicher Länge, versucht Verf. die Temperaturverteilung und danach die auftretenden Spannungen in der Rohrwand eines Kontaktofens zu bestimmen. Unter Annahme eines gewissen Ausdrucks als Lösung der Differentialgleichung und mit Hilfe der Fourier-Transformation für die Temperaturverteilung wird ein Ausdruck des imaginären Arguments, zusammengesetzt aus Besselschen und Neumannschen

Zylinderfunktionen erhalten, in dem die Auswertung der auftretenden Integrale nur in wenigen Fällen möglich ist. Nach entsprechender Vereinfachung der Ausdrücke für die Temperaturverteilung bestimmt Verf. die in der Zylinderwand auftretenden Wärmespannungen und findet, daß ein nichtrotationssymmetrisches Temperaturfeld die Betriebsspannungen herabsetzt, so daß der Ofen durch eine Betriebsstörung nicht gefährdet wird. Zur Ergänzung der theoretischen Zusammenfassungen und um die Spannung und Temperaturverteilung bildlich darzustellen, ist im Anhang ein Zahlenbeispiel durchgerechnet.

W. Iwanow.

Manukjan, M. M.: Die Temperaturspannungen bei Exothermie des Zementes in plattenartigen Blöcken unter Berücksichtigung der Kriechfähigkeit des Betons. Akad. Nauk Armjan. SSR, *Istvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk* **11**, Nr. 2, 99—109 (1958) [Russisch].

Verf. bestimmt die in Platten von mittlerer Stärke auftretenden und durch Einwirkung der Exothermie des Betons auftretenden Wärmespannungen. Unter Berücksichtigung der Kriechtheorie von N. Ch. Aratjunjan bringt Verf. das Problem mit Hilfe einer Volterraschen Integralgleichung zur Lösung, wobei als unbekannte Funktion die Spannung $\sigma(x, t)$ auftritt. Die Integralgleichung löst er in angenäherter Weise unter Anwendung der Methode von N. M. Krylov und N. I. Bogoljubov. Die Arbeit endet mit einem Vergleich der im Beton bei Berücksichtigung des Kriechinflusses auftretenden Spannungen mit solchen, die man ohne Berücksichtigung dieses Einflusses erzielt.

Witold Nowacki.

Piechocki, Wladyslaw: The state of stress in a circular disc due to the action of a source of heat. *Rozprawy inż.* **6**, 649—655, russ. und engl. Zusammenfassg. 655—656 (1958) [Polnisch].

Die Lösung des Problems wurde in zwei Teile zerlegt. Der erste Teil ergibt Spannungen und Verschiebungen, die aus dem thermoelastischen Verschiebungspotential stammen. Der zweite Teil behandelt Spannungen und Verschiebungen, die mit der Airyschen Spannungsfunktion im Zusammenhange stehen. Diese Funktion wählt Verf. so, daß der Scheibenrand frei von Spannungen ist. Die auf diese Weise für die Punktwärmequelle erhaltenen Green-Funktionen gestatten die Bestimmung der Spannungen und Verschiebungen für die beliebige Verteilung der stationären Wärmequellen innerhalb der Platte.

Witold Nowacki.

Rickenstorff, Günther: Wärmespannungen in Platten infolge beliebiger Temperaturverteilung über die Querschnittshöhe. *Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden* **7** (1957/58), 879—884 (1958).

Verf. untersucht den Spannungszustand, der durch einseitige Erwärmung oder Abkühlung einer Platte mittlerer Stärke hervorgerufen wird. Verf. bestimmt die Spannungen in einer am Rande volleingepannten, sowie einer am Rande frei gestützten Platte unter der Annahme vereinfachter Voraussetzungen, die mit der nichtstationären Wärmeleitung verbunden sind.

Witold Nowacki.

Finnie, Iain: A creep instability of thin-walled tubes under internal pressure. *J. Aero-Space Sci.* **26**, 248—249 (1959).

Verf. überträgt das heuristische Kriechgesetz $\dot{\epsilon} = B \sigma^n$ ($B, n = \text{const}$) auf das Kriechen eines unendlich langen dünnwandigen Kreisrohres unter konstantem Innendruck. Wegen der Volumenkonstanz nimmt die Wanddicke ab, so daß nach einer „kritischen Lebenszeit“ t_0 formal eine unzulässig große Tangentialspannung auftritt. Im eindimensionalen Zugversuch sei für konstante Spannung σ die „Lebenszeit“ durch $t = A \sigma^{-q}$ ($A, q = \text{const}$) gegeben. Verf. erweitert diesen Ausdruck auf veränderliche Belastung obigen Rohres und erhält eine Lebenszeit t' , die formel-

mäßig mit t_0 gekoppelt ist. Anmerkung: Verf. benutzt die Formel $\int_0^{t'} \frac{dt}{t} = 1$, wo statt 0 ersichtlich t_0 zu lesen ist. Hieraus müßte einfach $t' = e t_0$ folgen!

H. Lippmann.

Finzi, Leo: On the principle of Haar and von Karman in statically determinate problems of plasticity. *J. appl. Mech.* **24**, 461—463 (1957).

Considered are problems of contained plastic deformation in particular such which are "statically determined". For these problems a variational formula holds similar to the one of Haar and v. Karman valid for any stress strain relation and yield condition. An example clarifies the idea. *H. Geiringer.*

Storchi, Edoardo: Soluzioni ad un parametro del problema plastico della deformazione piana. *Atti. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* **22**, 286—293 (1957).

L'A. étudie le problème plastique pur pour le cas d'un état de déformation plane, en employant premièrement la condition de plasticité de Tresca et von Mises et en passant ultérieurement à une condition de plasticité quelconque. En partant de la représentation générale de la solution à l'aide de deux paramètres qui doivent vérifier certaines relations, l'A. trouve le cas le plus générale dans lequel cette solution peut être représentée à l'aide d'un seul paramètre; on précise aussi les conditions que doit remplir ce paramètre. La méthode de calcul est illustrée par une application. *P. P. Teodorescu.*

Schlechtweg, H.: Zur Identität von Gleitlinien und Charakteristiken. *Z. angew. Math. Mech.* **39**, 82 (1959).

Vereinfachter Beweis eines vom Verf. schon früher (dies. Zbl. **80**, 180) veröffentlichten Ergebnisses, wonach auch bei einem in bestimmter Weise verallgemeinerten Coulombschen Fließkriterium Gleitlinien und Charakteristiken zusammenfallen. *H. Lippmann.*

Bălan, Ștefan, Sandu Răutu and Valeriu Petcu: A new method for studying the behaviour of structures in the elasto-plastic range — chromoplasticity—. *Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl.* **4**, 97—111 (1959).

Ono, Akimasa: Vibration and strength of turbine blade. IV. Condition of clamped end and eigenfunction. *Proc. Japan Acad.* **34**, 524—529 (1958).

Bisshopp, K. E.: Forced torsional vibration of systems with distributed mass and internal and external damping. *J. appl. Mech.* **26**, 8—12 (1959).

Es werden die erzwungenen Drehschwingungen einer glatten Welle unter Berücksichtigung der inneren und äußeren Dämpfung untersucht, die der Differentialgleichung $\ddot{\varphi} + k_1 \dot{\varphi} - k_2 \varphi_{xx} - a^2 \varphi_{xx} = 0$ genügen. Der Ansatz $\varphi = u(x) \sin \Omega t + v(x) \cos \Omega t$ für die erzwungenen Schwingungen liefert zwei gekoppelte Differentialgleichungen für $u(x)$ und $v(x)$, die für möglichst allgemeine Randbedingungen integriert werden. Die in allgemeiner Form aufgestellte Theorie wird auf die Drehschwingungen einer homogenen Maschine mit einer Zusatzdrehmasse angewandt, wobei die homogene Maschine näherungsweise durch eine Welle mit gleichmäßig verteilter Masse ersetzt wird. Der Vergleich des Ergebnisses mit einer von Den Hartog angegebenen Erweiterung des Holzerschen Verfahrens auf gedämpfte Schwingungen ergab gute Übereinstimmung. *A. Weigand.*

Bycroft, G. N.: Frequencies of a flexible circular plate attached to the surface of a light elastic half-space. *J. appl. Mech.* **26**, 13—17 (1959).

Aus einem eingliedrigen Ritz-Ansatz wird die Grundschwingungszahl einer Kreisplatte näherungsweise berechnet, die mit einem masselosen Halbraum verbunden ist. Die Rechnung wird für drei Randbedingungen durchgeführt, nämlich für Einspannung, Stützung und für den freien Rand. *A. Weigand.*

Crede, C. E.: The effect of product of inertia coupling on the natural frequencies of a rigid body on resilient supports. *J. appl. Mech.* **25**, 541—545 (1958).

Die Bewegungsgleichungen eines elastisch gestützten Körpers von beliebiger Gestalt enthalten i. a. alle zur Beschreibung der Schwingungen benutzten Größen. Verf. behandelt den für die Berechnung der Eigenfrequenzen von Blockfundamenten wichtigen Sonderfall, daß die Schwingungen teilweise entkoppelt sind. Die Glei-

chung zur Ermittlung der Eigenkreisfrequenzen ω , die in ω^2 i. a. vom sechsten Grad ist, zerfällt in dem Spezialfall in eine lineare, eine quadratische und eine kubische Gleichung. Die Eigenfrequenzen werden für ein Modell zahlenmäßig ermittelt. *A. Weigand.*

Jäger, B.: Die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Turbomaschinen. Ingenieur-Arch. 27, 33—52 (1959).

Für die Berechnung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen der Biegeschwingungen von Turbotriebwerken wird die Untersuchung gegenüber dem älteren Vorgehen dahingehend verallgemeinert, daß auch der Einfluß der Gehäuse-Elastizität berücksichtigt wird. Es wird gezeigt, wie man für derartige Triebwerke unter ziemlich allgemeinen Annahmen wirklichkeitsnahe Ersatzsysteme aufstellen und hierfür die Rechnung unter Verwenden von Matrizen weitgehend schematisch durchführen kann. Aufstellen der Einflußmatrizen durch Aufteilen der Aufgabe wird ausführlich beschrieben. Der interessierende Frequenzbereich läßt sich zudem durch Annahme unendlich weicher Aufhängung zur Grundfrequenz machen, die rechnerisch einfacher zugänglich ist. Praktische Winke zur Aufstellung des Ersatzsystems und zur Bestimmung der Einflußzahlen. Ein vollständig durchgerechnetes Beispiel erläutert das Vorgehen in allen Einzelheiten.

R. Zurmühl.

Hersch, Joseph: Une interprétation du principe de Thomson et son analogue pour la fréquence fondamentale d'une membrane. Application. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2060—2062 (1959).

Für das Problem der Torsionssteifigkeit eines prismatischen Stabes kann man das Thomsonsche Prinzip aus dem Dirichletschen Prinzip erhalten, wenn man im Querschnittsbereich längs Jordanbögen unstetige Funktionen zuläßt. Für die schwingende Membran führt analoges Vorgehen vom Rayleighschen Prinzip zu einem Maximumprinzip.

J. Pretsch.

Predeleanu, M.: Über die Verschiebungsfunktionen für das achsensymmetrische Problem der Elastodynamik. Z. angew. Math. Mech. 38, 402—405 (1958).

Die Grundgleichungen der Elastokinetik in Zylinderkoordinaten werden für achsensymmetrische Verformungen zunächst durch drei Wellenfunktionen integriert, die einzeln gewissen Wellengleichungen genügen. Diese Wellenfunktionen ergeben sich aus einer einzigen Funktion $\kappa(r, z, t)$; für die eine Differentialgleichung 4ter Ordnung abgeleitet wird. In den Gleichungen (34) des Verf. darf das zweite Gleichheitszeichen nicht stehen, da sich sonst das sinnlose Resultat ergibt, daß die Verschiebungen verschwinden.

A. Weigand.

Duffy, J.: A differential stress-strain relation for the hexagonal close-packed array of elastic spheres. J. appl. Mech. 26, 88—94 (1959).

In den letzten Jahren erschienen mehrere Arbeiten über das elastische Verhalten kubisch dichter Anordnungen von elastischen Kugeln. Auf entsprechende Weise gewinnt Verf. ein differentielles Stoffgesetz $d\sigma_{ik} = \sum_{l,m} c_{iklm}(\sigma_0) d\epsilon_{lm}$ für hexagonale Anordnungen mit dem anfänglich isotropen Spannungszustand σ_0 (und einer Spannungs-Vorgeschichte, die nur aus Änderungen der Größe σ_0 besteht). Es gelingt keine Integration [wie bei Deresiewicz, J. appl. Mech. 25, 402—406 (1958), für eine einfach kubische Anordnung]. Dafür beschränkt sich Verf. auf kleine ϵ_{ik} , untersucht elastische Wellen und vergleicht seine (der Kristalloptik ähnlichen) Ergebnisse mit Experimenten.

H. Lippmann.

Boley, Bruno A.: On the use of sine transforms in Timoshenko-beam impact problems. J. appl. Mech. 24, 152—153 (1957).

Viene sottolineata l'opportunità di adoperare la trasformazione reale di Fourier nei problemi del tipo di quelli di Timoshenko in modo da non sconfinare mai nel campo complesso. Le difficoltà di calcolo inerenti alla oscillatorietà dell'integrando nelle trasformazioni reali di Fourier possono essere facilmente superate, come viene mostrato su di un esempio.

T. Manacorda.

Hydrodynamik:

Beleńkij, S. Z.: Über die Gleichungen der Hydrodynamik unter Berücksichtigung der Strahlung. Trudy fiz. Inst. **10**, 15—22 (1958) [Russisch].

Ayant en vue quelques problèmes astrophysiques l'A. déduit les équations de la Mécanique de fluide complétées par des termes se rapportant au rayonnement. Les équations obtenues sont ensuite comparées à celles déduites par des autres auteurs.

C. Woronetz.

Soberman, Robert K.: Onset of convection in liquids subjected to transient heating from below. Phys. Fluids **2**, 131—138 (1959).

Verf. berichtet über eigene Versuche über die Ausbildung von zellularen Konvektionsströmungen in Flüssigkeiten, die an der Grundfläche erwärmt werden. Behandelt wird der Fall ohne und mit Drehung um eine vertikale Achse. Im ersten Fall gibt Verf. für die untersuchten Flüssigkeiten die nötige Temperaturdifferenz (zwischen Grund- und Deckfläche) an, die zur Ausbildung einer Konvektionsströmung erforderlich ist. D. h. es wird im wesentlichen die kritische Rayleigh-Zahl Ra angegeben. Im zweiten Fall hängt diese kritische Rayleigh-Zahl von der Taylor-Zahl der Drehbewegung ab und zwar nimmt Ra mit wachsender Drehzahl zu. J. Zieryep.

Dmitrieva, M. I.: Natürliche Konvektion im kegelförmigen Diffusor. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. **13**, Nr. 3, 27—31 (1959) [Russisch].

Verf. betrachtet die stationäre laminare Strömung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit mit Wärmekonvektion in einem vertikalen konischen Diffusor. Die Basis des Kreiskonus liegt im Unendlichen. Die Temperatur- bzw. Wärmeübergangsverteilung an der Wand ist vorgegeben. Im Unendlichen wird eine konstante Temperatur aufrechterhalten. Der Durchfluß ist von Null verschieden. Nach Einführung der Stromfunktion und Eliminierung des Druckes wird die Lösung durch unendliche Reihenentwicklung nach reziproken Potenzen des Radius ausgedrückt. Die erste Approximation für die Stromfunktion und für die Geschwindigkeits-Temperatur- und Druckverteilung sind angegeben.

P. Čolak-Antić.

Sevruk, I. G.: Näherungslösung des Problems über die Abkühlung einer in einer kugelförmigen Flüssigkeitsschicht getauchten erwärmten Kugel. Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. **1** (8), 204—211 (1959) [Russisch].

In dieser Arbeit wird das Problem der Abkühlung einer erwärmten starren Kugel behandelt, die von einer Kugelschale einer zähen Flüssigkeit umgeben ist. Es wird vorausgesetzt, daß zu Anfang der Zeitmessung die Flüssigkeit im Ruhezustand ist und eine Temperatur τ_0 besitzt, die sich von derjenigen der Kugel unterscheidet. Darüber hinaus wird angenommen, daß diese Anfangstemperatur τ_0 am äußeren Rande der Flüssigkeitsschicht stets erhalten bleibt. Die Lösung dieses instationären Problems der konvektiven Flüssigkeitsbewegung, das durch ein Differentialgleichungssystem — mit entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen — zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit u , der Flüssigkeitstemperatur τ , sowie der Kugeltemperatur τ^* definiert ist, wird vom Verf. in Form von Potenzreihen nach der Rayleighschen Zahl PG ($=$ Prandtlsche Zahl \times Grashofsche Zahl) angesetzt

$$u = u_1 PG + u_2 (PG)^2 + \dots = \tau_0 + \tau_1 PG + \tau_2 (PG)^2 + \dots \\ = \tau_0^* + \tau_1^* PG + \tau_2^* (PG)^2 + \dots,$$

wobei die Koeffizienten $u_1, u_2, \dots; \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots; \tau_0^*, \tau_1^*, \tau_2^*, \dots$ zu bestimmen sind. Verf. beschränkt sich dabei auf die Ermittlung der nullten und ersten Näherung der Temperaturen τ_0, τ_1 bzw. τ_0^*, τ_1^* , sowie der ersten Näherung der Geschwindigkeit u_1 . Zur Bestimmung der nullten Näherungen τ_0, τ_0^* benutzt Verf. eine elementare Methode (Trennung der Variablen), während die ersten Näherungen τ_1, τ_1^*, u_1 vermittels des von G. A. Grüneberg entwickelten Verfahrens ermittelt werden. Zum

Schluß wird noch die Wärmemenge Q berechnet, die die Kugel während der Zeit t , vom Anfang der Abkühlung an gerechnet, abgegeben hat. *V. Saljnikov.*

• **Riegels, Friedrich Wilhelm: Aerodynamische Profile. Windkanal-Meßergebnisse. Theoretische Unterlagen.** München: R. Oldenbourg 1958. 278 S. mit 539 Bild. und 35 Tab. Leinen DM 138,—.

Das vorliegende Werk gibt einen Überblick über die Aerodynamik der Tragflügelprofile, wobei sowohl die Theorie als auch die experimentellen Ergebnisse dieses heute sehr umfangreichen Teilgebietes der Aerodynamik eingehend behandelt werden. Das Gesamtwerk ist in zwei etwa gleich große Abschnitte aufgeteilt, nämlich einen Textteil und einen Anhang mit umfangreichen Tabellen und graphischen Darstellungen. Der erste Abschnitt ist in zehn Kapitel unterteilt, und sein Inhalt möge durch die Aufzählung der Kapitelüberschriften gekennzeichnet werden: 1. Profilgeometrie, 2. Versuchsmethoden und Windkanäle, 3. Kraft- und Momentbeiwerte, 4. Sonderfragen (Oberflächenrauigkeit, Kavitation), 5. Profile mit Klappen, 6. Grenzschichtbeeinflussung, 7. und 8. Theorie der Profile bei reibungsloser inkompressibler Strömung, 9. Profiltheorie mit Reibung, 10. Profiltheorie bei kompressibler Strömung. Jedem dieser zehn Kapitel ist ein umfangreiches Literaturverzeichnis beigegeben. Der zweite Abschnitt (Anhang) enthält im ersten Teil für eine große Zahl von Profilen die Profilkordinaten und eine katalogmäßige Übersicht über ihre wichtigsten aerodynamischen Beiwerte, insbesondere auch derjenigen für Höchstauftrieb. Der zweite Teil des Anhanges bringt die Polaren sowie potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilungen und gemessene Druckverteilungen. Im ganzen ist die Darstellung wohl abgewogen bezüglich der Berücksichtigung der theoretischen und der experimentellen Ergebnisse. Seit der Veröffentlichung der „Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen“ in den zwanziger Jahren ist keine größere zusammenfassende Darstellung über Tragflügelprofile in deutscher Sprache mehr erschienen. Aber auch im ausländischen Schrifttum ist dieses für den Flugzeug-Konstrukteur wichtige Teilgebiet der Aerodynamik weit verstreut. Deshalb wird das Erscheinen dieses verdienstvollen Werkes von den Fachleuten dankbar begrüßt werden.

H. Schlichting.

Čuškin, P. I.: Berechnung der Umströmung eines beliebigen Profils oder Rotationskörpers in einer Unterschallströmung. Vyčislit. Mat. 3, 99—110 (1958) [Russisch].

Ein von A. A. Dorodnizyn zur Lösung nichtlinearer Aufgaben der Gasdynamik entwickeltes, sich für numerische Berechnungen eignendes Rechenverfahren wird hier zur sukzessiven Berechnung der Umströmung eines beliebigen symmetrischen Profils in einer planparallelen Unterschallströmung und dann im rotationssymmetrischen Fall zur sukzessiven Berechnung der Umströmung eines beliebigen Rotationskörpers in einer Unterschallströmung angewendet. Die erhaltenen Ergebnisse werden in drei Spezialfällen mit auf andere Weise erhaltenen Ergebnissen verglichen. Es wurde eine gute Übereinstimmung mit vorhandenen strengen Lösungen erhalten. Für praktische Anwendungen ist eine zweite Annäherung hinreichend.

F. Labisch.

Shen, S. F.: The generalized thermal energy in boundary layer type flows with chemical reaction. Z. angew. Math. Mech. 38, 431—436 (1958).

Chemische Reaktionen in der stationären zweidimensionalen, kompressiblen aber isobaren, laminaren Grenzschichtströmung eines explosiven Gases und seiner Verbrennungsprodukte bedingen Zusatzterme in der Energiegleichung (E) und der Diffusionsgleichung (D). Aus ihnen läßt sich durch lineare Kombination eine weitere Gleichung (A) ableiten, welche einen solchen chemischen Zusatzterm nicht mehr enthält. Diese Umformung erleichtert an sich schon die numerische Behandlung der einschlägigen Probleme. Eine weitere Vereinfachung erreicht Verf. dadurch, daß er die thermische Enthalpie, kinetische Energie und latente chemische Energie zu

einer von ihm „generalisierte thermische Energie“ genannten Größe H (= Gesamt-ruheenthalpie) zusammenfaßt und ferner einige spezielle physikalische Annahmen einführt (insbesondere: Molekulareigenschaften von explosivem Gas und Verbrennungsprodukten identisch; Prandtl-Zahl = Schmidt-Zahl = 1; implizite auch spez. Wärme = konst.). Dadurch gelingt es, der Beziehung (A) die einfache Form $\rho u \partial H / \partial x + \rho v \partial H / \partial y = \partial (\mu \partial H / \partial y) / \partial y$ einer Grenzschichtgleichung für die Größe H zu geben und so das Problem der kompressiblen Grenzschichtströmung mit chemischen Reaktionen auf den Spezialfall eines nicht reagierenden Gases zu reduzieren. Allerdings dürfte nach Ansicht des Ref. mit diesem Vorschlag wegen der physikalisch wenig befriedigenden Annahmen im allgemeinen nur eine qualitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Wirklichkeit zu erzielen sein. Im letzten Teil der Arbeit zeigt Verf. die Anwendung seiner Methode an zwei bereits anderweitig behandelten Problemen aus der Theorie der Flammen explosiver Gase. *H. Stümke.*

Napolitano, Luigi G.: Incompressible mixing of a shear flow with fluid at rest. *J. Aero-Space Sci.* 25, 444—450 (1958).

Für die Scherströmung, die von der ruhenden Luft zunächst durch eine Scheidewand getrennt ist, wird mit der konstanten Wirbelstärke ω die Freistromgeschwindigkeitsverteilung $u_1 = u_0 + \omega y$ angenommen. Zur Lösung der Grenzschichtdifferentialgleichung wird sowohl bei laminarer wie bei turbulenter Strömung eine Reihenentwicklung für die Stromfunktion nach Potenzen der „Wirbelzahl“ angesetzt. Die Wirbelzahl ist — mit den üblichen Bezeichnungen — im laminaren Fall definiert durch $\chi = (\omega/u_0)(2\nu x/u_0)^{1/2}$ und im turbulenten Fall durch $\varphi = \omega x \varepsilon_0^{1/2}/u_0$ (scheinbare kinematische Zähigkeit $\varepsilon = \varepsilon_0 u_0 x$) und stellt ein Maß für das Verhältnis der Freistromwirbelstärke zur Wirbelstärke der Mischungszone dar. Als unabhängige Variable treten $\eta \sim y/\sqrt{x}$ bzw. $\eta = y/x$ auf. Man erhält dann für die Funktionen der Reihe in beiden Fällen formal dasselbe Gleichungssystem. Die nullte Näherung stellt die bekannte Blasiusche Lösung dar; die erste Näherung, auf die sich Verf. beschränkt, wird durch numerische Integration einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung unter Zuhilfenahme asymptotischer Entwicklungen gewonnen. Dabei ist der Gültigkeitsbereich der erhaltenen Lösung beschränkt durch die Voraussetzung, daß die mit \sqrt{x} bzw. x wachsenden Wirbelzahlen (siehe oben) klein sind. — Als Ergebnis erhält man, daß im laminaren Fall der Effekt der Wirbelstärke der Scherströmung vernachlässigbar erscheint; im turbulenten Fall dagegen ist er von merkbarer Größe und liefert z. B. einen um einige Prozent größeren Zustrom zum Mischungsfeld.

W. Szablewski.

• **Knudsen, James G. and Donald L. Katz: Fluid dynamics and heat transfer.** (McGraw-Hill Series in Chemical Engineering). New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1958. IX, 576 p. 97 s.

Das Buch gliedert sich in die Abschnitte I) Basic equations and flow of non-viscous fluids (p. 3—71), II) The flow of viscous fluids (p. 73—348), III) Convection heat transfer (p. 349—523). — Teil I enthält eine ausführliche und gründliche Darstellung der Flüssigkeitseigenschaften und der beschreibenden Differentialgleichungen der Kontinuität, des Impulses und der Energie zäher und kompressibler Flüssigkeiten. Aus der Theorie reibungsloser Strömungen werden die Elemente der ebenen Potentialtheorie gebracht. Unter Beschränkung auf inkompressible Strömungen enthält Teil II neben einer Einführung in die Grundbegriffe der Turbulenz vorwiegend laminare und turbulente Strömungen in Rohren einschließlich des Einlaufs, dabei werden auch Leitungen mit ringförmigem Querschnitt (annuli) behandelt. Die Gleichungen der Grenzschichttheorie werden lediglich mitgeteilt und das Verfahren nach Kármán-Pohlhausen am Beispiel der ebenen Platte dargestellt. Ausführlich werden dann wieder laminare und turbulente Strömungen längs der ebenen Platte behandelt. Das Schlußkapitel ist den für die Wärmetechnik wichtigen

Strömungen längs und quer zu Gittern paralleler Zylinder gewidmet. Für die in II genannten Modelle wird dann in Teil III — wieder in Beschränkung auf inkompressible Strömungen — sehr ausführlich die erzwungene Wärmekonvektion behandelt. Im Vordergrund stehen dabei unter ausgiebiger Erörterung der Reynoldsschen, Prandtlschen und weiterer Analogien die turbulenten Strömungen. Ein besonderes Kapitel berücksichtigt flüssige Metalle. — Das Buch zeichnet sich durch eine sehr reichhaltige Wiedergabe von Meßergebnissen und zahlreicher empirischer Formeln einschließlich Literaturangaben aus. Es erscheint dem Ref. weniger als Lehrbuch, denn als Handbuch für den Wärmetechniker geeignet. Der Theoretiker wird durch die Vielzahl der aufgezeigten technischen Probleme manche Anregung erhalten können und für die mitgeteilten Messungen dankbar sein.

W. Szablewski.

Davies, D. R.: On the calculation of eddy viscosity and heat transfer in a turbulent boundary layer near a rapidly rotating disk. Quart. J. Mech. appl. Math. 12, 211—221 (1959).

Es wird eine rotierende Scheibe in ruhender Flüssigkeit betrachtet und die durch turbulente Reibung hervorgerufene Grenzschichtströmung an der Scheibe untersucht. Unter Annahme des $1/7$ -Potenzgesetzes für die Grenzschichtprofile in radialer und Umfangsrichtung wird die turbulente Schubspannungsverteilung ermittelt und mit Hilfe der Reynoldsschen Analogie für den Wärmeübergang der örtlich von der Scheibe konstanter Übertemperatur auf das Strömungsmittel übertragene Wärmestrom erhalten. Für die mittlere Nusselt-Zahl wird in Übereinstimmung mit Experimenten bei genügend hohen Reynolds-Zahlen, bei denen auch im achsennahen Teil der Scheibe die Grenzschicht schon turbulent ist, für Luft $Nu = \alpha r / \lambda = 0,014 Re^{4/5}$ gefunden (α Wärmeübergangszahl, λ Wärmeleitzahl, r = Radius der Scheibe und $Re = r^2 \omega / \nu$ = Reynolds-Zahl der rotierenden Scheibe).

N. Scholz.

Kališ, Jiří: Einige Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Bewegung zwischen zwei parallelen Wänden der Poiseuilleschen Form. Sborník vysok. Učení techn. v Brně 1958, 193—207, russ. und deutsche Zusammenfassg. 207 (1958) [Tschechisch].

Die Messungen von J. Laufer [J. aeronaut. Sci. 17, 277 (1950)] in einem Kanal mit parallelen Wänden werden benutzt, um für diesen Fall verschiedene Annahmen, die bei der Anwendung der statistischen Theorie der Turbulenz gemacht werden, zu überprüfen. So wird u. a. gezeigt, daß der Beitrag gewisser Glieder, die Korrelationsmomente dritter Ordnung enthalten, im Ausdruck für die Dissipation im Mittel klein ist.

L. Špaček.

Filippova, L. A.: Instationäre Strömung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit in einem schmalen Spalt von konstanter Breite. Leningradsk. gosudarst. Univ., Učenyje Zapiski Nr. 217, mat-mech. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 31, 225—235 (1957) [Russisch].

Die Arbeit behandelt die Strömung in einem Spalt unendlicher Länge, dessen eine Wand sich mit vorgegebener Geschwindigkeit $\mu(t)$ bewegt und in dem außerdem ein vorgegebener Druckgradient $f(t)$ herrscht. Im Falle turbulenter Strömung rechnet man mit einer äquivalenten turbulenten Zähigkeit, die während der Rechnung konstant ist, und mit einem Geschwindigkeitssprung an den Wänden. Die Höhe dieses Sprunges nimmt man proportional zum Anteil der Durchflußmenge an, die durch den Druckgradienten hervorgerufen wird. Der Geschwindigkeitsverlauf in bezug auf die Koordinate quer zum Spalt wird durch Kombination einer linearen Funktion mit einer unendlichen Sinusreihe ausgedrückt. Die Koeffizienten der Lösung sind lineare Funktionale von $\mu(t)$ und $f(t)$, wobei für die in den Funktionalen vorkommenden Zeitfunktionen explizite Ausdrücke (unendliche Summen von Exponentialfunktionen) angegeben werden.

L. Špaček.

● **Huhnt, D.:** Stabile Formen und Übergangserscheinungen der Flachwasserströmung auf einer schwach geneigten ebenen Platte. (Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V. Ber. Nr. 92). Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag 1959. 62 S.

Durch systematische experimentelle Untersuchungen in voll entwickelter Wasserströmung sehr kleiner Tiefe entlang einer schwach geneigten ebenen Platte, unter Ausschaltung von Anfangsstörungen, wird gezeigt, daß sich in der laminaren Grundströmung stabile Gravitationswellen zunächst zweidimensionaler, sodann dreidimensionaler Struktur bilden. Aus letzteren geht örtliche Turbulenz (spots, nach Emmons) hervor. Durch ähnlichkeitsgerechte Darstellung der Meßergebnisse werden diese stabilen Strömungszustände einander in angrenzenden Gebieten eines durch zwei Strömungsparameter bezeichneten Raumes zugeordnet. Turbulente Zellen, wenn durch obige „plattenbedingten“ Potentialwellen statt durch Anfangsstörungen angeregt, breiten sich erst aus jenseits einer aus Messungen bestimmten kritischen Reynolds Zahl. Die Überlegungen und Untersuchungsmethoden zur Feststellung der Grenzen dieser stabilen Zustände sind von allgemeiner Bedeutung für das Übergangsproblem.

J. R. Weske.

Binnie, A. M.: Instability in a slightly inclined water channel. *J. Fluid Mechanics* 5, 561—570 (1959).

Verf. untersucht experimentell die Stabilität von Wasserströmungen mit freien Oberflächen längs Platten mit geringer Neigung von 1 bis $2\frac{3}{4}^{\circ}$. Er vergleicht seine Ergebnisse mit denen von B. Brooke (dies. Zbl. 78, 180) über die Stabilität der Strömung einer zähen Flüssigkeit unter Berücksichtigung der Kapillarität. Der Unterschied zwischen der experimentellen und der theoretischen Reynoldsschen Zahl, bei der die Instabilität anfängt, ist am geringsten für 1° Neigung der Platte. Danach gibt Verf. eine Übersicht über die verschiedenen Strömungserscheinungen, die das Auftreten von Turbulenz begleiten.

J. A. Sparenberg.

Yih, Shia-Shun: Inhibition of hydrodynamic instability by an electric current. *Phys. Fluids* 2, 125—130 (1959).

Eine zähe Flüssigkeit befinde sich in einem vertikalen Kreiszylinder (Rotationsachse = z Achse) und werde an der Bodenfläche ($z = 0$) erwärmt. Verf. überlagert diesem thermischen Effekt einen elektrischen Strom durch die Flüssigkeit in z -Richtung und studiert den Einfluß desselben auf die hydrodynamische Instabilität, die durch die Erwärmung erzeugt wird. Ohne den elektrischen Strom wurde das Stabilitätsproblem bereits früher gelöst: Für genügend große Rayleigh-Zahlen ergeben sich rotationssymmetrische bzw. symmetrische Eigenlösungen. Bei Mitnahme des elektrischen Stromes weist Verf. nach, daß die kritische Rayleigh-Zahl für die rotationssymmetrische Lösung ungeändert bleibt. In Abhängigkeit von der Größe der Stromdichte werden die kritischen Rayleigh-Zahlen der unsymmetrischen Lösungen vergrößert und damit ihr Einsetzen verzögert.

J. Zierep.

Schubauer, G. B.: Mechanism of transition at subsonic speeds. Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br. 26.—29. Aug. 1957, 85—109 (1958).

Verf. gibt eine kurze Übersicht über seine neuesten Messungen zum Umschlag laminar-turbulent an einer Platte und beleuchtet dabei die Fragen, welcher Prozeß angefachte Wellen zum Umschlag führt, ob der Umschlag eine punktartige Erscheinung ist, wie Geschwindigkeitsänderungen in die Grenzschicht gelangen und welche Rolle sie bei der Herbeiführung des Umschlages spielen. Er vergleicht seine Meßergebnisse mit den Resultaten anderer und weist darauf hin, daß die Tollmien-Schlichting-Wellen wohl nicht zur Aufklärung von Instabilitäten der Rohrströmung herangezogen werden können, da hier die turbulente Strömung durch allmähliche Wellenverzerrung mit wachsender Unregelmäßigkeit und fortschreitendem Hinzutreten höherer Frequenzen einsetzt.

J. Pretsch.

Görtler, H. und H. Witting: Theorie der sekundären Instabilität der laminaren

Grenzschichten. Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br. 26.-29. Aug. 1957, 110—126 (1958).

Die von Görtler vorausgesagte Instabilität einer ebenen laminaren Grenzschicht mit konkaven Stromlinien gegenüber Störungen in Form von Wirbeln, deren Längsachsen der Hauptströmungsrichtung parallel sind, ist experimentell mehrfach bestätigt worden. Es wird nun theoretisch untersucht, unter welchen Bedingungen eine gegenüber longitudinalen Wirbeln stabile Grenzschicht durch Überlagerung von Wellen gestört wird, die durch Formgebung der Wand, durch periodische Absaugung oder durch Tollmien-Schlichting-Wellen hervorgerufen werden. Wenn die von Tollmien-Schlichting-Wellen gestörte ebene Strömung gegenüber den Görtler-Wirbeln sekundär instabil wird und in eine dreidimensionale Strömung übergeht, dürfte dieses Kriterium eine bessere Voraussage für den Umschlagpunkt ermöglichen. Die vom zweitgenannten Verf. entwickelte Theorie wird ausführlich im Arch. rat. Mech. Analysis dargestellt werden. Die als vorgegeben angesehenen wellenförmigen Primärstörungen werden durch neue Koordinaten berücksichtigt. Für die Amplitudenfunktionen der wirbelförmigen Sekundärstörungen erhält man ein reguläres Eigenwertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen mit einem Faktor ε der Wellenamplitude als Eigenwert, wenn man in erster Näherung die Wandkrümmung von der Koordinate in Hauptströmungsrichtung unabhängig annimmt und durch den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ Singularitäten beiseite läßt, die durch geschlossene und sich schneidende Stromlinien nahe der kritischen Schicht bedingt sind. Das Eigenwertproblem nullter Ordnung, das durch Vereinfachung der Störungserscheinungen im Wellental entsteht, kann man in ein System von Integralgleichungen überführen und ε_0 nach dem Iterationsverfahren ermitteln. Für Wellenamplituden von 10^{-4} Verdrängungsdicken tritt im Wellental schon sekundäre Instabilität auf.

J. Pretsch.

Zaat, J. A.: Numerische Beiträge zur Stabilitätstheorie der Grenzschichten. Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br. 26.-29. Aug. 1957, 127—139 (1958).

Es wird über eine gemeinsam mit Timman und Burgerhout [Nat. Luchtvaartlab., Amsterdam, Rep. F 193 (1956)] entwickelte Methode der Berechnung der Indifferenzkurve für die Störungswellenlänge $\alpha \delta^*$ laminarer Grenzschichtprofile mit Druckabfall und Druckanstieg in Abhängigkeit von der Reynoldszahl $Re \delta^*$ berichtet. Statt die Lösung φ_2 der reibungslosen Störungsgleichung zu ermitteln, wird ihre Lösung φ_1 durch numerische Integration nach dem Adams-Verfahren so bestimmt, daß $\varphi_1(\infty) = 0$ ist. Dadurch vereinfacht sich die Determinante, die auf die Bestimmung von $\alpha \delta^*$ und $Re \delta^*$ führt. Untersucht wird die von Timman [Nat. Luchtvaartlab., Amsterdam, Rep. F 35, F 29—F 45 (1949)] angegebene einparametrische Schar von Geschwindigkeitsprofilen, die das asymptotische Verhalten aller Lösungen der Grenzschichtgleichungen berücksichtigt. Für das Blasius-Profil ist die Übereinstimmung mit den Rechnungen von Schlichting und Lin und mit den Messungen von Schubauer und Skramstad gut.

J. Pretsch.

Laufer, J.: Stability of the laminar boundary layer. Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br. 26.-29. Aug. 1957, 139—140 (1958).

Aus Messungen im Jet Propulsion Laboratory am California Institute of Technology scheint zu folgen, daß bei höheren Mach-Zahlen Windkanalturbulenz durch Fluktuationen im Düsenbereich und längs der Kanalwände hervorgerufen werden kann.

J. Pretsch.

Pfenninger, W.: Transition. Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br. 26.-29. Aug. 1957, 140 (1958).

Um die Entstehung turbulenter „spots“ aufzuklären, hat man sie durch Ausblasen von Luft durch ein Loch erzeugt; an ihrer Kante bilden sich neue hufförmige Wirbel. Mit wachsender Absaugemenge dagegen wird die Bildung der spots genommen.

J. Pretsch.

Dryden, H. L.: Transition. Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br. 26.-29. Aug. 1957, 140—141 (1958).

Turbulente „spots“ sollen durch fortschreitenden Zusammenbruch der laminaren Strömung entstehen, also in der Grenzschicht nicht unterhalb der für die Strömungsinstabilität kritischen Reynoldszahl wachsen. *J. Pretsch.*

Wille, R.: Umschlag. Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br. 26.-29. Aug. 1957, 141 (1958).

Die Taylor-Görtler-Wirbel mit Achsen in Strömungsrichtung wurden in der turbulenten Randzone eines Freistrahls qualitativ nachgewiesen. *J. Pretsch.*

Scholz, N.: Umschlag. Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br. 26.-29. Aug. 1957, 142—143 (1958).

Hinweise auf Dissertation E. G. Feindt, TH Braunschweig 1956, Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages laminar-turbulent von der Oberflächenrauigkeit und der Druckverteilung. *J. Pretsch.*

Tatsumi, T.: Stability of laminar flows. Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br. 26.-29. Aug. 1957, 143 (1958).

Kurze Mitteilung über Ergebnisse der Stabilitätsrechnung für eine zweidimensionale Strahlströmung. *J. Pretsch.*

● **Kirehgässner, K.: Über den Einfluß des Gleitens bei verdünnten Gasen auf die Entstehung der Taylor-Görtler-Wirbel.** (Ber. 75 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt.) Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag 1958. 29 S. DM 9,30.

Die Behandlung der Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden vom Taylor-Görtler Typ ist in dieser Arbeit auf den Fall inkompressibler Strömung bei mässiger Verdünnung bis zu Knudsen Zahlen $Kn \leq 0,1$ ausgedehnt, dadurch, daß die Gleit-Randbedingung im Eigenwertproblem der Görtler-Wirbel als Störparameter in den für neutrale Stabilität kritischen Eigenwert eingeht. Diese Störfunktion, exponential entwickelt, wurde bis zum quadratischen Glied für das Gebiet praktisch interessierender Wirbelzahlen errechnet, und es wurde eine Verringerung des Eigenwertes, d. h. der Stabilität um $8,5\%$, bei höchster Kn-Zahl des behandelten Bereiches im Vergleich zur Haftströmung festgestellt. Die Lösung des inkompressiblen Falles hat allgemeinere Bedeutung, da mit Erhöhung der Machzahl die Stabilität wächst. *J. R. Weske.*

Mangler, K. W. and J. H. B. Smith: A theory of the flow past a slender delta wing with leading edge separation. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 251, 200—217 (1959).

Verf. sucht qualitative Aussagen zur sogenannten Vorderkantenablösung. Das theoretische Strömungsmodell sind zwei zur Symmetrieebene des Deltaflügels auf seiner Saugseite spiegelbildlich angebrachte Potentialwirbel-Senken (Spiralwirbel). Die Untersuchungen können sich deshalb auf eine Flügelhälfte beschränken, da außer dem Grundriß des Flügels auch die Symmetrieebene Stromlinie sein muß. Die Annahme, daß der Spiralwirbelfaden geradlinig und seine Strömung nach den Voraussetzungen eines kegeligen Strömungsfeldes verläuft, entspricht gut den Tatsachen und berechtigt dazu, die Theorie aus der zweidimensionalen Querschnittsströmung für Flügel kleiner Streckung zu entwickeln. Die Randbedingungen werden entsprechend der Anzahl freier Parameter für Stärke und Verlauf des Spiralwirbels in einigen ausgewählten Punkten erfüllt. Als erstes Resultat der Theorie werden der Verlauf der äußeren Trennlinie von Spiralwirbel und Strömung, sowie die Lage des Wirbelkerns in Abhängigkeit vom Verhältnis (Anstellwinkel/halber Öffnungswinkel des Deltaflügels) angegeben und einige Messungen eingezeichnet. Für das gleiche Verhältnis als Parameter sind Druckverteilungen und örtliche Auftriebsverteilung über die Halbspannweite und außerdem die Normalkraft am Flügel in Kurvenblättern mitgeteilt. Vergleiche der Normalkraft mit verfügbaren Messungen zeigen Streuungen innerhalb derjenigen der Messungen; gegenüber der Theorie von

R. T. Jones liegen die Normalkraftbeiwerte etwa um $\frac{1}{3}$ höher, sie sind aber niedriger als die Ergebnisse einer Theorie von Brown-Michael (dies. Zbl. 57, 180). Nach der vorliegenden Theorie liegen die Normalkraftbeiwerte in Abhängigkeit vom erwähnten Parameter mitten im Streubereich der herangezogenen Vergleichsmessungen, die Ergebnisse von Brown-Michael liegen im gesamten Bereich oberhalb der Meßergebnisse.

F. Keune.

Ehlers, F. Edward and E. W. Shoemaker: A linearized analysis of the forces exerted on a rigid wing by a shock wave. J. Aero-Space Sci. 26, 75—80, 107 (1959).

Für das Problem der Auswirkung des Auftreffens einer Druckwelle auf ein mit Unter- oder Überschallgeschwindigkeit fliegendes Flugzeug werden auf das Wesentliche konzentrierte grundsätzliche theoretische Ergebnisse durch stark idealisierte Annahmen gewonnen. Das bewegte Flugzeug, insbesondere sein Flügel, wird durch eine Halbebene (unendliche Flügeltiefe und Spannweite) ersetzt, welche nur längs ihrer Ebene bewegt wird. Damit die Untersuchungen zweidimensional durchführbar sind, muß die auf die Platte auftreffende Stoßfront parallel zum Plattenrand angenommen werden, sie kann jedoch die Platte unter einem beliebigen Anstellwinkel treffen. Nun wird der Stoß noch als schwach angenommen, damit das Geschwindigkeits- und Druckfeld durch die Wellengleichung der Akustik (Laplace) darstellbar ist. Diese wird nach der Transformation von A. Busemann umgeformt, und es wird anschließend eine konforme Abbildung durchgeführt. So erhalten Verff. geschlossene Lösungen für die Druckverteilung an dieser Halbebene, aber auch am Keil. Dieses Flügelmodell kann sich in Richtung auf die Stoßfront oder von ihr weg bewegen. Die Formeln liefern praktisch nützliche Abschätzungen über die Größe der Kräfte und Momente, welche am Flügel durch das plötzliche Auftreten einer so dargestellten Stoßfront entstehen können. Für verschiedene Anstellwinkel zwischen Halbebene und Stoßfront und verschiedene Flügelmachzahlen dieser bewegten Halbebene sind Kurven für die Auftriebsverteilung gegeben. Eine Erweiterung der Theorie auf den Fall, daß die Stoßfront nicht mehr parallel zum Plattenrand verläuft, wird angekündigt.

F. Keune.

Ehlers, F. Edward and Torstein Strand: The flow of a supersonic jet in a supersonic stream at an angle of attack. J. Aero-Space Sci. 25, 497—506 (1958).

Es handelt sich um eine lineare Störungstheorie unter der Voraussetzung kleinen Anstellwinkels α und kleinen Druckunterschiedes zwischen der äußeren Strömung und dem Strahl. Die Potentialfunktion wird nach Potenzen von α entwickelt. Als Randbedingungen werden die Forderungen formuliert, daß an der Strahloberfläche Druck und Neigung von Strahl und äußerer Strömung gleich sind. Methodisch erfolgt die Behandlung der Differentialgleichungen mittels der Laplace-Transformation, die explizite Lösungen liefert. — Ergebnisse: Als maßgebender Parameter tritt

$$k = (\gamma_1 P_1 M_1^2 / \gamma_2 P_2 M_2^2) \sqrt{(M_2^2 - 1) / (M_1^2 - 1)}$$

auf (Index 1 bzw. 2 Strahl bzw. äußere Strömung). A. Runder Strahl: Die Oberfläche des Strahls zeigt für jedes k , mit Ausnahme von $k = 1$, ein oszillatorisches Bild mit Frequenzen, die als Lösungen transzendenter Gleichungen zu ermitteln sind. Sowohl im symmetrischen Fall wie bei von Null verschiedenem Anstellwinkel treten bei $k \neq 1$ längs gewisser Machscher Linien Singularitäten auf, die als durch die Linearisierung bedingt angesehen werden. Einfache Relationen werden für die Nähe der Düsenmündung sowie weit von derselben angegeben. Der Einfluß der Düsenlänge auf das Verhalten des Strahls weit von der Mündung wird für sehr große und sehr kleine Düsenlängen untersucht. B. Ebener Strahl: Im symmetrischen Fall oszilliert die Oberfläche des Strahls für $k > 1$, für $k < 1$ nimmt die Neigung der Strahloberfläche monoton ab. Der durch den Anstellwinkel bedingte Teil der Lösung zeigt das umgekehrte Verhalten.

W. Szablewski.

Širokov (Shirokov), M. F.: Velocity and temperature discontinuities near the walls of a body around which rarefied gases flow with transonic velocities. Soviet Phys., JETP 7, 1029—1032 (1958). Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 34, 1490—1495 (1958).

The existing approaches to calculating the effects of the slipping of rarefied gases along walls and the temperature discontinuities have been studied in the range of small Mach numbers. The author attempts to solve these problems for any arbitrary Mach number. Assuming the validity of the inequality $M^2/R < 1$, the starting points are the equations of the laws of conservation of mass, momentum, and energy and the velocity distribution function. The latter is a product of the Maxwell distribution function and a perturbation distribution function, which is assumed in the form of a polynomial with the coefficients to be determined. The normalization condition and the moment equations furnish the formulas for those coefficients. An assumption of partial diffuse and specular reflections inserted into the conservation laws gives the expressions for the heat-flux vector and the shearing-stress tensor. The equation for the velocity distribution near the wall does not contain anything new in comparison with the expression obtained by previous authors, but its derivation assures the possibility of applying it to arbitrary Mach numbers. The analogous technique applied to the temperature discontinuity furnishes a new formula for the temperature jump containing the velocity terms and hence applicable to any Mach number. The results are applied to the boundary layer. The obtained equations reduce to the well-known Maxwell expressions (for $M = 0$) if one replaces the ordinary temperature T by the "stagnation" (or "throttling", used by the translator) temperature $\theta = T + v^2 (2 c_p)^{-1}$. The author points out that one may obtain more general formulas for velocity and temperature discontinuities by using the expressions for the heat flux and the stress tensor which contain terms of higher order in $M^2 R^{-1}$ with higher derivatives.

M. Z. v. Krzywoblocki.

Hanawalt, A. J., A. H. Blessing and C. M. Schmidt: Thermal analysis of stagnation regions with emphasis on heat-sustaining nose shapes at hypersonic speeds. J. Aero-Space Sci. 26, 257—263 (1959).

Die Vorderkante eines Hyperschall-Gleiters ist starker aerodynamischer Aufheizung unterworfen. Es wird eine Kühlmöglichkeit untersucht, bei der sich Gleichgewicht zwischen dem Wärmefluß von außen, der Wärmeleitung im Körper und der Ausstrahlung von der Körperoberfläche einstellt. Durch geeignete Form und geeignetes Material der Vorderkante kann der Kühlvorgang verstärkt werden. Die Wärmeleitungsgleichung wird für den stationären Fall numerisch gelöst und der Einfluß verschiedener Parameter, nämlich Gestalt, Durchmesser, Emissionsvermögen, Wärmeleitfähigkeit der Körperoberfläche auf die Temperatur graphisch dargestellt, insbesondere zeigt sich, daß die Wärmeleitfähigkeit und die Gestalt der Vorderkante den größten Einfluß von allen Parametern haben.

F. Schultz-Grunow.

Liu, V. C.: On pitot pressure in an almost-free-molecule flow. A physical theory for rarefied-gas flows. J. Aero-Space Sci. 25, 779—785 (1958).

Verf. schlägt eine physikalische Theorie für den Pitot-Druck im Bereich des Übergangs-Strömungsgebietes, in dem die Größenordnung des Verhältnisses der mittleren freien Wegstrecke zum Radius der Höhlenöffnung nicht kleiner als 1 ist. Es wird vorausgesetzt, daß in der Nähe des Körpers die Wahrscheinlichkeit mehrmaliger Zusammenstöße gegenüber der Wahrscheinlichkeit einmaliger Zusammenstöße vernachlässigt werden kann. Als Molekülmodelle werden harte Kugeln angenommen. Angewendet wird eine Methode, die der von Heineman und der von Łunc und Luboński ähnlich ist. Erhalten wird eine Formel für die sukzessive Annäherung des Pitot-Druckes in der betrachteten Strömung des entsprechend verdünnten Gases, zu dessen erster Annäherung Größen aus dem Bereich sehr verdünnter Molekül-Strömungen dienen.

F. Labisch.

Kulikovskij (Kulikovsky), A. G.: Flow of conducting liquid past magnetized bodies. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 199—202 (1957) [Russisch].

Bei unendlicher Leitfähigkeit der Flüssigkeit kann die Strömung nicht in das vom magnetischen Feld besetzte Gebiet eindringen. Es bildet sich dort eine „Kaverne“, die auch leer sein kann. Bei stationärer Strömung ist die Flüssigkeit in der Kaverne in Ruhe, wenn die elektromagnetischen Kraftlinien vom umströmten Körper ausgehen und an ihm enden. Die Aufgabe besteht in der Bestimmung der Form der Kaverne und ihres magnetischen Feldes. Wenn in den Gleichungen der magnetischen Hydrodynamik $v = 0$ gesetzt wird, erhält man

$$(1) \quad \operatorname{div} H = 0, \quad \operatorname{grad} p_{kv} = [\operatorname{rot} H \cdot H] / 4\pi$$

(H die magnetische Feldstärke und p_{kv} der Druck in der Kaverne), wobei an der Grenze zwischen Kaverne und Strömung die Bedingungen (2) $(H \cdot n) = 0$, $p_n = p_{kv} + H^2 / 8\pi$ zu erfüllen sind. Gegeben sei das magnetische Feld im Innern des Körpers oder die Stromstärke (3) $j_t = (c/4\pi) \operatorname{rot} H$. Gleichung (1) ergibt aber mit ihren Grenzbedingungen keine eindeutige Lösung. Daher werden zusätzliche Bedingungen aufgestellt; für das Gebiet der Kaverne (4) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = 0$ und für ihre Grenze (5) $[\operatorname{rot} H \cdot n] = 0$, die für den Grenzfall der stationären Lösung gelten, wenn die Leitfähigkeit $\sigma \rightarrow \infty$ strebt. Aus (4) und (3) folgt (6) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = 4\pi c^{-1} \operatorname{rot} j_t$. Es wird gezeigt, daß (6) mit (1) und ihren Grenzbedingungen eine einzige Lösung hat. Gleichung (6) vereinfacht sich für zweidimensionale Aufgaben; z. B. für den ebenen Fall ergibt sich

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_{tz}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial j_{tz}}{\partial y} - \frac{\partial j_{ty}}{\partial x} \right).$$

Es werden drei einfache Beispiele behandelt: die inkompressible Umströmung eines ebenen magnetischen Dipols, sowie die Überschallumströmung des Keils und des Kegels bei konstanter Stromdichte auf ihren Oberflächen. *M. Popov.*

Fickett, W. and W. W. Wood: A detonation-product equation of state obtained from hydrodynamic data. Phys. Fluids 1, 528—534 (1958).

Benutzt werden nur: 1. eine isentropische p - V -Kurve frisch detonierter Schwaden für $p_{cJ} > p > 570$ atm; 2. die empirische Abhängigkeit $D = D(\rho_0)$ der Detonationgeschwindigkeit von der Sprengstoffdichte; 3. die aus statischen Messungen erschließbare Thermodynamik der Schwaden unterhalb 1000 atm und 150°C. 1. und 2. werden von Deal (ibid 523—527) übernommen. Bezüglich 3. liegen Angaben für die einzelnen Bestandteile (CO , H_2O usw.) vor; für das Gemisch werden plausible Annahmen gemacht. — Aus 1. und 2. wird eine nur „dynamische“ Zustandsgleichung $E = E(p, V)$ erhalten mittels zusätzlicher Annahmen, die diskutiert und geprüft werden; brauchbar ist die Annahme $(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_S = \text{const.}$ Aussagen über T und c_p/c_v werden erst möglich mittels 3., wobei der Anschluß zwischen Hoch- und Niederdruckbereich unsicher ist. Zur genaueren Festlegung der Zustandsgleichung sind weitere Daten im Sinne von 1. und 3. erforderlich.

F. Wecken.

Miles, John W.: On panel flutter in the presence of a boundary layer. J. Aero-Space Sci. 26, 81—93, 107 (1959).

Um die Wirkung der Grenzschicht auf das Flügelflattern abzuschätzen, wird die Modellannahme gemacht, daß die Grenzschicht durch eine nichtzähe, annähernd parallele Scherströmung dargestellt werden kann. Es wird Energie durch zwei verschiedene Vorgänge von der Außenströmung auf die Verkleidung übertragen: erstens durch akustische Kopplung zwischen Oberflächenwellen auf der Verkleidung und Schallwellen in der Außenströmung, wenn die Geschwindigkeit der Oberflächenwellen kleiner ist als die Differenz zwischen Flug- und Schallgeschwindigkeit; zweitens aus der Scherströmung, wenn die Geschwindigkeit der Oberflächenwellen gleich der örtlichen Geschwindigkeit im Scherprofil an einem Punkt starker Profilkrümmung

ist. Es werden Näherungslösungen der Differentialgleichungen für die gestörte Grenzsichtbewegung aufgestellt und mit genaueren numerischen Lösungen verglichen. Es wird geschlossen, daß die Anwesenheit einer typischen Grenzsicht das Maß der Instabilität des Überschallflatterns bei langer Einschalenbauweise, wo kritische Wellenlänge und Grenzsichtdicke vergleichbar sind, um eine Größenordnung vermindern kann, womit vielleicht Abweichungen zwischen früheren Theorien, bei denen Grenzsichtwirkungen außer acht blieben, und der Beobachtung zu erklären sind. Als Beitrag für Entwurfsberechnungen reichen die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit jedoch nach Ansicht des Verf. noch nicht aus. *J. Pretsch.*

Dessler, A. J.: Interactions between first and second sound in liquid helium. Phys. Fluids 2, 5—7 (1959).

Im allgemeinen gelten die normalen Schallwellen und die „Wärmeleitungs- wellen“ (first and second sound), die in flüssigem Helium auftreten können, als unabhängig voneinander. Verf. zeigt jedoch, daß sich die beiden Wellenarten beeinflussen können, wenn eine von beiden eine sehr hohe Amplitude hat. Als Beispiel wird die Reflexion von second sound-Wellen an der Schockfront einer normalen Schallwelle berechnet. Es zeigt sich dabei, daß die Reflexion darauf zurückzuführen ist, daß in der Schockwelle die Schnelle der Materieteilchen und die Ausbreitungsgeschwindigkeit für second sound addiert wird. Aus diesem Grunde ist die resultierende Ausbreitungsgeschwindigkeit und damit der Wellenwiderstand vor und hinter der Schockfront verschieden. Allerdings muß der Schalldruck in der Größe von etwa einer Atmosphäre sein, um zu einer 10-prozentigen Reflexion zu führen. Der umgekehrte Effekt, die Reflexion von Schallwellen durch eine second sound Welle von sehr hoher Amplitude, wird in gleicher Weise behandelt.

M. Heckl.

Kranzer, Herbert C. and Joseph B. Keller: Water waves produced by explosions. J. appl. Phys. 30, 398—407 (1959).

Einem ausführlichen Überblick bisheriger Ergebnisse über die radiale Ausbreitung lokaler Störungen (Impulsverteilungen oder Erhebungen der freien Oberfläche) in linearisierter Theorie folgen Untersuchungen für den speziellen Fall endlicher Wassertiefe. Die Wellen werden explizit durch die Anfangsstörung ausgedrückt. Für ungenau vorliegende Anfangswerte werden Schranken der Wellenhöhe abgeleitet. Formeln und numerische Rechnung werden erweitert auf den Fall ebener Wellen im Kanal und befriedigende Übereinstimmung mit Experimenten gefunden.

K. Eggers.

Chandrasekhar, S.: The oscillations of a viscous liquid globe. Proc. London math. Soc., III. Ser. 9, 141—149 (1959).

Kelvins Untersuchungen der möglichen Schwingungsformen eines Flüssigkeitsballes unter Wirkung seiner internen Massenkräfte werden ausgedehnt auf zähe Flüssigkeiten. Für genügend große Viskosität finden wir — genau wie im Fall ebener Wellen auf Wasser von unbegrenzter Tiefe — zwei verschiedene Abklingkonstanten zu jeder durch eine Kugelfunktion dargestellten Anfangswellenform. Für kleine Zähigkeit fallen die Werte konjugiert komplex aus, der Imaginärteil geht gegen die von Kelvin gefundene Frequenz der ungedämpften Schwingung. Dies entspricht den großen Wellenlängen im ebenen Fall. — Neben diesen zwei Grundwerten ergibt sich in jedem Fall noch ein unendliches Spektrum höherer Abklingkonstanten.

K. Eggers.

Ishiguro, S.: A method of analysis for long-wave phenomena in the ocean, using electronic network models. I: The earth's rotation ignored. Philos. Trans. roy. Soc. London, Ser. A 251, 303—340 (1959).

Für die versuchsmäßige Analyse von Wellen von langer Periode beschreibt Verf. ein elektrisches Analogie-Rechengerät. Dieses besteht aus einem zweidimensionalen System von Induktivitäten, Kapazitäten und Widerständen. Die letzten

sind linear, und dies entspricht der hier gemachten Annahme, daß der Widerstand, den das Wasser vom Boden her erfährt, der Geschwindigkeit proportional ist. Als Anwendung werden die nachgebildeten Seichen in der See Lough Neagh besprochen, und die Ergebnisse werden mit bekannten direkten Messungen verglichen.

J. A. Sparenberg.

Gerber, Robert: Sur une classe de solutions des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant. Ann. Inst. Fourier 7, 359—382 (1958).

In Erweiterung der Dissertation des Verf. [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 34, 185—229 (1955)] wird hier der Fall unterkritischer Strömungen in einem Kanal untersucht, bei denen die Neigung der freien Oberfläche dem Gefälle der Kanalsohle entgegengesetzt ist. Die Heranziehung des Leray-Schauderschen Fixpunktsatzes zum Existenzbeweis einer Lösung gelingt jetzt nur für den Fall einer periodisch verlaufenden Kanalsohle, der auch in der ersten Arbeit (überkritische Strömung) erfaßt war. Gefordert wird, daß die Neigung der Kanalsohle klein bleibt und im Periodenintervall höchstens zweimal das Vorzeichen wechselt, ferner muß die Periodenlänge groß sein gegen die mittlere Wassertiefe. — Der Inhalt der Arbeit wurde bereits in einer früheren Note [C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1260—1262 (1956)] skizziert.

K. Eggers.

Roseau, Maurice: Sur les solutions d'un problème aux limites de type mixte. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 369—371 (1958).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (dies. Zbl. 42, 201; 78, 408) werden die beiden Fälle $k \leq 0$ behandelt.

J. Pretsch.

Wärmelehre:

Akopjan, A. A.: Über den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Akad. Nauk Armjan. SSR. Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 12, Nr. 2, 117—133 (1959) [Russisch].

Bloch, Claude et Cyrano de Dominicis: Un développement du potentiel de Gibbs d'un système composé d'un grand nombre de particules. II. Nuclear Phys. 10, 181—196 (1959).

(Part I, s. this Zbl. 80. 445). — The expansion of the Gibbs potential in powers of the activity is derived with the use of the second quantization, reestablishing a result of Ward and Montroll and the link with the classical Ursell-Yvon-Mayer expansion. Partial summation of non-interacting "loops" leads to the expansion established in a previous paper. This expansion can be cast into a form in which a "reduced potential", temperature and activity dependent, replaces the usual interaction. All contributions are then given by the (connected) "irreducible" diagrams only.

Zusammenfassg. der Autoren.

Kraichnan, Robert H.: Statistical mechanics of coupled bosons in the Heisenberg representation. Phys. Review, II. Ser. 112, 1054—1055 (1958).

Kraichnan, Robert H.: Statistical mechanics of coupled particles in the Schrödinger representation. Phys. Review, II. Ser. 112, 1056—1057 (1958).

Es wird eine spezielle Form der Iterationsmethode behandelt, die insofern programmatisch ist, als die ausführliche Behandlung des Verfahrens, sowie die Frage nach der Konvergenz und der Gültigkeit der Näherung für die physikalisch interessierenden Fälle und ihr Zusammenhang mit der Renormalisationstheorie den zukünftigen Arbeiten überlassen werden. In der ersten Arbeit wird die Zeitkorrelationsfunktion in Heisenberg-Darstellung, in der zweiten der Evolutionsoperator des Zustandsvektors in Schrödinger-Darstellung (diese Größen hängen mit der Zustandssumme der statistischen Mechanik zusammen) für einen stationären Zustand behandelt. Wesentlich ist die Annahme der sogenannten „schwachen Abhängigkeit“ der N -Körper Wellenfunktionen in Form von ebenen Wellen. Dies bedeutet die Weglassung gewisser Selbstenergie- und zusammenhängender Graphen. Die resultierenden Terme enthalten außer allen Termen der Bruecknerschen Näherung noch die 3-Körper-Terme iteriert in allen Ordnungen. *A. O. Barut.*

McFarland, B. L.: Comparison between the linear and nonlinear steady-state behavior of a heated tube. *J. appl. Phys.* **29**, 1682—1684 (1958).

L'A. considera l'equazione differenziale che caratterizza la diffusione in regime stazionario del calore generato da sorgenti nelle pareti di un tubo cilindrico indefinito (la cui sezione normale è una corona circolare), nei casi non lineare e lineare (diffusività e portata delle sorgenti variabili o no con la temperatura). Le soluzioni delle due equazioni per un particolare problema al contorno vengono confrontate nell'ipotesi che, nel caso non lineare, la diffusività sia funzione lineare della temperatura e si mettono in rilievo i limiti di applicabilità della soluzione dell'equazione linearizzata a concreti problemi retti dall'equazione non lineare. *G. Sestini.*

Jäckel, H.: Mathematische Behandlung gesteuerter Abkühl- und Anwärmvorgänge. *Ingenieur-Arch.* **26**, 146—156 (1958).

Es handelt sich um die Lösung des allgemeinsten Wärmeleitproblems im festen, homogenen isotropen und inneren Wärme entwickelnden Körper K , dessen Gesamtoberfläche F aus r Teilflächen F_k ($k = 1, 2, \dots, r$) besteht. Der Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß die verschiedenen Teiloberflächen des Körpers, dessen Temperaturverteilung zu bestimmen ist, von Medien umgeben werden, deren Temperaturen irgendwelche Funktionen des Ortes und der Zeit sind. Die Temperatur Φ_k der Grenzschicht der Teilfläche F_k umgebenden Mediums ändert sich mit der Zeit t und dem Ort P , also $\Phi_k = \Phi_k(P, t)$. Verf. nennt $\Phi_k(P, t)$ Steuerfunktionen, weil sie die gesuchte Temperatur $T(P, t)$ des Körpers wesentlich beeinflussen. Die Aufgabe ist wie folgt formuliert:

$$\partial T / \partial t - \alpha^2 \Delta T = W(P, t) / c \varrho, \quad T(P, 0) = f(P)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha_k} \frac{\partial T}{\partial n} + T \right)_{F_k} \equiv L \{ T(P, t) \}_{F_k} = \Phi_k(P, t) \quad \text{für } t > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

wobei c die spezifische Wärme, ϱ die Dichte, n äußere Normalrichtung, λ die Wärmeleitzahl, α_k die Wärmeübergangszahl, $W(P, t)$ die im Körper in der Volumen- und Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge und $f(P)$ die Anfangstemperaturverteilung bedeuten. Die Lösung der oben formulierten Aufgabe ist ermöglicht durch Einführung einer Einflußfunktion $G_k^*(P, \tau, t - \tau)$, die bekannt ist und für jeden beliebigen Punkt P des Körpers K die Temperaturverteilung wiedergibt, die unter dem Einfluß der auf die Teiloberflächen F_k wirkenden Außentemperaturen $\delta_{ik} \Phi_k(P, \tau)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) im Laufe der Zeit $(t - \tau) > 0$ entstanden ist. Sie hängt vom Ort, von dem früheren Zeitpunkt τ und von der Zeitdifferenz $(t - \tau)$ ab. Mittels dieser Einflußfunktionen wird ein Theorem abgeleitet, welches die allgemeinste Aufgabe dieser Art löst und nicht nur für das Körperinnere, sondern auch auf der Körperoberfläche gilt. Für den mathematischen Beweis gibt Verf. Literaturstellen an. Die Brauchbarkeit der vorgetragenen Theorie ist durch die Lösung der zwei angeführten Zahlenbeispiele eines endlichen Zylinders und eines Betonquaders gezeigt. Die erhaltenen Ergebnisse sind leicht zu übersehen und für die Praktiker zur Lösung verschiedener spezieller Aufgaben bequem zu gebrauchen. *W. Iwanow.*

Jung, H.: Zur Theorie der gesteuerten Anheizvorgänge. *Z. angew. Math. Mech.* **38**, 56—69 (1958).

In der Arbeit wird das Problem der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitzahl für nichtstationäre Vorgänge in einem homogenen isotropen Körper behandelt, wenn das den Körper umgebende Medium seine Temperatur stark mit der Zeit ändert. Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitzahl des Körpers und die Wärmeübergangszahlen an seinen Oberflächen werden als linear angenommen. Die Anfangs- und Grenzbedingungen sind mit Hilfe der Störungsrechnung linearisiert. Die spezifische Wärme und das spezifische Gewicht werden im Rahmen einer technischen Näherung als unabhängig von der Temperatur vorausgesetzt. Unter den oben erwähnten Annahmen wird ein System linearer Differentialgleichungen mit linearen Randbe-

dingungen erhalten. Die Lösung der homogenen Differentialgleichungen ist nach einer von A. Kneschke (dies. Zbl. 71, 211) angegebenen Methode durchgeführt. Für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen verwendet Verf. die Form

$$\bar{T}_1 = \sum_0^t \varphi_k(\tau) u_k(x, y, z) \exp \left[-\frac{\omega_k^2 \lambda_0}{c\gamma} (t - \tau) \right] d\tau,$$

wo für die Zeit $t = 0$ die Temperaturverteilung im Körper $\tau(x, y, z)$ ist. Die erhaltene Annäherungslösung gilt für die ebene Platte, das dickwandige Rohr und die Hohlkugel. Der Unterschied zwischen von der Temperatur abhängigen und unabhängigen λ für Platte, dickwandiges Rohr und Hohlkugel ist graphisch in sechs Abbildungen dargestellt.

W. Iwanow.

Minin, I. N.: On the theory of the diffusion of radiation in a semi-infinite medium Soviet Phys., Doklady 3, 535—537 (1959), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 63 (1958).

Für die Bestimmung der Funktion $\Phi(\tau)$, deren Kenntnis zur Lösung des Strahlungstransportproblems auch bei Vorhandensein von Strahlungsquellen als Funktion der optischen Tiefe ausreicht, wird eine neue Methode angegeben, welche die Laplace-Transformierte berechnet unter Ausnutzung ihrer singulären Punkte. Berechnete Werte sind tabellarisch angegeben.

G. Wallis.

Sobolev, V. V.: Zur Theorie der Strahlungsdiffusion. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 11, Nr. 5, 39—50 (1958) [Russisch].

Im Hinblick auf die Theorie der Strahlungsdiffusion werden zunächst allgemein die Lösungen linearer Integralgleichungen behandelt, deren Kern nur von dem Betrage der Differenz zweier Argumente abhängt. Die erhaltenen Ergebnisse, die zum Teil auf älteren Arbeiten von Ambarcumjan und Verf. beruhen, werden dann auf spezielle Probleme der Strahlungsdiffusion angewandt.

G. Wallis.

Sobolev, V. V.: Diffusion of radiation in a flat layer. Soviet Phys., Doklady 3, 541—545 (1959), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 69 (1958).

Die in einer früheren Arbeit benutzte Wahrscheinlichkeitsmethode zur Berechnung des Strahlungsfeldes in einem unendlich ausgedehnten Halbraum wird auf den Fall erweitert, daß die Strahlungsdiffusion in einer ebenen Schicht der endlichen optischen Dicke τ_0 berechnet werden soll.

G. Wallis.

Prokof'ev, V. A.: Mittelung der Gleichung des Strahlungsenergietransports über die Richtungen. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 13, Nr. 2, 57—66 (1958) [Russisch].

Es werden einige Lösungsmethoden von Strahlungstransportproblemen durch Entwicklungsverfahren untersucht für den Fall, daß nicht die Winkelverteilung der Strahlungsintensität zu bestimmen ist, sondern nur der über alle Winkel integrierte Strahlungsstrom.

G. Wallis.

Prokof'ev, V. A.: Transportgleichungen für die Integralfunktionen des Strahlungsfeldes. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 13, Nr. 3, 39—45 (1959) [Russisch].

Es werden Strahlungsprobleme in einem eben geschichteten Medium behandelt, indem die Lösungen nicht für die Winkelverteilung der Strahlung aufgesucht werden, sondern nur für die entweder über alle Winkel oder über eine Halbkugel integrierten Strahlungsströme. Hierbei werden die in einer vorhergehenden Arbeit (s. vorstehendes Referat) gewonnenen Ergebnisse benutzt und erweitert.

G. Wallis.

Elektrodynamik. Optik:

Vaghi, Carla: Energia di campi spazio-temporali emisimmetrici. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 264—268 (1957).

En se basant sur un lagrangien donné par Udeschini et dans les hypothèses restreintes qui y sont précisées (ce Zbl. 48, 204) l'A. détermine le tenseur d'énergie

et le vecteur-distribution de charge associé. Il montre en particulier que ce vecteur ne dépend que de la partie irrotationnelle du tenseur de champ. Dans des hypothèses plus générales ce problème est étudié par Pratelli, A. M. (ce Zbl. 84, 442).

J. Renaudie.

Zăgănescu, M. et T. Toro: Sur l'utilisation de la fonction δ de Dirac dans l'électrodynamique classique. Lucrările ști. Inst. Ped. Timișoara, Mat. Fiz. 1958, 201—204, français. und russ. Zusammenfassg. 204—205 (1959) [Rumänisch].

On introduit deux nouvelles fonctions δ_s , δ_t analogues à la fonction de Dirac et qui permettent d'écrire d'une manière correcte les équations de l'électrodynamique classique. Par exemple, l'équation de Poisson s'écrit $\Delta\varphi = -4\pi(\rho + \delta_s\sigma)$ σ étant la densité superficielle des charges électriques. Le potentiel vectoriel A satisfait à l'équation $\Delta\vec{A} = 4\pi c^{-1}(\vec{j} + \delta_p I\vec{t})$, I étant l'intensité des courants linéaires.

Französ. Zusammenfassg.

Bouwkamp, C. J.: A simple method of calculating electrostatic capacity. *Physica* 24, 538—542 (1958).

L'A. dimostra con esempi l'efficacia del seguente teorema per il calcolo della capacità C elettrostatica di un conduttore limitato con superficie S rispetto all'infinito nello spazio libero (vuoto). — Sia R una sfera di centro M e di raggio a , sia S' la trasformata di S rispetto ad R per raggi vettori reciproci. Allora $C = a^2 V_0$, essendo V_0 il potenziale in M delle cariche indotte su S' , essendo questa connessa con la terra, da una carica puntiforme unitaria negativa localizzata in M .

G. Lampariello.

● **Küpfmüller, Karl:** Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 6. verb. und erweit. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1959. VII, 512 S. mit 527 Abb. Ganzln. DM 31,50.

Das Standardwerk der Elektrotechnik liegt nunmehr in der sechsten Auflage vor (5. Auflage s. dies. Zbl. 65, 196). Beibehalten sind die bewährte Anordnung des die gesamte Elektrotechnik umfassenden Stoffes und die Schreibweise aller Gleichungen als Größengleichungen, die jetzt auf die neuen international eingeführten Formelzeichen umgestellt sind. Die erweiterte Neuauflage gibt Bauelementen und Schaltungen, die in letzter Zeit erhöhte Bedeutung gewonnen haben, wie z. B. Transistoren, Hallgeneratoren, Magnetverstärkern und Magnetkernspeichern, breiteren Raum. Erweitert sind auch die Kapitel über Vierpol- und Leitungstheorie; hier wurden außerdem analytisch-funktionentheoretische Methoden in größerem Umfang eingeführt.

G. Bosse.

Fritzsche, Gottfried: Systemtheorie elektrischer Netzwerke. I: Qualitativer Überblick zur Entwicklung und Problematik. II: Ergebnisse und Beispiele. *Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden* 7, (1957/58), 713—722, 1265—1290 (1958).

I. Nach einer erkenntnistheoretischen Betrachtung gibt Verf. einen geschichtlichen Überblick über die Problemstellungen und Lösungsmethoden auf dem verhältnismäßig neuen Gebiet der Netzwerktheorie: Die analytischen Verfahren der Filterberechnung (Wagner, Cauer, Zobel, Campbell, Foster, Laurent, Feldtkeller, Bode, Guillemin), die synthetische Betrachtungsweise (Norton, Darlington, Piloty, Bader, Feldtkeller, Cauer) sowie die Untersuchung des dynamischen Verhaltens (Heaviside, Wagner, Doetsch, Kautz, Küpfmüller, Peters, Boothroyd). Eine allgemeingültige und dem anwendenden Ingenieur verständliche Darstellung der Netzwerktheorie gelingt mit der Pol-Nullstellen-Methode, die Verf. als Grundlage einer synthetischen Systemtheorie der Netzwerke dient. Stationäres und dynamisches Verhalten führen beide in der komplexen Ebene zu einer universellen Kenngröße des Systems, der zulässigen P - N -Geometrie, d. h. der Verteilung der Pole und Nullstellen. An einem einfachen Beispiel (1 bzw. 2 Eigenwerte, d. h. 2 bzw. 4 Schaltelemente) zeigt Verf. die Realisierungsmöglichkeiten als Tiefpaß-Filter, als Laufzeitglied, als quasiverzerrungsfreies System und schließlich als Zeitfunktionswandler. — II. Als Fortsetzung des 1. Teiles gibt Verf. in

gedrängter Form einen Abriß der Systemtheorie der Netzwerke, wobei die angeführten Ergebnisse und Gesetze ohne Beweise zusammengestellt sind; sie können aus dem im 1. Teil sehr ausführlich angegebenen Quellennachweis entnommen werden. Die beiden Artikel stellen die Kurzfassung einer vom Verf. an der TH Dresden gehaltenen Vorlesung dar und wenden sich dementsprechend vorwiegend an den Lernenden, dem die ganze Leistungsfähigkeit der Pol-Nullstellen-Methode in einer einheitlichen Darstellung des umfangreichen Stoffes der Netzwerktheorie nahegebracht werden soll.

H. Schließmann.

● **Ratcliffe, J. A.: The magneto-ionic theory and its applications to the ionosphere.**

A monograph. Cambridge: At the University Press 1959. X, 206 p. 40 s. net.

Thema dieser ausgezeichneten Monographie ist die Dispersionsformel eines schwach ionisierten Gases, wie wir es in der Physik der Ionosphäre antreffen, nämlich unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfeldes. Im ersten Teil wird zunächst die Dispersionsformel (sog. Appleton-Hartree-Formel) in der üblichen Weise abgeleitet, nämlich aus den Maxwell'schen Gleichungen einerseits und den Bewegungsgleichungen andererseits. Anschließend wird eine mikroskopische Theorie der Dispersion (allerdings ohne Magnetfeld) angegeben; eine in der Optik schon früh angewandte Betrachtungsweise, bei der die Beiträge der Sekundärwellen phasengerecht addiert werden, wird auf den Fall starker Streuung erweitert. Man erhält dann die Dispersionsformel des Plasmas aus der Bedingung der Selbst-Konsistenz der Streuwellen. In den Paragraphen 4 und 5 wird dann die Absorption von verschiedenen Gesichtspunkten her in sehr interessanter Weise beleuchtet. Auch hier bemüht sich Verf. bei der mikroskopischen Betrachtung, die physikalischen Einzelercheinungen in anschaulicher Weise darzulegen. Verglichen mit anderen Darstellungen des gleichen Gegenstandes, ist die Begriffsbildung in diesem ersten Kapitel außergewöhnlich und didaktisch besonders wirkungsvoll (so die Begriffe des „äquivalenten Mediums“, der „konstituierenden Relationen“, der charakteristischen Wellen). — Im zweiten Teil werden die Ergebnisse der Dispersionsformel im einzelnen diskutiert und mit vielen Figuren beschrieben. Es ist eine bekannte Erfahrung, daß erst durch eine numerische Diskussion die Dispersionsformel dem Schüler bzw. Leser wirklich verständlich wird. In diesem Kapitel sind eine Reihe von Figuren enthalten, die erstmalig für dieses Buch berechnet wurden. Der dritte Teil befaßt sich dann mit der Anwendung der Dispersionsformel auf die Ionosphäre. Je nach dem Anwendungsbereich wird ein Modell mit linearer bzw. exponentiell ansteigender Elektronendichte benutzt. Der Einfluß des Erdmagnetfeldes und die dadurch auftretenden Komplizierungen werden eingehend diskutiert, wobei Verf. sich besonders um eine physikalisch einsichtige Darstellung bemüht. Verglichen mit vielen früheren Darstellungen ist das ein besonderer Vorteil des Ratcliffeschen Buches. In diesem Kapitel wird leider die übliche Bezeichnungsweise für die verschiedenen Echos angewandt, die keine klare Unterscheidung zwischen Polarisierung der Welle und Reflexionsbedingung erlaubt; dadurch entstehen für einen nicht genau bewanderten Leser die bekannten Schwierigkeiten. Die in Ziffer 12.3 versuchte Herleitung der Reflexionshöhe kann nicht ganz befriedigen, weil die Reflexion bei senkrechter Inzidenz schließlich doch als Wellenerscheinung verstanden werden muß. — Im vierten Teil werden einige spezielle Fragen der Anwendung auf die Ionosphäre besprochen, dabei wird auch ein Vergleich mit der Kristalloptik durchgeführt. Nur ganz kurz erwähnt wird leider die Ausbreitung von Wellen sehr niedriger Frequenzen im Plasma, die doch gerade in Ratcliffes Laboratorium von Storey besonders studiert worden ist. — Jede Monographie ist darauf angewiesen, ihren Bereich klar abzustecken. Verf. hat das mit außergewöhnlicher Schärfe getan und dadurch eine besonders geschlossene Darstellung erreicht, die dieses Buch besonders schön macht. Andererseits entgehen dadurch dem Leser mögliche Querbeziehungen. So ist die statistische Ableitung der Dispersionserscheinungen aus der Boltzmann-Gleichung nicht behandelt; wohl des-

halb fehlt auch jeder Hinweis auf die sehr wichtigen russischen Arbeiten der Schule Ginsburgs. Das vom Verf. benutzte, nicht rationalisierte Fünfer-Maß-System dürfte, zumindest für kontinentale Leser, ziemlich verwirrend wirken. (Um auf übliche rationalisierte Einheiten umzuschreiben, wäre in einer Reihe von Ausdrücken Faktoren 4π einzuführen). Es ist sehr bedauerlich, daß durch diesen Umstand die Lesbarkeit für Leser außerhalb Großbritanniens nicht unerheblich beeinträchtigt wird; sonst könnte das ausgezeichnete Buch auch für Lehrzwecke sehr empfohlen werden.

K. Rawer.

Caprioli, Luigi: Sulla attenuazione nelle guide circolari con pareti assorbenti. Boll. Un. mat., Ital., III. Ser. 12, 526—534 (1957).

L'A. discute il problema al contorno al quale si è condotti quando si vuole valutare l'attenuazione che l'assorbimento delle pareti di una guida circolare determina sulla propagazione di onde elettromagnetiche lungo la guida stessa. Seguendo Schelkunoff, la risolvende del problema è un'equazione trascendente nel campo complesso. — L'A. determina per i vari modi possibili di propagazione le espressioni dell'attenuazione.

G. Lampariello.

Hauser, Walter: On the theory of anisotropic obstacles in waveguides. Quart. J. Mech. appl. Math. 11, 427—437 (1958).

Den Einfluß eines Hindernisses in einem Wellenleiter auf die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen beschreibt man mit Hilfe einer Streumatrix, welche die reflektierten und die einfallenden Amplituden an geeignet gewählten Ebenen zueinander in Relation setzt. Die Berechnung der Matrixelemente dieser Streumatrix erfordert die Kenntnis des Feldes im Inneren des Hindernisses. Die Schwingersche Theorie für isotrope Hindernisse wird auf den anisotropen Fall verallgemeinert. Mit Hilfe einer dyadischen Greenschen Funktion werden Integralgleichungen für das Problem gewonnen, welche an sich nicht einfacher zu lösen sind als die Maxwell'schen Gleichungen, jedoch die Berechnung der Matrixelemente vermittels eines Variationsverfahrens ermöglichen.

H. Stolz.

Moser, Josip: Theorie der Depolarisation des an Lösungen von makromolekularen Stoffen gestreuten Lichtes. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. natur., Annuaire 10, 87—130, deutsche Zusammenfassg. 131—132 (1959) [Serbo-kroatisch].

Harrison, E. R.: Epicyclie orbits of charged particles. Amer. J. Phys. 27, 314—317 (1959).

Das ebene Problem der Bewegung geladener Teilchen in einem Feld, das sich aus einem elektrischen Radialfeld $\vec{E} = \text{const } \vec{r}$ und einem homogenen Magnetfeld senkrecht zu der Ebene, in der die Teilchen sich bewegen, zusammensetzt, führt auf eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die komplexe Bahnvariable, so daß eine allgemeine Lösung in einfacher Form möglich ist. Die Bahnen sind Epizykloiden, wenn das elektrische Feld nicht zu stark ist. Die verschiedenen Typen von Bahnkurven, die sich für verschiedene Werte der elektrischen und magnetischen Feldstärken ergeben, werden diskutiert. Verf. erwähnt nicht, daß es sogar möglich ist, eine allgemeine Lösung auch für den Fall anzugeben, daß den genannten Feldern noch ein beliebiges homogenes elektrisches Feld in einer beliebigen, in der Bahnebene liegenden Richtung überlagert ist. Man erhält in diesem Fall nur an Stelle der homogenen eine lineare inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

F. Lenz.

Kirstein, P. T.: Paraxial formulation of the equations of electrostatic space-charge flow. J. appl. Phys. 30, 967—975 (1959).

Aufstellung von Gleichungen für die Berechnung des Verlaufs von rotations-symmetrischen Elektronenstrahlbündeln in rotationssymmetrischen elektrostatischen Feldern. Die Rolle der Bündelachse wird dabei aber nicht von der geradlinigen Symmetrieachse übernommen, sondern von einer Schar von gekrümmten Meridionalbahnen, welche eine Rotationsfläche bilden, auf deren nahe Umgebung das Bündel

begrenzt ist. Mit diesen Meridionalbahnen als Achsen wird unter Berücksichtigung von Raumladungseffekten die bekannte Theorie des elektronenoptischen Systems mit krummliniger Achse durchgeführt. Insbesondere wird der Fall eines Hohlbündels behandelt, das aus einer ringförmigen Kathode austritt und in Richtung der Rotationsachse beschleunigt wird.

F. Lenz.

Kašjankov (Kaš'iankov), P. P.: On the conditions for the existence of stigmatic imaging in electron-optical systems with curvilinear axes. Soviet Phys., Doklady **3**, 573—576 (1959), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR **120**, 497—500 (1958).

Aufstellung hinreichender Bedingungen für die Existenz einer stigmatischen Abbildung im paraxialen Bereich. Die zunächst allgemein abgeleiteten Bedingungen werden auf den Fall eines nur wenig von der Rotationssymmetrie abweichenden elektronenoptischen Abbildungssystem und auf Anordnungen spezialisiert, die deren axialen Astigmatismus zu korrigieren gestatten.

F. Lenz.

Septier, Albert: Bipartition d'un faisceau de particules par un biprisme électrostatique. C. r. Acad. Sci., Paris **249**, 662—664 (1959).

Banerjee, Haridas: Scattering of a longitudinally polarised electron beam by a uniform magnetic field. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A **24**, 279—287 (1958).

Berechnung des von der Polarisierung abhängigen differentiellen Wirkungsquerschnittes für die Streuung eines Elektrons durch ein statisches homogenes Magnetfeld mit Hilfe des *S*-Matrix-Formalismus von Feynman und Dyson. Das Ergebnis wird auf die beiden Sonderfälle spezialisiert, daß das Magnetfeld longitudinal bzw. transversal zum Elektronenstrahl gerichtet ist. Bei der Streuung bleibt der Polarisationsgrad ungeändert, aber die Orientierung der Polarisationsrichtung relativ zum Impuls ändert sich. Die Möglichkeit einer Messung des magnetischen Moments eines freien Elektrons auf Grund dieser Ergebnisse wird diskutiert.

F. Lenz.

Fer, F.: Stabilité et isochronisme dans les cyclotrons à champ magnétique étoilé. J. Phys. Radium **20**, Suppl. au Nr. 4, 5—17 (1959).

In Magnetfeldern mit einer Symmetrieebene $z = 0$ kann man die Stabilitäts- und Isochronismus-Bedingungen besonders einfach formulieren, wenn man ein krummliniges orthogonales Koordinatensystem σ, ν, z derart einführt, daß die Linien $\nu = \text{const}$ die in der Symmetrieebene $z = 0$ verlaufenden Gleichgewichtsbahnen sind.

F. Lenz.

Iogansen, L. V. and M. S. Rabinovič (Rabinovich): Coherent electron radiation in a synchrotron. I. Soviet Phys., JETP **35** (8), 708—710 (1959), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **35**, 1013—1016 (1958).

Während die Formeln für die Synchrotronstrahlung eines einzelnen Elektrons schon seit längerer Zeit berechnet worden sind, wurde die Kohärenzfrage bei der Abstrahlung mehrerer in einem Magnetfeld rotierender Elektronen erst in jüngerer Zeit behandelt, und zwar auch nur für bestimmte Phasenverteilungen der Teilchen in einem Strahl. Verff. berechnen für beliebige Phasenverteilungen das Strahlungsfeld, wobei sich für die niedrigen Harmonischen Kohärenz ergibt.

G. Wallis.

Sayied, A. M.: The Čerenkov effect in composite (isotropic) media. Proc. phys. Soc. **71**, 398—404 (1958).

Considerati due cilindri coassiali dielettrici e permeabili aventi una superficie cilindrica comune e una particella carica mobile lungo l'asse comune, l'A. studia l'interessante problema della caratterizzazione della radiazione Čerenkov emessa dalla particella. Il metodo di soluzione adottato è fondato sulla invarianza delle equazioni elettrodinamiche fenomenologiche di Maxwell. Precisamente, si determina anzitutto il campo elettromagnetico rispetto ad un osservatore S' rispetto al quale la carica è in quiete, poi si suppone che l'osservatore si muova col mezzo con la stessa velocità di questo e si applica la trasformazione di Lorentz.

G. Lampariello.

Trubnikov, B. A.: Plasma radiation in a magnetic field. Soviet Phys., Doklady 3, 136—140 (1958), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 913—916 (1958).

Für Frequenzen, auf denen man den Brechungsindex gleich 1 setzen kann, wird an Hand der bekannten Formeln für die Synchrotronstrahlung und unter Voraussetzung einer Maxwell-Verteilung der Elektronen die optische Dicke einer Schicht infolge Emission und Absorption im thermischen Gleichgewicht berechnet. Daraus ergibt sich, von welcher Ordnung ab die Oberfrequenzen mit merklicher Intensität emittiert werden. Anschließend wird der Polarisationsgrad für die verschiedenen Frequenzen berechnet. Die Anwendung der Ergebnisse z. B. auf die Strahlung des Krebsnebels ermöglicht zusätzliche Aussagen über das Energiespektrum der Elektronen. *G. Wallis.*

Golitsyn (Golitsyn), G. S.: Unidimensional motion in magnetohydrodynamics. Soviet Phys., JETP 35 (8), 538—541 (1959), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 35, 776—781 (1958).

In Analogie zu der Riemannschen Lösungsmethode der hydrodynamischen Gleichungen werden die Riemannschen Invarianten längs der Charakteristiken $dx/dt = v \pm c_m$; $c_m^2 = c^2 + V_a^2$; $V_a^2 = H^2/4\pi\rho$ (Alfvénsche Geschwindigkeit), bestimmt für den Fall einer adiabatischen Bewegung einer Flüssigkeit unendlicher Leitfähigkeit unter dem Einfluß eines Magnetfeldes. Hieraus ergibt sich eine neue Methode zur näherungsweisen Bestimmung der allgemeinen Lösung der magnetohydrodynamischen Gleichungen. Die Ergebnisse werden auf einige Bewegungstypen angewandt, insbesondere auf Stoßwellen. *G. Wallis.*

Fourès-Bruhat, Yvonne: Fluides chargés de conductivité infinie. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2558—2560 (1959).

Ausgehend von einer Darstellung des Maxwell'schen Feldtensors mit Hilfe vierdimensionaler Feldvektoren werden die Gleichungen für Stoßfronten mit relativistischen Geschwindigkeiten abgeleitet und die Ausbreitungsgeschwindigkeiten dieser Stoßfronten für den Fall unendlicher Leitfähigkeit bestimmt. *G. Wallis.*

Achieser (Akhieser), A. I., G. Ja. (G. Ia.) Ljubarskij (Liubarskii) and R. V. Polovin: The stability of shock waves in magnetohydrodynamics. Soviet Phys., JETP 35 (8), 507—511 (1959), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 35, 731—737 (1958).

Nach Aufstellung der Gleichungen, welche die Störungen ebener magnetohydrodynamischer Stoßfronten beschreiben sollen, und ihrer Linearisierung für den Fall kleiner Störungen wird die Lösungsmethode dieser Gleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation angegeben. Bei der Diskussion des Stabilitätsproblems ergeben sich zwei Typen stabiler Stoßwellen. Abschließend werden einige Fragen der Wechselwirkung von Stoßwellen und Diskontinuitäten im Plasma untersucht. *G. Wallis.*

Kontorovič (Kontorovich), V. M.: On the interaction between small disturbances and discontinuities in magnetohydrodynamics and on the stability of shock waves. Soviet Phys., JETP 35 (8), 851—858 (1959), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 35, 1216—1225 (1958).

Bei Anwesenheit von Diskontinuitäten im Plasma wird eine analytische Lösung für die Ausbreitungsvektoren der von den Diskontinuitätsflächen ausgehenden magnetohydrodynamischen Wellen schwierig, weil die Dispersionsbeziehungen für die magnetoakustischen Wellen relativ kompliziert sind und bei der Wechselwirkung mit einer solchen Unstetigkeitsfläche alle möglichen magnetohydrodynamischen Wellenformen ineinander überführt werden können. Verf. gibt daher eine einfache geometrische Lösung an, welche die Gesetze der Reflektion und Brechung zu formulieren gestattet. Unter Verwendung der Ergebnisse von Achieser, Ljubarskij und Polovin (s. vorstehendes Referat) wird dann die Stabilität von Stoßwellen bei der Wechselwirkung mit einer Diskontinuität behandelt. *G. Wallis.*

Talwar, S. P.: Hydromagnetic stability of a conducting, inviscid, incompressible fluid of variable density. *Z. Astrophys.* **47**, 161—168 (1959).

Es werden die Einflüsse untersucht, welche die Anwesenheit eines Magnetfeldes auf die Rayleigh-Instabilitäten einer inkompressiblen, reibungsfreien, vollkommen leitenden Flüssigkeit variabler Dichte ausübt. Die stabilisierende Wirkung des Magnetfeldes wird für zwei spezielle Dichteverteilungen untersucht. Es zeigt sich, daß das Magnetfeld Konfigurationen stabil machen kann, welche ohne Magnetfeld gegen Störungen aller Wellenlängen instabil sind.

G. Wallis.

Naze, Jacqueline: Sur certains écoulements quasi rectilignes d'un fluide doué de conductivité électrique finie. *C. r. Acad. Sci., Paris* **248**, 525—528 (1959).

Es wird der Ausströmvorgang einer kompressiblen Flüssigkeit endlicher Leitfähigkeit aus einem rechteckigen Rohr mit langsam veränderlichem Querschnitt bei Anwesenheit eines Magnetfeldes untersucht, und zwar sowohl im Unter- als auch im Überschallbereich. Stabilitätskriterien werden angegeben.

G. Wallis.

Wei, Chau-Chin: Relativistic hydrodynamics for a charged nonviscous fluid. *Phys. Review, II. Ser.* **113**, 1414 (1959).

The equations of relativistic hydrodynamics have been derived by Chalatnikov [Žurn. éksp. teor. Fiz. **27**, 529—541 (1954)] from a variational principle. In this note the author gives an alternative variational principle describing the behaviour of a charged nonviscous fluid.

A. Loinger.

Stanjukovič (Staniukovich), K. P.: Shock waves in a conducting ultrarelativistic gas. *Soviet Phys., JETP* **35** (8), 359—360 (1959), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. **35**, 520—521 (1958).

Aus den Erhaltungsgrößen beim Durchgang eines Stromes leitfähigen Gases durch eine Stoßfront werden Bedingungen abgeleitet, unter denen neue Stoßwellen gebildet werden können oder nicht.

G. Wallis.

Crupi, Giovanni: Sulla velocità di gruppo nella magneto-idrodinamica. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* **13**, 539—542 (1958).

In un fluido incompressibile di conducibilità elettrica σ , soggetto a un campo, magnetico costante di induzione B_0 , si considera, trascurando la corrente di spostamento, onde magneto-idrodinamiche piane, sinusoidali, rispetto al tempo, di frequenza ω e smorzate, propagantisi secondo una direzione che con B_0 forma un angolo ϑ . In base alle equazioni di Euler-Minkowski (ma il risultato sussiste anche per le equazioni di Euler-Maxwell) si dimostra che fra la velocità di fase W_f e la velocità di gruppo $W_g = 1: d/d\omega (\omega/W_f)$ intercorre la relazione $W_g = (1 - a)^{-1} W_f$, dove a viene calcolato esplicitamente e risulta $0 < a < 1$; inoltre: per $\sigma \rightarrow \infty$ è $W_g = W_f$, per $\sigma \rightarrow 0$ è $W_g = 2 W_f$.

R. Nardini.

Rott, Nicholas: A simple construction for the determination of the magnetohydrodynamic wave speed in a compressible conductor. *J. Aero-Space Sci.* **26**, 249—250 (1959).

Dato un fluido compressibile dotato di conducibilità elettrica γ infinita e dette a la velocità delle onde acustiche in assenza di campo magnetico e $b = \mu H^2/\rho$ la velocità delle onde magneto-idrodinamiche che si avrebbero se il mezzo fosse incompressibile e soggetto al campo magnetico H , si richiama la nota equazione

$$(*) \quad c^4 - (a^2 + b^2) c^2 + a^2 b^2 \cos^2 \vartheta = 0,$$

che dà la velocità di fase c delle onde miste, essendo ϑ l'angolo fra H e la normale al fronte d'onda. Si fornisce poi una semplice costruzione geometrica per ricavare le due radici della (*), ottenendo anche, per ciascuno dei due modi possibili, le corrispondenti direzioni (normali fra loro) della velocità delle particelle. Il risultato è presentato per onde piane, ma ha validità generale, dato che, come il recens. ha dimostrato (questo Zbl. **73**, 442), la (*) vale, sempre per $\gamma = \infty$, per onde di tipo qualsiasi.

R. Nardini.

Schmidt, G.: An investigation on plasmas in external magnetic fields. II: Varying fields. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 10, 659—674 (1958).

Si considera un plasma, avente dimensioni finite nel piano xy , soggetto a un campo magnetico inizialmente uniforme parallelo all'asse z e lentamente variabile; il plasma passa quindi attraverso stati di equilibrio già studiati in un precedente lavoro (questo Zbl. 82, 206). Si studiano i due casi limite: 1) conducibilità elettrica infinita (schematizzando così i plasmi densi con frequenti interazioni fra particelle): è perciò consentito l'uso delle comuni equazioni della magneto-idrodinamica; 2) collisioni trascurabili (plasmi rarefatti): ci si occupa solo di traiettorie che differiscono da quelle circolari per termini del primo ordine. In entrambi i casi, limitandosi a geometrie cilindriche ($\partial/\partial z = 0$), si ottiene per il plasma un sistema completo di equazioni. Tali sistemi presentano notevoli somiglianze; risolvendoli si può esprimere la pressione, il volume e la temperatura del plasma in funzione dei dati iniziali e del campo magnetico. In una prima appendice si discute sulla validità del procedimento e si valuta l'ordine di grandezza dei parametri che potrebbe rendere possibile una realizzazione sperimentale. In una seconda appendice si accenna all'estensione delle precedenti considerazioni ai processi che non sono quasi-stazionari: esaminando uno schema semplificato si giunge a mostrare la possibilità di procedimenti che portano ad aumentare la temperatura del plasma.

R. Nardini.

Quantentheorie:

Biedenharn, L. C.: Addendum to a note on statistical tensors in quantum mechanics. *Ann. of Phys.* 6, 399—400 (1959).

Complétant un article précédent (ce Zbl. 82, 219), l'A. signale que la paramétrisation discutée p. 112 a déjà été utilisée par Majorana (ce Zbl. 4, 185).

G. Petiau.

Hillion, Pierre: Limite à la vitesse de la lumière d'un système particulier de paramètres d'Einstein-Kramers. *C. r. Acad. Sci., Paris* 248, 2731—2733 (1959).

Hillion, Pierre: Limite non relativiste de la représentation hydrodynamique de l'équation de Dirac. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 1394—1396 (1957).

Halbwachs, Francis: Étude de la goutte de Bohm et Vigier en relation avec le formalisme hydrodynamique de Dirac-Takabayasi. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 1392—1394 (1957).

Halbwachs, Francis: Sur un cas particulier du mouvement de la goutte de Bohm et Vigier. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 1513—1516 (1957).

• Macke, Wilhelm: *Quanten. Ein Lehrbuch der Theoretischen Physik.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1959. XII, 494 S. DM 29,50.

After „Wellen“ (this Zbl. 79, 394) this is the next volume appearing in the series of cross sections through theoretical physics. The first volume is now announced to be on mechanics of particles, systems and continua. The present one deals with non-relativistic quantum mechanics. This cross section differs less from that in more conventional partitions of physics, than in the volume on waves. But the two aspects of particles and of waves and their quantization are strongly emphasized throughout the book. Other volumes will treat of electromagnetic fields and forces, of thermodynamics and statistics and of quanta and relativity. In the present volume the field concept and its relation to waves has not been touched upon. After an introduction on the old quantum theory of the first quarter of this century, matrix mechanics and wave mechanics are introduced respectively as quantization of particles and of waves in two separate parts and thereafter related to each other. Subsequent parts deal with bound states, with atoms and molecules and with scattering. The final part on representation of quantum theory in Hilbert space is mainly concerned with fermion and boson creation and annihilation operators

or wave operators and with representations and once more stresses the different aspects of particle quantization and wave quantization. In this and some other parts the book follows the modern trend of introducing already in elementary theory concepts and methods developed in more advanced research (in particular field theory). I doubt whether the advantage of making in this way the introduction easier and more transparent has been fully exploited here. The book has in the first place been written for students both of theoretical and of experimental (and technical) physics. I am not convinced that these two aspects have been balanced out in a most satisfactory way. The physical thoroughness and mathematical rigour are (also in the last part) not always sufficient for the theoreticians (and the key to further study is specialized on applications and group theory only), the applications (in particular those on atoms and molecules) are rather concise and for the experimentalists the fundamental considerations e. g. on particles and waves might appear somewhat prolix, even if they would pass over the last part. The general scheme of the book is of considerable interest. Various discussions and derivations are very clear and to the point. Other arguments are somewhat slipshod or incomplete (e. g. the normalizability restrictions on the asymptotic conditions at infinity (p. 139) or at the origin (p. 205); the integer l for orbital angular momentum (p. 197, 199); the order of non-commuting operators (p. 394); the derivation of "golden rule No. 1" (p. 410)). The few remarks on "causal" interpretation (p. 99) do not say anything, but they are likely to cause confusion with not very critical readers. For various concepts or methods introduced, it might have been useful to mention their current names (e. g. parity (p. 177); interaction picture (p. 406)). There are again instructive problems at the end of most chapters.

H. J. Groenewold.

Kaplan, Jerome I.: A modified second order perturbation theory. Bull. Res. Council Israel, Sect. F. 7, 31—32 (1957).

Zusatz zur Arbeit von N. F. Ramsey (dies. Zbl. 50, 446).

Epstein, Saul T.: Harmonic oscillator wave packets. Amer. J. Phys. 27, 291—293 (1959).

Mit Hilfe von zeitabhängigen Operatoren werden Wellenpakete des harmonischen Oszillators dargestellt, welche ohne Änderung der Form oszillieren. Die Ergebnisse stehen in Übereinstimmung mit jenen anderer Verff. Einige Mittelwertbildungen, sowie einige Betrachtungen über den klassischen Grenzwert bilden den Abschluß der Arbeit.

P. Urban.

Engelman, Folker: Über ein Theorem von Bloch. Z. Phys. 155, 275—280 (1959).

Voraussetzungen: 1. Das System wird durch einen zeitunabhängigen Hamilton-Operator $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \vec{\sigma})$ beschrieben (\mathbf{r} : Orts-, \mathbf{p} : Impuls-, $\vec{\sigma}$: Spinoperator). 2. Das System sei invariant gegen Bewegungsumkehr: $H(\mathbf{r}, -\mathbf{p}, -\vec{\sigma}) = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \vec{\sigma})$. — Folgerungen: 1. Die Eigenwerte sind wegen der Bewegungsumkehr entartet. 2. Im thermodynamischen Gleichgewicht kommen in einer Gesamtheit die miteinander entarteten Zustände gleichhäufig vor, d. h. es verschwindet der Strom für den Grundzustand.

W. Klose.

March, N. H. and W. H. Young: Variational methods based on the density matrix. Proc. phys. Soc. 72, 182—192 (1958).

Die Summe der Eigenwerte \mathcal{E} eines N -Körperproblems mit einem gegebenen Potential V kann als Funktion der Dichtematrix angeschrieben werden, wobei die Dichtematrix noch zwei Nebenbedingungen, Normalisierung und Idempotenz, genügen muß. Nimmt man nun die bekannte Dichtematrix $\varrho_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ einfacher Probleme und unterwirft sie einer beliebigen (nicht-linearen) Koordinatentransformation $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r})$, so genügt $\varrho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sqrt{J(\mathbf{r})J(\mathbf{r}')} \varrho_0(\mathbf{R}(\mathbf{r}'), \mathbf{R}(\mathbf{r}))$, wo $J(\mathbf{r})$ die Jacobische Determinante der Transformation bedeutet, automatisch den Nebenbedingungen.

Die Transformationsfunktion erscheint dann als Variationsfunktion; man kann dann \mathcal{L} in bezug auf diese Funktion minimisieren. Die Methode ist für den eindimensionalen Fall eines Oszillators mit $N = 10$, mit der exakten Lösung, sowie mit den Näherungsmethoden von Weizsäcker (für welche die vorliegende Methode eine wellenmechanische Grundlage liefert) und von Thomas-Fermi verglichen. Die Übereinstimmung aller Methoden ist hier gut. Im Falle der interessanteren dreidimensionalen Probleme ist die Sachlage nicht ganz klar, vor allem wegen der zu großen Wahl der Koordinatentransformationen. Weitere Arbeit scheint nötig zu sein, um die Bedeutung dieses Näherungsverfahrens beurteilen zu können. *A. O. Barut.*

Širokov (Shirokov), Ju. M. (Ju. M.): A group-theoretical consideration of the basis of relativistic quantum mechanics. I: The general properties of the inhomogeneous Lorentz group. II: Classification of the irreducible representations of the inhomogeneous Lorentz group. III: Irreducible representations of the classes P_0 and O_0 , and the non-completely-reducible representations of the inhomogeneous Lorentz group. Soviet Phys., JETP 6, 664—673, 919—928, 929—935 (1958), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 33, 861—872, 1196—1207, 1208—1214 (1957).

In dieser Serie von Arbeiten werden einige Fragen der relativistischen Quantentheorie mit Hilfe gruppentheoretischer Methoden untersucht, ohne daß eine spezielle Form der Bewegungsgleichungen zugrunde gelegt wird.

I. Nach einleitenden Bemerkungen wird gezeigt: Ist U eine Matrix-Darstellung der inhomogenen Lorentz-Gruppe, so ist auch $(U^*)^{-1}$ (* bedeutet konjugiert komplex) eine solche. Sind U und $(U^*)^{-1}$ äquivalent, so existiert eine eindeutig bestimmte hermitesche Form $(\Omega, H\Omega)$ (Ω ist ein beliebiger Vektor des Darstellungsraumes), welche bei allen Transformationen der Gruppe invariant ist. Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt. Die Darstellung U heißt reell oder komplex, je nachdem U und $(U^*)^{-1}$ äquivalent sind oder nicht. Eine reelle Darstellung heißt unitär oder nicht unitär, je nachdem H positiv definit oder indefinit ist. Ist U komplex, so ist die direkte Summe von U und $(U^*)^{-1}$ reell und reduzibel. Es wird gezeigt, wie man auch für die Darstellung $(U^T)^{-1}$ (T bedeutet transponiert) eine invariante Form konstruieren kann. Für die infinitesimalen Operatoren der inhomogenen Lorentz-Gruppe werden die Vertauschungsregeln dieser Operatoren untereinander sowie mit den Operatoren der Raum- und der Zeit-Spiegelung hergeleitet. Die Operatoren der Schwerpunktskoordinate und des Eigendrehimpulses werden angegeben. Aus dem Schurschen Lemma folgt als notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Irreduzibilität einer Darstellung, daß alle Vektoren des zugeordneten Darstellungsraumes zum gleichen Eigenwert einer Invarianten der Gruppe gehören, und daß dies für alle Invarianten eines vollständigen Satzes erfüllt sein muß. Für die inhomogene Lorentz-Gruppe sind das Quadrat des Energie-Impuls-Vektors und das Quadrat des Eigendrehimpulses solche Invarianten. Für spezielle Darstellungen können weitere Invarianten existieren. Eine Darstellung U ist dann und nur dann reell, wenn die Eigenwerte der Invarianten und der infinitesimalen Operatoren in dem betreffenden Darstellungsraum reell sind. Daraus folgt, daß im Falle unitärer Darstellungen die infinitesimalen Operatoren hermitesch sind.

II. Wie aus den Ergebnissen von I. hervorgeht, erhält man eine Übersicht über die irreduziblen Darstellungen der inhomogenen Lorentz-Gruppe, indem man die Eigenwertspektren aller Invarianten eines vollständigen Invariantensystems bestimmt. Um über die Vektoren der Darstellungsräume mehr zu erfahren, wählt man ein maximales System von Operatoren, die paarweise miteinander vertauschbar sind und bestimmt die simultanen Eigenfunktionen dieses Systems. Zweckmäßig wählt man als derartiges Operatorensystem 3 Komponenten des Energie-Impuls-Vektors und 1 Komponente des Eigendrehimpulses. Innerhalb des Raumes einer bestimmten Darstellung müssen alle Funktionen zu den gleichen Eigenwerten des Quadrates des Energie-Impuls-Vektors und des Quadrats des Eigendrehimpulses gehören. Die

Darstellungen der inhomogenen Lorentz-Gruppe werden nun in vier große Klassen eingeteilt: die Klasse P_m , für welche der Energie-Impuls-Vektor zeitartig ist, die Klasse P_π , für welche der Energie-Impuls-Vektor raumartig ist, und in die Klassen P_0 und O_0 , für welche das Quadrat des Energie-Impuls-Vektors verschwindet. Je nachdem, ob der Energie-Impuls-Vektor nichtverschwindende Komponenten hat oder nicht, liegt Klasse P_0 oder O_0 vor. Die sämtlichen endlich-dimensionalen und unendlich-dimensionalen Darstellungen der Klassen P_m und P_π werden bestimmt und in reelle unitäre, reelle nichtunitäre und komplexe Darstellungen eingeteilt. Schließlich wird noch die Form der infinitesimalen Operatoren in den betreffenden Darstellungsräumen angegeben.

III. Die Darstellungen mit endlicher und unendlicher Dimension der Klassen P_0 und O_0 werden bestimmt und in reelle unitäre, reelle nichtunitäre und komplexe Darstellungen eingeteilt. Die Ausdrücke für die Darstellung der infinitesimalen Operatoren werden angegeben. Die Darstellungen der Klasse O_0 sind identisch mit den Darstellungen der homogenen Lorentz-Gruppe. Ein Abschnitt über nicht vollständig reduzible Darstellungen der inhomogenen Lorentz-Gruppe beschließt die Arbeit.

M. Kretzschmar.

Buchdahl, H. A.: On extended conformal transformations of spinors and spinor equations. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **11**, 496—506 (1959).

Die Wellengleichungen, welche unter der restriktiven konformen Gruppe C_0 invariant sind, wurden von verschiedenen Autoren untersucht. Hier wird die verallgemeinerte konforme Gruppe C (extended conformal group) betrachtet. Zuerst werden die Transformationseigenschaften allgemeiner Spinoren bestimmt, die aus Metrikspinor $\gamma_{\mu\nu}$, Spinorfunktionen ξ und ihrer kovarianten Ableitungen geformt werden. Das Resultat wird auf allgemeine lineare gekoppelte Gleichungen angewandt, die Teilchen mit einer endlichen Masse κ und beliebigem festen Spin S beschreiben, wenn noch zwei Nebenbedingungen hinzugefügt werden. Die Invarianzforderung führt dann zum folgenden Schluß: (a) wenn die Masse κ eine konforme Invariante ist, dann können die Wellengleichungen für keinen Wert von Spin unter C invariant sein; (b) wenn sich aber κ als eine konforme Kovariante transformiert, dann sind die Gleichungen C -invariant, wenn sie zugleich invariant unter Reflektionen sind. Dann erhält man, je nachdem ob man die Nebenbedingungen mittransformiert oder nicht, als einzige Möglichkeiten im ersten Falle nur die Dirac-Gleichung, und im zweiten Falle die Gleichungen für halbungerade Spinwerte.

A. O. Barut.

Payne, W. T.: Spinor theory and relativity. II. *Amer. J. Phys.* **27**, 318—328 (1959).

[Teil I, s. *Amer. J. Phys.* **23**, 526—536 (1955)] — Es werden zwei Arten von Spinoren zweiten Ranges definiert und ihre geometrischen Darstellungen angegeben. Im Anschluß daran, wird die Spinortheorie auf die relativistische Quantenmechanik und auf die elektromagnetische Theorie angewendet.

P. Urban.

Marx, G.: On the second order wave equation of the fermions. *Nuclear Phys.* **9**, 337—346 (1958).

La teoria delle interazioni deboli — che involgono, in ogni caso noto, la non conservazione della parità — ha avuto un'importante giustificazione da parte di Feynman e Gell Mann. La loro "teoria" è basata su una particolare rappresentazione delle autofunzioni di particelle a spin $1/2$: essi partono da un'equazione di moto del secondo ordine, le cui autofunzioni sono invarianti per la trasformazione $\chi \rightarrow i\gamma_5 \chi$. Si ottiene uno spinore di quattro componenti tenendo conto (oltre ai due autovettori di spin opposto) delle autofunzioni di tipo $\chi \equiv (1 + i\gamma_5)\psi$ (rappresentazione χ , in contrasto con la usuale rappresentazione ψ di Dirac.) La rappresentazione dei campi di Fermi è trattata dall'anei casi più generali delle interazioni deboli, forti ed elettromagnetiche. Questo è importante perchè solo la natura dell'interazione può, presumibilmente, indicare e giustificare la rappresen-

tazione corretta. Nel presente lavoro è studiata la portata della rappresentazione χ nel caso del neutrino e del campo nucleonico, soprattutto in relazione all'invarianza per trasformazioni di Touschek e al gruppo di sostituzioni di Pauli e di Gürsey. Viene dimostrata l'equivalenza della trasformazioni di fase barionica, nella rappresentazione ψ colla trasformazione di Touschek nella rappresentazione χ ; e l'equivalenza delle rotazioni nello spazio di spin isotopico in ψ con le trasformazioni di Pauli in χ . E' fatta una breve applicazione al modello di Heisenberg.

L. Tenaglia.

Stehle, P.: Calculation of electron-electron scattering. Phys. Review, II. Ser. **110**, 1458—1460 (1958).

Die zur Berechnung der Elektron-Elektron und Positron-Elektron-Streuung notwendigen Matrixelemente werden explizit ausgerechnet. Hierdurch wird ermöglicht, den Wirkungsquerschnitt für jede gewünschte Polarisation mit einem Minimum von Aufwand anzugeben.

P. Urban.

Rączka, A. and R. Rączka: Møller scattering of arbitrarily polarized electrons. Phys. Review, II. Ser. **110**, 1469—1471 (1958).

Es wird der Wirkungsquerschnitt für die Elektron-Elektron-Streuung bei beliebiger Polarisation angegeben. Eine übersichtliche graphische Darstellung für verschiedene Werte der Geschwindigkeit beleuchtet das gefundene Resultat in anschaulicher Weise.

P. Urban.

Hori, Shoichi: On the wave functions of higher spin particles. Progress theor. Phys. **21**, 613—624 (1959).

L'A. construit explicitement les fonctions d'ondes des particules de spin quelconque au moyen d'une transformation de Lorentz appliquée aux solutions du système propre construites facilement pour les particules de spin 1 et 1/2 et combinées dans ce système au moyen des coefficients de Clebsch-Gordan. Cette méthode est appliquée au calcul relativiste d'une fonction de corrélation angulaire dans le cas de la production associée d'un hyperon et d'un méson K et suivie de leurs désintégrations dans l'hypothèse où ils posséderont un spin d'ordre supérieur.

G. Petiau.

Tsuneto, Toshihiko and Izuru Fujiwara: Relativistic wave equations with maximum spin two. Progress theor. Phys. **20**, 439—456 (1958).

L'A. reprend l'étude des équations de la particule de spin 2 obtenues par la méthode de fusion de Louis de Broglie à partir des équations de deux particules de spin 1. Il discute notamment la réduction de ces équations dans l'espace soit à 5 dimensions soit à 4 dimensions en retrouvant les résultats connus de la théorie de la particule de spin 2.

G. Petiau.

Demkov, Ju. N. (Ju. N.) and F. P. Šepelenko (Shepelenko): Connection between the Hulthén and Kohn methods in collision theory. Soviet Phys., JETP **6**, 1144—1147 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **33**, 1483—1487 (1957).

Es wird der Zusammenhang zwischen den Berechnungsmethoden der Stoßtheorie von Hulthén und Kohn untersucht. Dabei werden verschiedene Variationsmethoden für die Bestimmung der Phasenverschiebung der radialen Wellenfunktion betrachtet. Es wird auch gezeigt, wie der korrekte Wert aus zwei Phasenverschiebungswerten mit Hilfe der Hulthénschen Methode ermittelt werden kann.

P. Urban.

Segal, I. E.: Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom. I. Mat.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. **31**, Nr. 12, 38 p. (1959).

It is shown effectively that, while there are many unitarily inequivalent representations of the canonical Bose-Einstein field variables, the S -matrix can be theoretically specified without using any particular representation. The central idea is that the bounded functions of finite subsets of the canonical variables, together with their limits in a physically meaningful sense, are substantially the same for all representations. On the other hand, convergence questions may depend strongly on the representation; in fact, formal operators fairly typical of divergent inter-

action Hamiltonians may be rendered hermitian operators in Hilbert space by a suitable choice of representation. Applications are made to the "clothing" of field kinematics, statistics, and canonical variables, for a theory in which only the transformation properties of single particles under an arbitrary covariance group, and a covariant interaction, need to be specified. The results are mostly of a general character, such as the existence of a physical vacuum, and the possibility of ascribing definite constitutions in terms of primary elementary particles to bound states. It is shown also that the canonical variables and occupation numbers of a field can be described by the so-called "free-field representation" only if the physical vacuum is invariant under the dynamical development of the system in essentially the interaction representation.

Zusammenfassg. des Autors.

Gulmanelli, P. and E. Montaldi: Wightman functions and Jacobi identity. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 13, 1276—1278 (1959).

Finkelstein, David and Charles W. Misner: Some new conservation laws. *Ann. of Phys.* 6, 230—243 (1959).

Les A. montrent la possibilité de construction de nouvelles formes de théorie des champs possédant une non linéarité intrinsèque repérée par un entier associé à la conservation d'un invariant topologique. Partant de la théorie de l'homotopie suivant N. Steenrod les A. discutent deux exemples de théories non linéaires topologiques. Dans le premier cas l'étude d'un champ scalaire à une dimension permet de mettre en évidence très simplement la loi de conservation homotopique. Le second cas est celui de la relativité générale où les A. introduisent une loi de conservation de la métrique. Généralisant ces exemples les A. esquissent la construction d'une théorie générale topologique et géométrique de la matière et de l'espace.

G. Petiau.

Gilson, J. G.: Vacuum polarization due to charged bosons. *Proc. phys. Soc.* 74, 480—481 (1959).

Lutzky, Morton and John S. Toll: Formation of discontinuities in classical non-linear electrodynamics. *Phys. Review*, II. Ser. 113, 1649—1652 (1959).

Es wird gezeigt, daß sich in einer gewissen klassischen nichtlinearen Elektrodynamik aus anfangs glatten Wellen bei der Ausbreitung Unstetigkeiten ausbilden können. Der Typ der gewählten Theorie ist von solcher Art, daß nichtlineare Vakuumeffekte der Quantenelektrodynamik im Sinne der Betrachtungen von Heisenberg und Euler eingeschlossen werden. Eine besondere Lösung der Gleichungen wurde mit Hilfe der Charakteristikenmethode konstruiert, wobei bei angemessener Wahl der Anfangsbedingungen erreicht werden kann, daß sich die Charakteristiken schneiden und so Unstetigkeiten ergeben. Die klassische Approximation versagt, wenn der Gradient der Feldstärken so groß wird, daß kein definierter Schluß auf die physikalische Erzeugung von Singularitäten gezogen werden kann.

E. Schmutzer.

Moses, H. E.: Solution of Maxwell's equations in terms of a spinor notation: the direct and inverse problem. *Phys. Review*, II. Ser. 113, 1670—1679 (1959).

Die Maxwellschen Gleichungen werden in den Spinorformalismus umgeschrieben und auf eine der Dirac-Gleichung ähnliche Form gebracht, die die Definition eines Hamilton-Operators für das Maxwellsche Feld gestattet. In Analogie zur Quantentheorie werden Greensche Funktionen eingeführt und Entwicklungen nach vollständigen Sätzen orthonormierter Funktionen vorgenommen. Diese Prozedur wird angewendet, um in einfacher Weise das näher beschriebene „inverse Strahlungsproblem“ zu lösen. Es lassen sich die Quellen bestimmen, die zu einem vorgeschriebenen Endstrahlungsfeld gehören. Die nicht eindeutige Bestimmung der Quellen läßt sich durch Zusatzbedingungen eindeutig machen.

E. Schmutzer.

Merat, Parviz: Sur une généralisation de l'équation de Dirac pour les fermions lourds en interactions avec des champs mésiques. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 38—40 (1957).

L'Adjonction au groupe de Lorentz d'un groupe de transformations isotopiques qui lui est isomorphe permet de définir des champs mésiques irréductibles par rapport aux transformations isotopiques. Ce formalisme conduit notamment à

considerer un champ isovectoriel qui s'identifie avec le champ mésique II. L'introduction de ce champ dans l'équation de Dirac donne, lorsque l'on passe à l'équation du second ordre et à son approximation non relativiste, divers termes de couplage dont l'A. discute l'interprétation. *G. Petiau.*

Breit, G.: Velocity-dependent features of a static nucleon-nucleon potential. Phys. Review, II. Ser. **111**, 652—663 (1958).

Verf. untersucht mögliche Ursachen für geschwindigkeitsabhängige Terme im Nukleon-Nukleon Potential. Dazu geht er von einer Zweiteilchen-Diracgleichung aus, in die als Kopplungsterm die Wechselwirkungsenergie zweier fixierter (klassisch aufgefaßter) Nukleonen auf Grund eines Mesonenfeldes mit pseudoskalaren Kopplung eingetragen wird. Aus dieser Gleichung wird durch Elimination der „kleinen“ Komponenten des Zweiteilchendiracspinors eine exakte Schrödingergleichung für die Streuphasen abgeleitet. Die hier eingehenden effektiven Potentiale sind komplizierte Energie- und impulsabhängige Ausdrücke, die für große Nukleonabstände in das klassische Nukleonpotential der pseudoskalaren Mesonentheorie übergehen. Außerdem sind enthalten: 1. ein abstoßender „soft core“ proportional $e^{-2\mu r}$ (μ : Mesonenmasse). 2. eine Spin-Bahn-Kopplung, die als Anti-Thomasterm des „soft core“ gedeutet werden kann. 3. in dem Tensoroperator S_{12} quadratische Terme. Die Spin-Bahn-Kopplung besitzt eine Reichweite, wie sie durch neuere Interpretation der Proton-Protonstreuung hoher Energie nahegelegt wird [Gammel und Thaler, Phys. Review, II. Ser. **107**, 1337—1340 (1957)]; Signell, Zinn und Marshak, Phys. Review. Lett. **1**, Nr. 11 (1958)]. Ihre Isospinabhängigkeit entspricht aber den bisherigen Erfahrungen nicht. Die Gültigkeitsgrenzen der Ergebnisse werden ausführlich diskutiert. *H. Rollnik.*

Kundu, S. K.: Nucleon magnetic moment in cut-off meson theory. Proc. phys. Soc. **72**, 49—52 (1958).

Frantz, Lee M.: Field theory of deuteron exchange currents. Phys. Review, II. Ser. **111**, 346—353 (1958).

The influence of pion exchange currents on the thermal capture process ($n + p \rightarrow d + \gamma$) is investigated field-theoretically. The Chew model is used for the pion-nucleon interaction, and perturbation and corresponding renormalization techniques are developed for treating a system containing two dynamic nucleons. The Fock-space state vector is related to the two-nucleon wave function, and the cross section is then calculated to order e^2 . The observed cross section is known to be somewhat larger than that predicted neglecting explicit meson effects, and it is found here that the contribution of the exchange currents is too small and of the wrong sign to account for the discrepancy. *Zusammenfassg. des Autors.*

Ivanenko, D. and H. Sokolik: Unified description of ordinary and isotopic space Nuovo Cimento, X. Ser. **6**, 226—229 (1957).

Les AA. ont précédemment étudié les équations décrivant les particules dans un espace produit de l'espace habituel et de l'espace isotopique en tenant compte uniquement des transformations de Lorentz et du groupe isotopique [Doklady Akad. Nauk SSSR. **97**, 635—637 (1954)]. Ils étudient ici la classification des équations du type $\Gamma_i \partial \psi / \partial x_i + x \psi = 0$ dans un espace à n dimensions d'après les représentations du groupe des rotations et des retournements de l'espace sans se borner aux rotations produits de rotations d'espace-temps par une transformation du groupe isotopique. Dans la structure des Γ_i ainsi déterminée apparaissent les nombres quantiques associés aux particules; à parti de certaines équations peut-être traitée la non-conservation de la parité du K -mésion. *J. Renaudie.*

• **Mayer, M. E.: Quantenfelder und Elementarteilchen.** [Cimpuri cuantice si particule elementare]. Bucuresti: Editura Tehnica 1959. 324 S. Lei 13,15 [Rumänisch].

Es handelt sich um eine sehr gründliche Darstellung von solchen Problemen der Quantenfeldtheorie, deren Entwicklung im Jahre 1955 etwa abgeschlossen war. Dabei wird besonderer Wert auf grundlegende Probleme gelegt; Anwendungen werden auch behandelt, aber nicht so ausführlich wie z. B. in dem Buch von Soko-

low (Quantenelektrodynamik, dies. Zbl. 78, 444). Verf. strebt eine Synthese zwischen der Schwingerschen und der Bogoljubov-Sirkovschen Methode (Bogoljubov-Širkov, Einführung in die Quantentheorie der Felder, dies. Zbl. 77, 214) in der Behandlung des Gegenstandes an. Originalarbeiten werden sehr oft zitiert, was als besonderer Vorzug unterstrichen sei. Naturgemäß legt Verf. besonderen Wert auf die störungstheoretische Methode und die renormierbaren Theorien, weil die Entwicklung anderer Methoden und Theorien auch heute noch nicht abgeschlossen ist. Folglich wird in erster Linie die Quantenelektrodynamik dargestellt. Man findet aber auch einiges über die Mesonentheorien. Sogar den "strange particles" wie auch dem Paritäts-Problem, dem TCP-Theorem und den schwachen Wechselwirkungen sind einige Seiten gewidmet. Der Formalismus des isotopen Spins wird eingeführt und die Äquivalenz der pseudoskalaren zur pseudovektoriellen Kopplung der Mesonen an Nukleonen (in gewisser Näherung) wird bewiesen. Alles in allem dürfte dieses Buch ein wertvoller Helfer beim Studium der Quantenfeldtheorie sein, vorausgesetzt man beherrscht die rumänische Sprache. *G. Heber.*

Bollini, G. C.: Irreducibility constraints and field equations for the elementary particles. II: Fermions. Nuovo Cimento, X. Ser. 13, 46—56 (1959).

Im Anschluß an seine Behandlung (dies. Zbl. 84, 226) der Tensorfelder, die Teilchen mit ganzzahligem Spin beschreiben, erweitert Verf. nun seine Theorie, die von vornherein gegebene, kovariante Nebenbedingungen benützt, die die Felder als sich gegenüber Lorentz-Transformationen irreduzibel transformierende Größen definieren, auf Spinorfelder und damit auf Teilchen mit halbzahligen Spin. Die Nebenbedingungen werden so gefaßt, daß die Zahl der Komponenten der zugrundegelegten kovarianten Feldgrößen auch hier gleich der Zahl der Freiheitsgrade des beschriebenen Teilchens ist. Die Variation einer geeigneten Lagrange-Funktion nur nach den unabhängigen Feldkomponenten liefert dann Feldgleichungen von 2. Ordnung, die aber mit Hilfe der Nebenbedingungen auch in Feldgleichungen 1. Ordnung umgeformt werden können. Für freie Felder kommen bei den Fermionen wie bei den Bosonen im wesentlichen die gewohnten Ergebnisse heraus. Wechselwirkungen werden hier nicht betrachtet. *F. Engelmann.*

Chen, J. M., T. H. Ho, D. C. Sen and H. Y. Tzu: On the angular distribution of the decay products of particle of arbitrary spin. Sci. Sinica 8, 415—422 (1959).

Les A. étudient la répartition angulaire des produits de la désintégration d'une particule de spin quelconque s en deux particules l'une de spin 0, l'autre de spin $1/2$. La fonction d'ondes décrivant l'état final est représentée par un développement en fonctions sphériques dont on calcule les coefficients. A partir de ceux-ci on établit l'expression de la matrice densité de la particule initiale. Les valeurs numériques des maximums de ces coefficients pour les premiers termes sont calculées et permettent une discussion des résultats obtenus. *G. Petiau.*

Kernphysik:

Bolsterli, M.: Finite-range delta-function potential. Phys. Review, II. Ser. 114, 1605—1608 (1959).

Emery, V.: A variational approach to the nuclear many-body problem. Nuclear Phys. 6, 585—595 (1958).

Jastrow's method for determining the energy of a system by means of a variational approach is discussed in the case of nuclear matter. It is pointed out that in the approximation in which only the first terms of a cluster expansion are retained, additional restrictions are to be introduced concerning the trial wave function. Several possible restrictions are suggested and discussed, and numerical calculations are reported. *J. G. Valatin.*

Iwamoto, Fumiaki and Masami Yamada: Cluster development method in the quantum mechanics of many particle system. II: Saturation of nuclear forces. *Progress theor. Phys.* **18**, 345—356 (1957).

The previously discussed cluster development method (this *Zbl.* **78**, 197) is applied to investigate the saturation of nuclear forces. Serber type two-body forces with a hard core and a simple trial correlation function are used to calculate the energy. Only one and two nucleon clusters are taken into account. Three-nucleon cluster terms are evaluated at the point corresponding to the minimum of energy.

J. G. Valatin.

Bogoljubov (Bogoliubov), N. N.: On the condition for superconductivity in the theory of nuclear matter. *Soviet Phys., Doklady* **3**, 279—282 (1958), Übersetz. von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **119**, 52—55 (1958).

Mit dem Bardeen-Cooper-Schrieffer-Hamilton-Operator eines Supraleiters [*Phys. Review*, II. Ser. **108**, 1175—1204 (1957)] wird speziell für Nukleonenwechselwirkung der Grundzustand berechnet. Für Volumen $V \rightarrow \infty$ erhält man ihn asymptotisch.

W. Klose.

Chochlov (Khokhlov), Ju. K. (Ju. K.): Moment of inertia of non-spherical nuclei. *Soviet Phys., JETP* **8**, 165—167 (1959), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **35**, 240—243 (1958).

Es wird die Inglis-Formel für das Trägheitsmoment eines Kerns störungstheoretisch abgeleitet für einen rotierenden, deformierten, unendlich tiefen Potentialtopf mit „senkrechten“ Wänden. Für abgeschlossene Schalen ergeben sich Trägheitsmomente, welche um Faktoren 5 bis 15 größer sind als die hydrodynamischen Trägheitsmomente.

H. Stolz.

Coester, F. and H. Kümmel: Time dependent theory of scattering of nucleons by nuclei. *Nuclear Phys.* **9**, 225—236 (1958).

Es wird das optische Modell für die Streuung von Nukleonen an Kernen aus der allgemeinen zeitabhängigen Störungstheorie hergeleitet. Dabei gelingt es, das Paulische Prinzip ohne Näherungen zu berücksichtigen. Auch wird gezeigt, daß eine passend definierte Einpartikelwellenfunktion einer „Schrödinger-Gleichung“ gehorcht, wobei ein nichthermitesches „optisches Potential“ zugrunde gelegt wird. Das letztere wird durch eine Integralgleichung in Termen der Zweikörperwechselwirkung definiert. Abschließend zeigen Verf., daß die asymptotischen Eigenschaften für $t = \pm \infty$ zur Berechnung der *S*-Matrixelemente und Wirkungsquerschnitte ausreichen.

P. Urban.

Nemirovskij (Nemirovskii), P. É.: Model of a semi-transparent nucleus with a diffuse boundary. II. *Soviet Phys., JETP* **5**, 932—937 (1957), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **32**, 1143—1149 (1957).

Verf. berechnet den totalen und den Absorptionswirkungsquerschnitt für Neutronen niederer Energie eines komplexen Potentials mit exponentiellem Abfall. Er findet für den totalen Wirkungsquerschnitt eine tragbare Übereinstimmung mit dem Experiment bei einem Realteil $V(r) = 44 \text{ MeV}$, einem Imaginärteil $0,05 V(r)$ und einem exponentiellen Abfall der Stärke $\alpha = 1,43 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-1}$ außerhalb des Kernradius r_0 , der mit $1,25 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3} \text{ cm}$ angenommen wird. Die Stärkefunktion γ_n/D für den Absorptionswirkungsquerschnitt widerspricht mit den angegebenen Parameterwerten nicht den experimentellen Ergebnissen, die jedoch ihrerseits keine klaren Schlüsse über einen Kurvenverlauf zulassen. Zum Schluß wird noch die Winkelverteilung für die optische Komponente der elastischen Streuung an diesem Potential durch drei Kurven illustriert, ohne jedoch auf die beobachtbare elastische Gesamtstreuung näher einzugehen.

O. Hittmair.

Gombás, P. und D. Kisdi: Zur statistischen Theorie des Nukleonengases bei beliebigen Temperaturen. *Z. Phys.* **156**, 125—130 (1959).

Es wird die statistische Theorie eines Nukleonengases für beliebige Temperaturen entwickelt und das Grundgleichungssystem des Problems hergeleitet. Für die Wechselwirkung der Nukleonen wird eine Linearkombination von Wignerschen, Majoranaschen, Heisenbergschen und Bartlettischen Kräften angesetzt.

Zusammenfassg. der Autoren.

Yatsiv, Shaul: Multiple-quantum transitions in nuclear magnetic resonance. Phys. Review, II. Ser. 113, 1522—1537 (1959).

The theory of Bloch and Wangness (this Zbl. 51, 223) for nuclear magnetic resonance signals is applied to multiple-quantum transitions. (Aus der Zusammenfassg. des Autors.)

Miyazima, Tatuoki and Yasushi Wada: Nuclear moments of inertia. Progress theor. Phys. 21, 269—298 (1959).

Das Trägheitsmoment eines schweren Kernes wird berechnet, in welchem neben der Kollektivbewegung der (inkompressiblen) Kernflüssigkeit auch Bahnbewegungen der Nukleonen nach der Art der Rotation eines symmetrischen Kreiselstatthaben. Man darf die gegenseitige Störung der beiden Bewegungsformen als stark ansehen; unter dieser Annahme folgt für den Kern wiederum ein Schema von Rotationsniveaus der bekannten Art, und das Trägheitsmoment erweist sich als einfache Summe aus einem kollektiven und einem inneren Anteil. Die $E2$ -Übergangswahrscheinlichkeiten und Niveauabstände von 19 gut bekannten Kernen werden sodann zu Vergleichen herangezogen. Es stellt sich heraus, daß das (kreiselartige) innere Trägheitsmoment das kollektive regelmäßig um einen Faktor von 2—7 übertrifft. Da die kreiselartige Eigenbewegung rein formal, gewissermaßen als Mitnahmeeffekt der umlaufenden Oberflächenschwingungen, eingeführt wird, kann man nicht sagen, in welchem Maße sie als real gelten darf. Somit wissen Verff. keine feste Erklärung für die oft besprochene Diskrepanz zwischen beobachteten und berechneten (kollektiven) Trägheitsmomenten, wenngleich sie die Bedeutung von Eigenbewegungen der Nukleonen in weit schärferes Licht gesetzt haben.

E. Breitenberger.

Eden, R. J. and V. J. Emery: The binding energies of atomic nuclei. I. Introduction and general method. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 248, 266—281 (1958).

Erste Abhandlung einer Reihe, welche der Berechnung von Bindungsenergien mittels Mehrkörpermethoden dienen soll. Die mathematische Behandlung baut im wesentlichen auf den Ansätzen von Brueckner auf. Darin erscheint eine effektive Zweinukleonen-Wechselwirkung und ein unbestimmtes Einzelnukleonpotential. Für letzteres wird ein Oszillatorpotential angenommen, dem Pauliprinzip wird in guter Näherung Rechnung getragen, und die übliche Iteration (eine Art "self-consistent method") wird durch ein einfacheres Variationsverfahren ersetzt. Damit erhält man Integral- oder Integro-Differentialgleichungen für die Wellenfunktionen, welche obendrein eine einfache, genäherte Einführung eines harten Kernes der Nukleonenwechselwirkung gestatten. Schließlich ergibt sich für die Bindungsenergie eine Formel, in der die anziehenden Potentiale bis zur zweiten Ordnung erscheinen. Übersichtshalber werden auch mehrere brauchbare Rechenvorgänge studiert.

E. Breitenberger.

Henley, Ernest M. and Boris A. Jacobsohn: Time reversal in nuclear interactions. Phys. Review, II. Ser. 113, 225—233 (1959).

Die Folgerungen aus Invarianz gegen Zeitumkehr werden für Kernreaktionen, Polarisations-Doppelstreuung und γ — γ Richtungskorrelationen (ungeordneter Kerne) gezogen. Es stellt sich heraus, daß die meisten Experimente gegen Zeitumkehr weniger empfindlich sind, als man annehmen möchte. Die Ergebnisse der empfindlichsten Experimente deuten bloß an, daß der Beitrag nichtinvarianter Glieder zur Hamiltonfunktion eines Kernes unter 10% liegt. Einige Kernreaktionen werden angegeben, welche diese Abschätzung zu verschärfen gestatten sollten.

E. Breitenberger.

Bilenky, S. M., L. I. Lapidus, L. D. Puzikov and R. M. Ryndin: Phenomenological analysis of reactions of the $a + a' \rightarrow b + b'$ type. Nuclear Phys. 7, 646—654 (1958).

Les A. analysent les conditions permettant de construire à partir de données expérimentales la matrice de diffusion pour un processus du type $a + a' \rightarrow b + b'$. La matrice de réaction M est représentée par un système complet d'opérateurs tensoriels irréductibles $T^{JM}(j_b, j_a)$ et le nombre des fonctions scalaires complexes qui la détermine est calculé en tenant compte de l'invariance par rotations et réflexions d'espace. L'invariance par retournement du temps conduit à des relations entre effets de polarisation dans les réactions directe et inverse. Le nombre d'expériences nécessaire pour la construction complète de la matrice de réaction dans le cas de plusieurs canaux peut être déterminé en tenant compte de l'unitarité de la matrice S .

G. Petiau.

Brown, G. E. and J. S. Levinger: Dispersion theory of the direct photoeffect. *Proc. phys. Soc.* **71**, 733—741 (1958).

The process of direct interaction with photons (the emission of fast particles) is formulated in nuclear dispersion theory. Aus der Zusammenfassg. der Autoren.

Fowler, T. K.: Quasi-elastic scattering of pions by nuclei. *Phys. Review*, II. Ser. **112**, 1325—1335 (1958).

Die elastische Streuung der Pionen an Kernen liefert ein wichtiges Mittel zur Untersuchung der Kerneigenschaften. Infolge der endlichen Auflösungsfähigkeit der reellen Detektoren mißt man die elastisch gestreuten Pionen und die mit kleiner Energieabgabe unelastisch gestreuten Pionen zusammen. Verf. setzt sich das Ziel, die zwei Effekte zu separieren. Unter Anwendung der formalen Theorie der Streuung und der des optischen Kernmodells (mit komplexer Potentialfunktion) kann Verf. zeigen, daß der Zusatz der inelastischen Streuung abspaltbar ist. Besonders wichtig scheint jene Folgerung zu sein, daß die quasi-elastische Streuung ein brauchbares Mittel zur Untersuchung der Korrelation von Nukleonenpaaren in Kernen abgibt. Konkrete experimentelle Resultate werden diskutiert.

G. Marx.

Inopin, E. V.: Scattering of neutrons from nonspherical nuclei. *Soviet Phys., JETP* **7**, 1007—1013 (1958), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **34**, 1455—1464 (1958).

Die Streuung von Neutronen an nichtkugelförmigen Kernen wurde von Drozdow und Inopin diskutiert, für den Fall, daß 1. der Kern bei dem Streuprozess in Ruhe bleibt und daß 2. die Bedingung $kR \gg 1$ erfüllt ist (k = Wellenzahl des Neutrons, R = Kernradius). Diese letztere Bedingung ist aber gerade bei den Experimenten nicht erfüllt. Verf. berechnet daher die Streuung von Neutronen an $g-g$ -Kernen, welche durch ein verlängertes oder abgeplattetes Rotationsellipsoid angenähert werden können nach der Methode der Partikularlösungen in elliptischen Koordinaten und gibt dabei explizite Ausdrücke für den Wirkungsquerschnitt. Ein Vergleich der theoretischen Formeln mit dem experimentellen Daten scheitert teilweise an den ungenügenden experimentellen Daten.

Th. Sexl.

Spruch, Larry and Wallace Gold: Coulomb corrections in the theory of internal bremsstrahlung. *Phys. Review*, II. Ser. **113**, 1060—1068 (1959).

Die innere Bremsstrahlung beim erlaubten Betazerfall wurde für den Fall berechnet, daß die Energie des Gammaquants kleiner als $2mc^2$ ist, die kinetische Energie des Elektrons im Endzustand klein gegenüber mc^2 und Ze^2/hc klein gegen eins. Das Energiespektrum der Gammastrahlen und die Winkelkorrelation zwischen Elektronen und Gammastrahlen wurde berechnet, ebenso unter der Zusatzannahme, daß die kinetische Energie des Elektrons klein gegenüber der Energie des Quants ist, die Polarisation der Gammastrahlen.

K. Baumann.

• **Höcker, K. H. und K. Weimer** (herausgegeben von): *Lexikon der Kern- und Reaktortechnik*. Band 1: A — K, Band 2: L — Z. Stuttgart: Francksche Verlagshandlung 1959. 703, 983 S. Beide Bände DM 125,—.

Das von einer größeren Anzahl bekannter Fachleute verfaßte Lexikon will auf dem jungen und vorwiegend im Ausland entwickelten Gebiet der Kerntechnik ein

Helfer für alle diejenigen sein, die beruflich damit zu tun haben oder außerberuflich daran interessiert sind. Es entspricht in Zweck, Niveau und Anlage etwa dem bekannten Physikalischen Wörterbuch von W. H. Westphal und kann in gewissem Sinne als dessen kerntechnische Ergänzung angesehen werden. Mit mehr als 3000 Stichworten wird das Gesamtgebiet der angewandten Kernphysik hinreichend erfaßt. Jeder Begriff wird präzise und mit der notwendigen Ausführlichkeit erläutert; die häufige Verwendung mathematischer Formeln und Symbole wird jedem technisch Gebildeten willkommen sein. Als Anhang enthält das Werk Tabellen über die Reaktoren der verschiedenen Länder, Umrechnungstabellen für Maßeinheiten sowie tabellarische Zusammenstellungen verschiedener Materialeigenschaften. Besonders hervorzuheben ist ein gleichfalls enthaltenes englisch-deutsches und französisch-deutsches Fachwörterbuch. Der auf dem Gebiet tätige Referent hat selbst das Lexikon oft benutzt und kann es jedem „Kerntechniker“ empfehlen. *W. Oldekop.*

Maslennikov, M. V.: On the general problem in the theory of slowing down neutrons. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 259—262 (1958) [Russisch].

Es wird die allgemeine Gleichung für die Stoßdichte der Neutronen aufgestellt, wobei anisotrope und unelastische Streuung eingeschlossen wird. Dabei werden die Bereiche der einzelnen Größen und Funktionen in der Terminologie der Punktmengen streng festgelegt. Es wird gezeigt, daß die Ausgangsgleichung unter gewissen physikalisch vernünftigen Voraussetzungen, die abstrakt mathematisch formuliert werden, nicht aus dem Bereich meßbarer Funktionen herausgeführt sowie daß die Lösung eindeutig ist und durch die Neumannsche Reihe dargestellt wird. Für diese werden einige Ungleichungen angegeben. *H. Gaus.*

Maslennikov, M. V.: On Wick's problem. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 59—62 (1958), übersetzt in Soviet Phys., Doklady 3, 521—525 (1959) [Russisch].

Das Wicksche Problem besteht in der Lösung des zeitunabhängigen Diffusions- und Bremsproblems schneller Neutronen in einem unendlich ausgedehnten homogenen isotropen Medium. Bei der Lösung wurde angenommen: 1. Die für die Bremsung maßgebenden Parameter hängen nicht von der Neutronenenergie ab, 2. thermische Bewegung und chemische Bindung der Bremsmittelatomkerne werden vernachlässigt, 3. die Neutronenstreuung erfolgt im Schwerpunktsystem isotrop (und elastisch). Mit Hilfe der Fourier-Laplace-Transformation wird für den Fall einer ebenen isotropen und einer anisotropen Neutronenquelle, ausgehend von der Boltzmannschen Transportgleichung eines nichtmultiplizierenden Mediums, eine Lösung gefunden und diskutiert. *F. Cap.*

Holland, jr. Samuel S.: Neutron penetration in infinite media; calculation by semi-asymptotic methods. J. appl. Phys. 29, 827—833 (1958).

Es wird ein Verfahren zur numerischen Berechnung des Neutronenflusses in großer Entfernung (gegen die freie Weglänge) einer ebenen Quelle angegeben. Die Methode wurde ursprünglich von Spencer zur Berechnung des tiefen Eindringens von Gammastrahlen entwickelt. Ein wesentlicher Vorteil ist, daß für die Querschnitte für Absorption und Streuung, sowie für die Winkelverteilung von Anfang an numerische Werte mit relativ geringem Rechenaufwand eingesetzt werden können. Bezüglich des senkrechten Abstandes von der Quelle wird eine Laplace-Transformation angewandt und danach werden bezüglich der Winkelabhängigkeit zwei verschiedene Entwicklungen durchgeführt. Numerische Ergebnisse für eine 1 keV Punkt-Quelle in Luft werden mitgeteilt und mit Rechnungen anderer Autoren verglichen. *H. Gaus.*

Marčuk, G. I.: Zur Frage der Mehrgruppentheorie zur Berechnung von Kernreaktoren. Physik und Wärmetechnik der Reaktoren 7—21 (1958) [Russisch].

Bei schwacher Absorption von Neutronen ändert sich die Bremsdichte q mit der Lethargie nur wenig. Es genügt daher, bei der Lösung eines Mehrgruppensystems nur eine begrenzte Anzahl von Energiegruppen zu betrachten. Der Sachverhalt ist

aber ganz anders, wenn im Reaktor ein Bereich starker Absorption der Neutronen besteht, weil sich die Funktion q als Folge der Neutronenabsorption per Lethargieeinheit beträchtlich ändern kann. Um die notwendige Berechnungsgenauigkeit zu erzielen, muß die Anzahl der Energiegruppen erhöht werden. Dies führt jedoch zu einem beträchtlich vermehrten Aufwand an numerischer Rechnerarbeit. Verf. gewinnt eine Methode, die sowohl allgemein als auch für Randwertprobleme eines Reaktors angewendet werden kann. Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird das Mehrgruppengleichungssystem für den Reaktor behandelt und q abgeleitet. Im 2. Kapitel werden dieselben Berechnungsmethoden auf ein Reaktorrandwertproblem angewendet.

F. Cap.

Gerasimova, N. M.: Solution of the kinetic equations for high-energy nuclear cascade processes. Soviet Phys., JETP 6, 488—493 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 33, 637—644 (1957).

Die statistische Theorie der kernaktiven Kaskaden (hervorgerufen durch kosmische Strahlung) wird verfeinert: auch jene experimentelle Tatsache wurde in Betracht gezogen, daß ein sekundäres Teilchen einen recht großen Teil der primären Energie bekommt.

G. Marx.

Bau der Materie:

Veselov, M. G. und I. B. Bersuker: Die adiabatische Annäherung in der Quantentheorie der Atome. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. 22, 662—664 (1958) [Russisch].

Spuy, E. van der: The effective atomic field for electron scattering. Nuclear Phys. 10, 53—59 (1959).

Es wird eine Korrektur an dem effektiven Atomfeld gegeben, welche bei Polarisationsexperimenten mit der Doppelstreuung des Elektrons wichtig ist. Außerdem wird diese Korrektur benutzt, um eine Erklärung der kleinen azimuthalen Asymmetrie zu geben, welche bei solchen Experimenten gegenüber der Mottschen Theorie gefunden wurde.

P. Urban.

Ter-Mikayelian, M. L.: On the theory of multiple scattering. Nuclear Phys. 9, 679—686 (1959).

Es wird eine Methode zur Berechnung von Mehrfachstreu曲ven gegeben, welche die endlichen Dimensionen des Kernes berücksichtigt. Dabei werden experimentelle Resultate der Streuung schneller Elektronen zugrundegelegt und diskutiert.

P. Urban.

Goertz, Adalbert: Zur Theorie der diffusen Reflexion und Transmission beim Vorliegen elastischer Vielfachstreuung. Z. Phys. 155, 263—274 (1959).

Unter Ausnutzung der Voraussetzung, daß nur Vorwärts- bzw. Rückwärtsstreuung wesentlich ist, d. h. die Seitwärtsstreuung vernachlässigt werden kann, wird zunächst die Bothesche Transportgleichung vereinfacht. Aus ihr ergeben sich durch Integration zwei gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für die Streuströme in Vorwärts- bzw. Rückwärtsrichtung. Ihre Lösung ergibt bei Beachtung der Randbedingungen den Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten, ohne explizite Kenntnis der Streuindikatrix zu erfordern. Andererseits läßt sich aus der vereinfachten Botheschen Gleichung die Streuformel von Goudsmit-Saunderson für die Streufunktion herleiten und daraus die Streuformel von Bothe-Molière für kleine Streuwinkel.

H. Stolz.

Suffezyński, M.: Three-centre integrals in iron. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 195—198 (1958).

Öpik, U. and M. H. L. Pryce: Studies of the Jahn-Teller effect. I: A survey of the static problem. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 238, 425—447 (1957).

Longuet-Higgins, H. C., U. Öpik, M. H. L. Pryce and R. A. Sack: Studies of the Jahn-Teller effect. II: The dynamical problem. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 244, 1—16 (1958).

Desloge, Edward A., Steven W. Matthyse and Henry Margenau: Conductivity of plasmas to microwaves. Phys. Review, II. Ser. 112, 1437—1440 (1958).

Zur Berechnung der Leitfähigkeit in einem schwach ionisierten Gas wird für die Wirkung eines periodischen elektrischen Feldes auf ein Elektron folgender Ansatz gemacht: Im Geschwindigkeitsraum wird die Elektronenverteilungsfunktion in Feldrichtung um einen Wert verschoben, der vom Betrag der Geschwindigkeit abhängt. Je nach der Art der Näherung ergeben sich zwei Ausdrücke für die Leitfähigkeit. Während der erste Ausdruck mit den früheren Berechnungen von Margenau [Phys. Review, II. Ser. 69, 508 (1946); dies. Zbl. 79, 440] übereinstimmt, enthält der zweite Ausdruck keine negativen Werte der Leitfähigkeit, wie sie in der ursprünglichen Formel von Margenau auftreten.

K. G. Müller.

Cabannes, Henri: Calcul de la conductivité thermique d'un courant ionique. C. r. Acad. Sci., Paris 249, 47—49 (1959)

Nach Lösung einer problemgemäß formulierten Boltzmann-Gleichung wird der Ionenanteil an der Wärmeleitfähigkeit eines klassischen Plasmas berechnet.

W. Klose.

Aršinov (Arshinov), A. A. and A. K. Musin: Equilibrium ionization of particles. Soviet Phys., Doklady 3, 588—592 (1959), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 747 (1958).

Verff. leiten Ausdrücke für den Ionisationsgrad eines homogenen Teilchengemischs im thermischen Gleichgewicht ab, wobei die Bestandteile des Gemischs aus einer beliebigen Verteilung von atomaren bzw. molekularen und kondensierten makroskopischen Partikeln bestehen können, die sowohl Elektronen abgeben als auch in beliebiger Zahl anlagern können. Mit einigen einfachen Annahmen physikalischer Natur gelingt es, die abgeleiteten Ausdrücke näherungsweise in geschlossener Form darzustellen und auszuwerten. Die Diskussion ergibt infolge Hinzunahme der Elektronenanlagerung einige neue Eigenschaften bez. des Ionisationsgrades eines solchen Systems. Als Grenzfälle erscheinen die Saha-Formel und ein von Einbinder 1957 angegebener Ausdruck für den Ionisationsgrad eines Gemischs fester Teilchen, bei denen Elektronenanlagerung aber nicht betrachtet wird.

R. W. Larenz.

Morita, Tohru: Theory of classical fluids: Hyper-netted chain approximation. I: Formulation for a one-component system. Progress theor. Phys. 20, 920—938 (1958).

Die freie Energie eines molekularen Systems mit Zweierwechselwirkungen läßt sich durch eine Cluster-Integral-Entwicklung darstellen. Die Terme in dieser Virialentwicklung sind Integrale über gewisse Produkte von e -Funktionen des zwischenmolekularen Potentials. Die einzelnen Integrale lassen sich daher topologisch durch Graphen charakterisieren. Verf. zeigt, daß für eine gewisse Klasse von Graphen eine Berechnung der entsprechenden Integrale mit Hilfe von Fourier-Transformationen möglich ist. Die Arbeit stellt somit eine Erweiterung der bekannten Mayerschen Methode für Ionenlösungen dar. Die berechenbaren Graphen bestehen aus Ketten mit zwei gemeinsamen Endpunkten, die noch in Verbindung mit Ringen auftreten können. Auch eine Formel für die radiale Verteilungsfunktion wird in dieser Approximation angegeben.

G. Kelbg.

Friedman, Harold L.: On Mayer's ionic solution theory. Molecular Phys. 2, 23—38 (1959).

Eine Erweiterung der Mayerschen Theorie der Ionenlösungen wird vorgenommen. Für die Cluster-Integral-Entwicklung wird ein Ausdruck in Form einer unendlichen Reihe angegeben, wobei an Stelle der Mayerschen Graphen neue Bindungen, wie sie bereits von Meeron verwendet wurden, zugrunde gelegt werden. Über die Kon-

vergenz der Reihe sind keine Angaben gemacht, auch scheint es sehr schwierig, eine Auswertung selbst mit numerischen Methoden durchzuführen. Mit Hilfe des entwickelten Formalismus ist es aber vielleicht möglich, Aussagen über die physikalischen Eigenschaften von Elektrolytmischungen zu machen, wenn diejenigen der Einzelkomponenten bekannt sind.

G. Kelbg.

Temperley, H. N. V.: On the enumeration of Mayer cluster integrals. Proc. phys. Soc. **72**, 1141—1144 (1958).

Unter Verwendung einer einfachen hypothetischen Gesamtheit wird die Anzahl der Mayer-Diagramme m , die aus l Punkten und k Verbindungslinien bestehen, abgeschätzt. Die Näherung gilt für große l und m -Zahlen, die in der Nähe von $l - 1$ liegen.

G. Kelbg.

Kielich, S.: Molecular interaction in the classical theory of light scattering. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. mat. astron. phys. **6**, 215—221 (1958).

Formeln für die Lichtstreuung in Flüssigkeiten für optisch anisotrope wechselwirkende Moleküle werden angegeben. Der Korrelationsfaktor im Streukoeffizient, der von der Wechselwirkung abhängig ist, wird für verschiedene Substanzen aus der Depolarisation, der Cotton-Mouton-Konstanten und der Kerr-Konstanten berechnet, um die Konsistenz der Theorie zu prüfen.

H. Falkenhagen.

Yos, Jerrold M., William L. Bade and Herbert Jehle: Specificity of the London-Eisenschitzwang force. Proc. nat. Acad. Sci., USA **43**, 341—346 (1957).

Es werden Eigenschaften der Londonkräfte zwischen Makromolekülen in flüssigen Medien untersucht, die von biologischem Interesse sind. Die Makromoleküle werden als punktförmige anisotrope Dipoloszillatoren aufgefaßt. Bei einer Mischung verschiedenartiger Makromoleküle treten vorwiegend gleichartige zu Komplexen zusammen. Es ergibt sich eine auswählende Assoziation.

H. Falkenhagen.

Prakash, Satya and Satish Chandra Srivastava: Velocity of ultrasonic waves in solutions of electrolytes. Indian J. Phys. **32**, (41) 62—65 (1958).

Folgende Formel für die Schallgeschwindigkeit in elektrolytischen Lösungen wird angegeben: $v^{1/2} = P/(2Jd)^{1/2} + 2Bz^2\mu/D^2T(Jd)^{1/2} \text{ cgs}$. Es bedeuten: v Schallgeschwindigkeit, P Druck, J Intensität der Wellen, d Dichte der Lösung, z Wertigkeit, D Dielektrizitätskonstante, μ Ionenstärke. $B = N^2 e^4 / 2000 \sqrt{2} R$ mit N Loschmidtsche Zahl, R Gaskonstante, e Elementarladung. $(v d)^{1/2}$ aufgetragen als Funktion der Ionenstärke liefert eine Gerade. Dieses ist in Einklang mit den Messungen der Schallgeschwindigkeit z. B. für Magnesium- und Zinksulfat.

G. Kelbg.

Brout, R.: Correlation energy of a high-density gas. Plasma coordinates. Phys. Review, II. Ser. **108**, 515—517 (1957).

This paper is a supplement to the mathematical methods of the paper by Sawada Brueckner, Fukuda and Brout (this Zbl. **80**, 446). It contains explicitly the scattering modes in Sawada's approximation, and shows that they do not form a complete set but can be completed by the plasma mode.

J. G. Valatin.

Beljaev (Beliaev), S. T.: Application of the methods of quantum field theory to a system of bosons. Soviet Phys., JETP **7**, 289—299 (1958), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. **34**, 417—432 (1958).

Für ein System von N Boseteilchen in einem Volumen V mit der Wechselwirkungsfunktion $U(x - x')$ wird die S -Matrix

$$S = T \left\{ \exp \left(- \frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 U(1-2) \psi^+(1) \psi^+(2) \psi(2) \psi(1) \right) \right\}$$

zur Herstellung der Greenschen Funktion (in Wechselwirkungsdarstellung)

$$i G(x - x') = \langle T \{ \psi(x) \psi^+(x') S \} \rangle / \langle S \rangle$$

verwendet, wo die Erwartungswerte für den Grundzustand des wechselwirkungsfreien Systems zu nehmen sind. Durch gesonderte Betrachtung des impulslosen Zustandes wird daraus die Greensche Funktion des kondensierten m -Teilchen-

zustandes aufgebaut. Aus dieser läßt sich schließen, daß die Einführung der Wechselwirkung die kondensierte Phase niemals ganz zum Verschwinden bringt, und daß auch die Schwankungen der Teilchenzahl in der kondensierten Phase immer relativ klein sind. Für die nichtkondensierten Teile lassen sich dazu gewisse „effektive“ Wechselwirkungsoperatoren Σ_{ij} einführen und mit diesen die Greensche Funktion des Gesamtsystems aufbauen. Setzt man für die E_{ik} ihre aus einer Störungsrechnung in 1. Ordnung folgenden Werte ein, so findet man in der Greenschen Funktion eine Singularität, die einer elementaren Anregungsenergie des Systems entspricht. Diese sowie die mittlere Besetzungszahl im Grundzustand stimmen mit Resultaten von Bogoliubov [N. N. Bogoliubov, *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.* **11**, 77—90 (1947)] überein.

H. Volz.

Beljaev, (Beliaev) S. T.: Energy-spectrum of a non-ideal bose gas. *Soviet Phys., JETP* **7**, 299—307 (1958), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **34**, 433—446 (1958).

Zur Bestimmung der in der vorhergehenden Arbeit (s. vorstehendes Referat) eingeführten effektiven Potentiale Σ_{ik} und des ebenfalls auftretenden chemischen Potentials $\mu = \mathcal{E}E_0/\mathcal{E}N$ wird hier die Näherung für kleine Dichten verwendet. Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen soll zentral und kurzreichweitig, aber nicht notwendig schwach sein. In den ersten 2 Näherungsschritten tritt nur die Streuamplitude f des 2-Teilchensystems auf. Es zeigt sich dazu, daß die elementaren Anregungen des Systems sich bei kleinen Impulsen wie Phononen (mit in 2. Näherung korrigierter Schallgeschwindigkeit) verhalten, bei größeren Impulsen wird die Anregungsenergie konstant. Es werden dann angegeben: die mittlere Zahl \bar{N}_p von „Teilchen“ mit Impuls $p \neq 0$, die Gesamtzahl aller Teilchen mit Impulsen $p > 0$, sowie die gesamte Energie des Grundzustandes. Das letztere Resultat stimmt mit demjenigen von Lee und Yang [*Phys. Review, II. Ser.* **105**, 1119 (1957)] überein. Geht man zu harten Kugeln vom Durchmesser a über und extrapoliert die Resultate zu etwas größeren Werten von $n_0 a^3$, so erhält man qualitativ ein Spektrum der Anregungsenergie, wie es zuerst von Landau zur Erklärung der Eigenschaften von flüssigem He II postuliert worden ist.

H. Volz.

Lee, T. D. and C. N. Yang: Low-temperature behavior of a dilute Bose system of hard spheres. II: Nonequilibrium properties. *Phys. Review, II. Ser.* **113**, 1406—1413 (1959).

Fortsetzung einer früheren Arbeit (Lee, Yang, dies. Zbl. **83**, 453). Die mit der Pseudopotentialmethode berechneten Eigenzustände werden transformiert in neue, „makroskopische“, die einem nichtverschwindenden Impuls entsprechen. Damit können Quasi-Gleichgewichte definiert werden, deren thermodynamisches Verhalten mathematisch durch zwei Komponenten beschrieben werden kann, ohne daß man physikalische Voraussetzungen über eine Zweikomponententheorie hineinzustecken braucht. Auf diese Weise ergibt sich ganz natürlich die Suprafluidität. Bildung von Wellenpaketen der Anregungen des Systems und Benutzung klassischer dynamischer Gesetze für diese führt auf hydrodynamische Bewegungsgleichungen und den ersten und zweiten Schall.

W. Klose.

Pitaevskij (Pitaevskii), L. P.: Phenomenological theory of superfluidity near the λ point. *Soviet Phys., JETP* **35** (8), 282—287 (1959), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **35**, 408—415 (1958).

In der vorliegenden Arbeit betrachtet Verf. das Verhalten des (flüssigen) Helium II in der unmittelbaren Nähe des λ -Punktes. Dabei wird nicht, wie sonst in phänomenologischen Theorien üblich, die Temperaturabhängigkeit der Dichte des superfluiden Anteils als gegeben betrachtet, sondern erst aus den abzuleitenden allgemeinen Formeln berechnet. Der „Normalanteil“ wird wie üblich durch die Dichte, die Geschwindigkeit und die Entropie beschrieben, während der superfluide Anteil mit Hilfe einer komplexen Funktion berücksichtigt wird. Aus den allgemeinen

Formeln werden spezielle Gleichungen abgeleitet, die das Verhalten des He II in der Nähe des λ -Punktes beschreiben, wenn der Gradient der Dichte des superfluiden Anteils klein ist, wobei sich zeigt, daß die Quantenterme in den allgemeinen Formeln vernachlässigt werden können. Sie spielen dagegen eine erhebliche Rolle, falls der Gradient der Dichte des superfluiden Anteils groß ist, wenn z. B. Wirbel („vortices“) vorhanden sind, wie sie in der Theorie von Hall und Vinen (dies. Zbl. 72, 230) betrachtet werden. Die genaue Durchrechnung des letzteren Falles bleibt einer weiteren Arbeit vorbehalten.

W. Koeppel

Usui, Tunemaru: Landau's model of liquid He³. Phys. Review, II. Ser. 114, 21—26 (1959).

Das von Landau vorgeschlagene Modell, in dem flüssiges He³ als Fermi-Flüssigkeit betrachtet wird, liefert nach den Berechnungen von Abrikosov und Khalatnikov (dies. Zbl. 78, 225) einen positiven thermischen Ausdehnungskoeffizienten für die Flüssigkeit bei tiefen Temperaturen, während neuere Messungen zeigen, daß dieser Koeffizient negativ ist. Verf. leitet aus den Landauschen Gleichungen allgemeine Formeln für Energie, Entropie usw. ab, wobei auch die Variationen zweiter Ordnung berücksichtigt werden. Auch diese Ausdrücke liefern bei Verwendung der von Abrikosov und Khalatnikov benutzten Energiespektren einen positiven thermischen Ausdehnungskoeffizienten, während ein vom Verf. benutztes einfaches Energiespektrum einen negativen Koeffizienten liefert, in Übereinstimmung mit dem Experiment. Außerdem erhält Verf. starke Abweichungen der spezifischen Wärme und der Entropie vom „Idealverhalten“, bei tiefen Temperaturen, was ebenfalls experimentell bestätigt ist.

W. Koeppel.

Mühlschlegel, Bernhard: Über den Grundzustand des Supraleiters. Z. Phys. 156, 235—247 (1959).

The paper investigates the possibility of obtaining improved eigenfunctions of the reduced Bardeen-Cooper-Schrieffer-Hamiltonian by forming linear combinations of the approximative BCS-functions. For the groundstate an admixture of states with two excited pairs is considered. This leads to a lowering of the groundstate by an amount δW which is independent of the volume and of the same order of magnitude as the energy-gap $2\epsilon_0$. The same shift is produced for the states with excited single-pairs. Superposition of states with one excited pair leads to an additional discrete level within the energy-gap.

Zusammenfassg. des Autors.

Nakamura, Ki-ichi: Spin-spin interaction in superconductors. Progress theor. Phys. 22, 156—158 (1959).

Fester Körper:

● Seitz, Frederick and David Turnbull (editors): Solid state physics. Advances in research and applications. Vol. 7. New York: Academic Press Inc., Publishers 1958. XIV, 525 p. \$ 12,00.

Der vorliegende siebente Band der Reihe „Solid state physics“ setzt die Folge der Darstellungen aktueller Ergebnisse und Probleme auf dem besagten Gebiet in bewährter Weise fort. Im ersten Artikel (S. 1—70) befindet sich eine Darstellung der Theorie der thermischen Leitfähigkeit fester Körper von P. G. Klemens. Die einführenden Betrachtungen über die Gitterdynamik sind durch an sich zwar mögliche aber doch ziemlich ungewöhnliche Konventionen nur umständlich mit der anderen Literatur vergleichbar. Es folgt eine detaillierte Untersuchung der verschiedenen Wechselwirkungsprozesse von Gitterschwingungen mit den Bestandteilen des Festkörpers, wobei die anharmonischen Terme im Gitterpotential von besonderer Wichtigkeit sind. Vergleich mit den Experimenten und Berechnung der zusätzlichen elektronischen Leitfähigkeit in Metallen beschließen den ausgezeichneten Artikel. — Der folgende Artikel (S. 100—210) von J. Callaway über Energiebänder in Festkörpern betrifft eines der zentralen Probleme des ganzen Problemkreises, die Bestimmung der Funktion $E(k)$ für verschiedene Substanzen. Die Darstellung macht hauptsächlich

Gebrauch von der sogenannten Quanten-Defektmethode von Brooks. Systematisch werden die Ergebnisse der Rechnungen für die verschiedenen Gruppen des periodischen Systems diskutiert. — H. B. Huntington (S. 214—349) legt einen recht ausführlichen Beitrag zu den „elastischen Konstanten von Kristallen“ vor. Nach ihrer ins Einzelne gehenden Definition und einer Darstellung der atomistischen Theorie finden sich die experimentellen Methoden und Ergebnisse für die verschiedenen Materialien. — Für den Theoretiker besonders interessant erscheint der Aufsatz (S. 353—375) von H. W. Lewis über „Wellenpakete und Elektronentransport in Metallen“. Zurückgehend auf die nie ganz zu Ende geführten Diskussionen über die Vereinbarkeit der verschiedenen in der Transporttheorie gemachten Näherungen wird versucht, statt mit ausgedehnten Blochschen Wellen mit Wellenpaketen die elektrischen und thermischen Eigenschaften von Metallen zu berechnen. — Eine Studie (S. 379—420) von T. A. Becker über „neue Methoden bei der Oberflächen-Untersuchung“ und ein Artikel von A. F. Wells (S. 426—499) über „Struktur von Kristallen“ beschließen den wohl gelungenen 7. Band der Seitz-Turnbullschen Reihe.

W. Brauer.

Merten, Ludwig: Berechnung der Gitterschwingungen in Kristallen mit Zinkblendestruktur. II: Einfluß der Coulomb-Kräfte auf die Gitterschwingungen. *Z. Naturforsch.* **13a**, 1067—1080 (1958).

Die frühere Untersuchung (dies. Zbl. **82**, 229) der Gitterschwingungen in Kristallen mit Zinkblendestruktur wird durch die Berücksichtigung der Coulomb-Kräfte ergänzt. Zur Berechnung der Summen von coulombschen Kopplungsparametern wird die Ewaldsche Methode benützt. Die Grenzfrequenzen der transversalen und longitudinalen Schwingungen fallen dann nicht mehr zusammen. Numerische Rechnungen wurden für ZnS und InSb durchgeführt. Der Einfluß der Coulomb-Kräfte ist bei InSb klein, bei ZnS jedoch bedeutend. Für ZnSb wurden die Frequenzen für die Richtung des Wellenvektors (111) und (010) berechnet. Es wurden die Beziehungen zwischen den Kopplungsparametern und den elastischen Konstanten abgeleitet.

O. Litzman.

Fischer, K.: Die Berechnung der freien Energie von Kristallen mit Fehlstellen. *Z. Phys.* **155**, 59—68 (1959).

Zur Bestimmung der Struktur des Kristalls unter Berücksichtigung termischer und quantenmechanischer Einflüsse benötigt man die freie Energie $F(\dots \bar{x}_\mu \dots T)$; \bar{x}_μ sind die mittleren Lagen der Atome des Kristalls. Die Bedingung $\partial F / \partial \bar{x}_\mu = 0$ liefert die Gleichgewichtslagen der Atome im Kristall im Rahmen der Statistik vollständig, d. h. einschließlich der Art, Zahl und Struktur der im thermischen Gleichgewicht vorhandenen Fehlstellen. Zur Berechnung von \bar{x}_μ führt man zusätzliche äußere Kräfte K_μ ein, die an den einzelnen Atomen angreifen und so deren Lage definieren. Wählt man diese Kräfte und die Temperatur als Zustandsvariable, ordnet zu der Zustandssumme in diesem Falle als thermodynamische Funktion die freie Enthalpie $G(\dots K_\mu \dots T)$ zu, so kann man aus dieser die Abhängigkeit der \bar{x}_ν von K_μ (und umgekehrt) und T ableiten. Dann kann man die freie Energie

$$F(\dots \bar{x}_\mu \dots T) = G(\dots K_\mu, \dots T) + \sum K_\nu \bar{x}_\nu$$

als Funktion von \bar{x}_μ berechnen. Zur Berechnung der Zustandssumme wird die potentielle Energie des Kristalls $\Phi(\dots x_\mu \dots)$ nach den Auslenkungen $s_\mu = x - \bar{x}_\mu$ der Atome aus ihren mittleren Lagen entwickelt. In harmonischer Näherung beschränkt man sich auf die Glieder zweiter Ordnung, in quasiharmonischer Näherung auf die Glieder vierter Ordnung. Wenn man sich auf die thermische (nicht kalorische) Zustandsgleichung beschränkt, ist die freie Energie durch die Summe $F = \Phi_0 + F_s$ gegeben, wo $\Phi_0(\dots x_\mu \dots)$ (das Potential) die Struktur des Kristalls bei Vernachlässigung von Temperatur- und quantenmechanischen Effekten bestimmt. Die

Funktion F_s ist in harmonischer Näherung von \bar{x}_μ unabhängig; bei quasiharmonischer Näherung ist sie von \bar{x}_μ abhängig. Daraus kann man ähnliche Schlüsse wie bei einem Idealkristall ziehen. *O. Litzman.*

Laval, J.: L'agitation thermique des atomes dans le milieu cristallin. II. J. Phys. Radium 20, 449—455 (1959).

In einem früheren Artikel [J. Phys. Radium 20, 1—6 (1959)] wurde eine Methode zur Analyse der Gitterschwingungen beschrieben, welche die anharmonischen Glieder der potentiellen Energie des Kristallgitters in Betracht zieht. In dieser Methode wird die Lösung nach den Amplituden der harmonischen Näherung entwickelt. Die Grundfrequenzen sind dann gegen die Grundfrequenzen der klassischen harmonischen Theorie erhöht, wobei die Differenz mit der Temperatur wächst. Außerdem erscheinen neue „sekundäre“ Frequenzen, die Summen und Differenzen von Grundfrequenzen. Die Säkular-Gleichung für die Grundfrequenzen ist von der Stufe der Approximation abhängig und mit einer „self-consistent“ Methode lösbar.

O. Litzman.

Maradudin, Alexei and George H. Weiss: The disordered lattice problem: A review. J. Soc. industr. appl. Math. 6, 302—319 (1958).

Verff. weisen zunächst darauf hin, daß das vorliegende Problem aus rein mathematischen Gründen bisher einer zufriedenstellenden Lösung fern ist. Sie haben die Hoffnung, mit ihrem Artikel Mathematiker dazu bewegen zu können, sich der Fragestellung anzunehmen. Es handelt sich um Folgendes: Betrachtet sei eine regelmäßige Anordnung von Massenpunkten M_i . Diese Massenpunkte wechselwirken nur mit ihren nächsten Nachbarn (und zwar über Federkräfte). Im eindimensionalen Fall wäre dann die Bewegungsgleichung des i -ten Massenpunkts:

$$M_i \ddot{x}_i = \gamma_{i-1} (x_{i-1} - x_i) + \gamma_{i+1} (x_{i+1} - x_i), \quad \ddot{x} = d^2x/dt^2.$$

Nun sollen M_i und die γ_i zufällige Größen sein. Gefragt ist nach den möglichen Schwingungstypen der Massenordnung (Gitter). Exakte Lösungen liegen nur für den Fall einer eindimensionalen Anordnung vor (Dyson, dies. Zbl. 52, 237), und auch da nur für nicht sehr naturalistische Annahmen über die Zufälligkeit von M und γ . Die für die Physik wichtigen und interessanten dreidimensionalen Fälle harren einer allgemeinen Behandlung.

W. Klose.

Slater, John C.: Interaction of waves in crystals. Reviews modern Phys. 30, 197—222 (1958).

It is given an uniform treatment of many basic theoretical results concerning the interactions of plane waves in crystals. In particular, the scattering of X-rays, electrons and neutrons by phonons, and the energy bands in crystals are described. An extensive bibliography of the subject is included.

J. Mycielski.

Antončík, Emil: The use of the repulsive potential in the quantum theory of solids. Czechosl. J. Phys. 9, 291—305, russ. Zusammenfassg. 291 (1959).

Es wird die Energie für einige Punkte der Brillouin-Zone berechnet. Dazu wird das von Hellman eingeführte Abstoßungspotential benutzt und durch Anwendung von Gruppentheorie die Anzahl der Dimensionen des Problems erheblich reduziert. Man kommt so zu rechenbaren Gleichungen.

W. Klose.

Phillips, James C. and Herbert B. Rosenstock: Topological methods of locating critical points. Phys. Chem. Solids 5, 288—292 (1958).

Les AA. confrontent des résultats obtenus antérieurement [H. B., Rosenstock, ce Zbl. 64, 235; Phys. Chem. Solids 2, 44 (1957)] avec ceux que fournit l'application de la théorie de M. Morse. D étant un domaine de R^n homéomorphe à la sphère, S sa frontière, l'on considère les points critiques non dégénérés d'une fonction analytique F définie sur $D + S$ et l'on établit certaines relations entre les points critiques sur S et ceux dans D . Les résultats sont explicités pour $n = 2$ et $n = 3$. *Th. Lepage.*

Bross, Helmut: Die elektrische Leitfähigkeit von Kupfer unter besonderer Berücksichtigung der Anisotropie des Gitterschwingungsspektrums. *Z. Naturforsch.* **14a**, 560—580 (1959).

Die „klassische“ Theorie der Leitfähigkeit liefert zwar ein qualitatives Verständnis der Transportvorgänge in Metallen, reicht jedoch für eine quantitative Deutung aus vielen Gründen nicht aus. In der vorliegenden Arbeit wird — über das Übliche hinausgehend — untersucht, welchen Einfluß die Anisotropie des Gitterschwingungsspektrums auf die Leitfähigkeit hat. Es wird also mittels Gitterdynamik die Funktion $\omega(q)$ genau berechnet und in die Theorie eingefügt. An weiteren Verbesserungen ist wichtig: Verwendung einer anderen Transportgleichung [vgl. Kohn und Luttinger, *Phys. Review*, II. Ser. **108**, 590—611 (1957)] und exakte Berücksichtigung der Streuanisotropie bei Umklappprozessen (im Gegensatz zu Ziman, *dies. Zbl.* **56**, 453). Die Ergebnisse liefern — auch im Fall eines äußeren Magnetfeldes — bei tiefen Temperaturen eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten.

W. Klose.

Kaner, É. A. and M. Ja. (M. Ia.) Azbel': Theory of cyclotron resonance in metals. *Soviet Phys., JETP* **6**, 1126—1134 (1958), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **33**, 1461—1471 (1957).

Im Anschluß an zwei Arbeiten der Verff. [*Soviet. Phys., JETP* **3**, 772—774 (1956), Übersetz. von *Zurn. éksper. theor. Fiz.* **30**, 811—814 (1956); und *dies. Zbl.* **80**, 454], in denen sie die inzwischen experimentell bestätigte Zyklotronresonanz in Metallen untersuchen, wird für den Radiofrequenzbereich (bei Anwesenheit eines konstanten, zur Oberfläche parallelen Magnetfeldes) die Oberflächenimpedanz berechnet. Die Abhängigkeit der Oberflächenimpedanz von Temperatur und Feldstärke wird untersucht und gezeigt, wie sich die Form der Fermioberfläche und die Geschwindigkeit der Elektronen in der Fermioberfläche bestimmen lassen. Die Aussagen der Theorie werden mit den Experimenten verglichen. *G. Blankenfeld.*

Blount, E. I.: Ultrasonic attenuation by electrons in metals. *Phys. Review*, II. Ser. **114**, 418—436 (1959).

Die Arbeit beginnt mit einer ausführlichen Diskussion des Vorganges der Energie-dissipation im Formalismus der Boltzmann-Gleichung und mit einer Gegenüberstellung und Kritik der verschiedenen hierbei benutzten Vorstellungen. Der zweite Abschnitt ist der Dynamik der Wechselwirkung zwischen Ultraschallwelle und Elektronen gewidmet, welche sich mit Hilfe eines geeigneten, dem lokalen Gitterzustand angepaßten Koordinatensystems auf ein Deformationspotential (Bardeen und Shockley) und ein langreichweitiges elektromagnetisches Feld, dessen Quelle die durch die Schallwelle bestimmte Stromladungsverteilung ist, zurückführen läßt. Die folgenden Abschnitte enthalten Diskussion und Lösung der Boltzmann-Gleichung unter Verwendung von Relaxationszeiten für verschiedene Bänder-Modelle. Den Beschluß bildet eine Betrachtung des akusto-elektrischen Effektes an Hand der in den vorherigen Abschnitten ausgearbeiteten Überlegungen.

H. Stolz.

Holstein, T.: Theory of ultrasonic absorption in metals: the collision-drag effect. *Phys. Review*, II. Ser. **113**, 479—496 (1959).

Als „collision-drag“-Effekt bezeichnet man die in der halbklassischen Theorie der Ultraschallabsorption gebräuchliche Vorstellung, daß sich unter dem Einfluß einer eingepprägten Schallwelle die Verteilung der Elektronen in einem Metall durch eine um die der Schallwelle entsprechenden lokalen Gittertranslationsgeschwindigkeit verschobene Fermi-Kugel beschreiben läßt. Bei der quantenmechanischen Untersuchung dieses Effektes werden Terme der Gitterverschiebung berücksichtigt, welche bilinear in der thermischen und der eingepprägten Amplitude sind und deren Matrixelemente Prozessen entsprechen, bei denen simultan ein thermisches und ein eingepprägtes Phonon emittiert oder absorbiert werden. Die dargestellte Vorstellung vom collision drag beruht auf der Betrachtung von Wechselwirkungsprozessen, die in

einem raumzeitlichen Intervall lokalisiert sind, welches klein ist gegenüber der Länge und Periode der eingepprägten Schallwelle. Statt der üblichen Störungstheorie mit Bloch-Zuständen hat man daher mit geeignet gebildeten Wellenpaketen zu rechnen. Das führt zu einer Modifikation der Erhaltungssätze für Impuls und Energie, wobei im letzteren statt der Bloch-Energie eine modifizierte Energie eingeht, welche die Summe der Bloch-Energie und eines der lokalen Gittergeschwindigkeit proportionalen Terms ist. Berücksichtigt man dieses Resultat in der Boltzmann-Gleichung für die Elektronenverteilung, so ergibt sich der collision drag. Der Einfluß der bilinearen Matrixelemente auf den Energieverlust der eingepprägten Schallwelle läßt sich ebenfalls mit der Vorstellung der collision drag beschreiben. *H. Stolz.*

Pfennig, H.: Der Einfluß der Umklapp-Prozesse auf den elektrischen Widerstand der Metalle bei tiefen Temperaturen. *Z. Phys.* **155**, 332—349 (1959).

Der aus der Boltzmann-Gleichung für die Verteilungsfunktion der mit den harmonischen Gitterschwingungen wechselwirkenden Kristallelektronen mit Hilfe des Kohlerschen Variationsprinzips in nullter Näherung folgende Ausdruck für die elektrische Leitfähigkeit wird weiter ausgewertet. Es werden sphärische Energieflächen vorausgesetzt. Die Phononen befinden sich im Gleichgewicht. Besonderer Wert wird auf genaue Berücksichtigung der Umklapp-Prozesse gelegt. Der Beitrag der Umklapp-Prozesse wird bis hundertmal größer gefunden als der Beitrag der Normalprozesse. Für tiefe Temperaturen werden die Rechnungen für Alkalimetalle unter Beachtung der elastischen Anisotropie durchgeführt. Die Eigenschwingungen des Gitters werden dabei, ausgehend von den bekannten Eigenschwingungen in Richtung der Flächendiagonalen als nullte Näherung, durch eine Störungsrechnung in zweiter Näherung bestimmt. Außer bei Li wird die gemessene Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit befriedigend wiedergegeben.

H. W. Streitwolf.

Ansel'm, A. I. and I. G. Lang: The theory of two phononic scattering of conductivity electrons in atomic crystals. *Fiz. tverd. Tela* **1**, 683—695 (1959) [Russisch].

Das Potential eines Elektrons in einem Gitter, dessen Gitterpunkte aus den Gleichgewichtslagen verschoben sind, wird bis zur zweiten Näherung nach den Verrückungen der Gitterpunkte entwickelt. Zunächst werden für das in den Verrückungen lineare Glied der Entwicklungen in zweiter Näherung der Theorie von Weißkopf und Wigner [*Z. Phys.* **63**, 18—29, 54—73 (1930)] die Übergangswahrscheinlichkeiten für Zweiphononenprozesse berechnet. Die daraus erhaltene Relaxationszeit stimmt mit der Relaxationszeit für Einphononenprozesse überein. Die Berücksichtigung von Zweiphononenprozessen, die durch das in den Verrückungen bilineare Reihenglied in erster Näherung der Störungstheorie verursacht werden, liefert eine Beweglichkeit proportional T^{-2} . Die Temperatur, bei der die Relaxationszeiten für Einphononen- und Zweiphononenprozesse gleich werden, wird angegeben. Sie beträgt größenordnungsmäßig 10^2 — 10^3 °K. Bei allen Rechnungen werden Umklapp-Prozesse nicht berücksichtigt.

H. W. Streitwolf.

Ehrenreich, H.: Transport of electrons in intrinsic InSb. *Phys. Chem. Solids* **9**, 129—148 (1959).

Mit Hilfe eines modifizierten Kohlerschen Variationsverfahrens werden Transportkoeffizienten (Beweglichkeit, Thermokraft, Hallkoeffizient) berechnet. Dabei wird die parabolische Bandstruktur, akustische und optische Phononwechselwirkung der Ladungsträger, $p - n$ Streuung genau berücksichtigt. Die vorliegende Theorie enthält keine freien Parameter. Die Übereinstimmung mit den Experimenten ist erfreulich.

W. Klose.

Krivoglaз, M. A. und S. I. Pekar: Methode der Spuren für die Leitungselektronen in Halbleitern. I: Schwache Wechselwirkung der Elektronen mit Schwingungen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.* **21**, 3—15 (1957) [Russisch].

Krivoglaz, M. A. und S. I. Pekar: Methode der Spuren für die Leitungselektronen in Halbleitern. II: Variationsmethode. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.* **21**, 16—32 (1957) [Russisch].

Paul, Harry: Zur Theorie der Wärmeleitung in Isolatoren. I, II. *Z. Naturforsch.* **14a**, 535—540, 540—547 (1959).

I. Es wird die Theorie von Peierls [*Ann. der Physik*, V. F. **3**, 1055—1101 (1929)] derjenigen von Casimir [*Physica* **5**, 495 (1938)] gegenübergestellt und gefragt, ob diese nicht im Grunde identisch sind. Die Schwierigkeit bei der Beantwortung liegt darin, daß die Peierlsschen Phononen im unendlich ausgedehnten Kristall definiert sind, die Casimir-Theorie aber einen „dünnen Draht“ voraussetzt mit definierten Randwerten der Temperatur. Nun ist es an sich inkorrekt, die Peierlsche Theorie zur Beschreibung von Wärmeleitungsproblemen zu benutzen, da die Annahme $T(r)$ der Definition der Phononen widerspricht. Man muß sich anschaulich vorstellen, daß grad T sehr klein und daß in relativ großen Bereichen des betrachteten Kristalls $T \approx \text{const}$ ist. Dann denkt man sich solchen Bereich als Bestandteil eines unendlich großen Kristalls und verwendet die alten Ergebnisse. Daran muß auch Verf. gedacht haben, denn er quantelt die Gitterschwingungen eines unendlichen Kristalls und gibt für diese Phononen dann Randwerte der Dichten an, indem er den Kristall irgendwo im Endlichen mit einem Wärmereservoir anderer Temperatur koppelt (entsprechend den Arbeiten von Lebowitz und Bergmann, *dies. Zbl.* **65**, 196; **78**, 412, wird das Wärmebad als kanonische Gesamtheit aufgefaßt, bestehend aus gleichartigen Kristallen (bezüglich der Phononen) wie das zu beschreibende System. Die dem Wärmebad dann zukommende andere Phonondichte wird so an gewissen Punkten dem vorliegenden Kristall aufgezwungen. Im Fall hoher Temperaturen liefert in einem Spezialfall die Betrachtung der Wärmebäder dann denselben Wärmestrom wie die Peierlssche Theorie. Nach Meinung des Ref. ist damit aber nicht die oben erwähnte Schwierigkeit der Peierlsschen Theorie beseitigt. Dieses gelänge nur durch Betrachtung z. B. „lokalisierter Phononen“ einer bestimmten Temperatur. — II. Bei tiefen Temperaturen erweist sich die Formulierung der Theorie des Verf. der Phonentheorie überlegen. Er erhält ein mit Casimir übereinstimmendes Ergebnis.

W. Klose.

Potapkov, N. A.: On the theory of the anisotropy of ferromagnetic single crystals. *Soviet Phys., Doklady* **3**, 89—92 (1958), Übersetz. von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **118**, 269—272 (1958).

Anwendung der Theorie von Dyson [*Phys. Review*, II. Ser. **102**, 1217—1230 (1956)] auf einen anisotropen Ferromagneten mit hexagonaler Symmetrie.

H. Klose.

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

● Katsis, D. N.: The calendar and the Easter's rule. Athen 1959. 78 p; engl. Zusammenfassg. 1 p. [Neugriechisch].

Moderne Einführung in die Kalenderwissenschaft mit Formeln und Tafeln, unter besonderer Berücksichtigung der östlichen und westlichen Osterregeln.

H. T. Hermelink.

Sconzo, Pasquale: Il calcolo della posizione e della velocità nel problema della determinazione di un'orbita. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **24**, 422—427 (1958).

In den Gleichungen $\varrho \cos \delta_i \cos \alpha_i = f_i x_0 + g_i \dot{x}_0 + X_i$; $\varrho \cos \delta_i \sin \alpha_i = f_i y_0 + g_i \dot{y}_0 + Y_i$; $\varrho \sin \delta_i = f_i z_0 + g_i \dot{z}_0 + Z_i$ ($i = 1, 3$), wo x, y, z die cartesischen Koordinaten des Planeten und X, Y, Z die cartesischen Koordinaten der Sonne bedeuten, sind die f und g in der Form der Lagrangeschen Reihen gegeben

$$f = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} F_{\nu}^1 \tau^{\nu}; \quad g = \tau + \sum_{\nu=3}^{\infty} G_{\nu} \tau^{\nu} \quad (\tau = k(t - t_0)).$$

Es wird gezeigt, wie im Rahmen der Wilkenskischen Methode der Bahnbestimmung der Ausgangsort $x_0 = x_2$, $y_0 = y_2$, $z_0 = z_2$ und die Ausgangsgeschwindigkeit \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , \dot{z}_0 mittels der Methode der sukzessiven Approximationen ausgehend von $f = 1$ und $g = \tau$ zweckmäßigst berechnet werden kann. *J. Fleckenstein.*

Kikuchi, S.: Berichtigungen zur Abhandlung „Über die Verteilungen der galaktozentrischen Keplerschen Bahnelemente. I.“ Sci. Reports Tōhoku Univ., I. Ser. 42, 252 (1959).

Betrifft die in diesem Zbl. 81, 239 besprochene Arbeit.

Kikuchi, Sadaemon: Über die Verteilungen der galaktozentrischen Keplerschen Bahnelemente. II. Sci. Reports Tōhoku Univ., I. Ser. 42, 39—47 (1958).

In Fortsetzung von Teil I (dies. Zbl. 81, 239) werden die dort abgeleiteten Häufigkeitsfunktionen der Bahnelemente π , θ ; a , e ; I_1 , I_2 auf diejenigen der Schnellläufer übertragen. Bei der Bestimmung dieser Funktionen ist die vorhergehende Untersuchung der Existenzgebiete k in den Räumen von (π, θ) (a, e) (I_1, I_2) entscheidend (§ 1). Für die Anzahl von Schnellläufern schneller als ϱ ergibt sich damit

$$N(\varrho) = n \int_{-\infty}^{\infty} \int F(\pi, \theta) d\pi d\theta - n \int \int_{k(\varrho)} F(\pi, \theta) d\pi d\theta,$$

wo n die Anzahl aller Sterne ist und aus Teil I die Funktion

$$F(\pi, \theta) = (\sqrt{\alpha g/2\pi}) \text{Exp}(\alpha \pi^2 + g(\theta - \theta_0)^2)$$

entnommen werden kann. Die Verteilungen $F(a, e)$ und $F(I_1, I_2)$ sind nun denen ähnlich, die im Teil I. abgeleitet wurden. Daraus wird geschlossen, daß der Schnellläufer nur ein schnellerer Stern ist, der mit den gewöhnlichen Sternen einer gemeinsamen ellipsoidischen Geschwindigkeitsverteilung angehört. Im Anhang ist noch die Verteilung der Geschwindigkeitsrichtungen von Sternen relativ zur Sonne anstatt relativ zum lokalen Zentroid gegeben. *J. Fleckenstein.*

Davidson, W.: The red shift-magnitude relation in observational cosmology. Monthly Not. roy. astron. Soc. 119, 54—66 (1959).

Es werden Formeln für die Rotverschiebung-Entfernungsbeziehung abgeleitet, die es ermöglichen, durch Vergleich mit der Beobachtung nicht nur auf die Raumstruktur der Welt zu schließen, sondern auch etwaige bei den außergalaktischen Nebeln auftretende Entwicklungseffekte festzustellen. *H. Vogt.*

Meek, B. L.: On the shape of cometary tails. Monthly Not. roy. astron. Soc. 119, 3—10 (1959).

Unter der Voraussetzung, daß der Kopf eines Kometen aus einem diffusen Schwarm verschieden großer Partikel besteht, werden die Bahnen und die spätere räumliche Verteilung der sich in der Nähe des Perihels (unter der Einwirkung des von der Sonne ausgehenden Strahlungsdruckes oder auch anderer äquivalenter dynamischer Effekte) von dem Kometenkopf loslösenden Partikeln diskutiert und eine Erklärung für die Form der Kometenschweife nach dem Periheldurchgang der Kometen zu geben versucht. Die Ergebnisse werden dann angewandt auf den Kometen Arend-Roland 1956 *h* mit seinem anomalen gegen die Sonne gerichteten Schweif. *H. Vogt.*

Oster, Ludwig: Der kontinuierliche Absorptionskoeffizient für Frei-Frei-Strahlung im radiofrequenten Spektralgebiet. Z. Astrophys. 47, 169—190 (1959).

Es werden noch einmal die bekannten Formeln für den Emissionskoeffizienten (und unter der Voraussetzung zumindest des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts damit auch des Absorptionskoeffizienten) sowie des Absorptionskoeffizienten direkt (unter Benutzung eines Ausdrucks für die mittlere Stoßzahl) für die kontinuierliche Radiostrahlung übersichtlich zusammengefaßt und diskutiert. *G. Wallis.*

Hofmann, O.: Ein neues astasiertes Pendel für genaue Neigungsmessungen und automatische Stabilisierung von Ziellinien. Jenaer Jahrbuch 1958, 63—183 (1958).

Bei Nivellierinstrumenten und Geräten, die zur genauen Anzeige von Neigungen gegenüber der Lotrichtung dienen, wird die Libelle mehr und mehr durch mechanische Pendel verdrängt, wobei die Möglichkeit zu einer selbsttätigen Horizontierung dieser Instrumente geboten ist. Verf. gibt zunächst einen Überblick über die bekannten Vorrichtungen zur automatischen Stabilisierung von Ziellinien und beschreibt dann das Arbeitsprinzip eines von ihm auf rein mechanischer Grundlage entwickelten, neuartigen astasierten Pendels mit fester Drehachse. Ein solches Pendel ist dadurch gekennzeichnet, daß innerhalb des Arbeitsbereichs die Pendelneigung β zur Neigung α der Gerätebasis in einem praktisch linearen, vom Konstrukteur wählbaren Verhältnis steht. Dieses Verhältnis ist eine Funktion der geometrischen Dimensionen und der Gewichtsverhältnisse des Pendels und wird als Vergrößerungsfaktor bezeichnet. Er wird vom Verf. mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebung berechnet und ist im Gegensatz zu den durch Federkräfte astasierten Pendeln von der Erdbeschleunigung unabhängig. Verf. untersucht die Schwingungseigenschaften des Pendels, die Abweichungen vom linearen Verlauf und die Auswirkung kleiner, thermisch oder mechanisch verursachter Dimensionsänderungen auf den Vergrößerungsfaktor. Sehr eingehend werden die Konstruktionselemente behandelt, da die angestrebte Meßgenauigkeit von 0,1'' hohe Anforderungen an die Achsen und Gelenke stellt. Für die Drehachsen erweisen sich Kreuzbandgelenke, die aus zwei gekreuzten Bändern bestehen, als besonders vorteilhaft. Verf. berechnet die Momentandrehzentren von eingespannten dünnen Drähten und Bändern sowie die vom Pendelausschlag, vom Vergrößerungsfaktor und von den geometrischen Dimensionen abhängigen Deformationen der Drähte und Bänder. Auf Grund der theoretischen Untersuchungen werden für verschiedene Verwendungszwecke die jeweils optimalen Konstruktionsbedingungen angegeben. Schließlich wird über Meßergebnisse und Erfahrungen mit einem Versuchsmodell berichtet, die erkennen lassen, daß das Pendel eine hohe Einspiel- und Ablaufgenauigkeit, Nullpunktsicherheit und bei Berücksichtigung gewisser Konstruktionsbedingungen auch Resonanzfestigkeit besitzt. Die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten werden an einer Reihe von Beispielen aufgezeigt, insbesondere für Nivellierinstrumente, wo das mit Spiegeln versehene Pendel sowohl im konvergenten Strahlengang als auch vor dem Objektiv als Kompensator zur automatischen Horizontierung der Ziellinie angeordnet werden kann. *W. Hofmann.*

Cook, A. H.: The calibration of gravity meters by comparison with pendulums. *Geophys. J. roy. astron. Soc.* **1**, 18—31 (1958).

Um Gravimeter zuverlässig für einen größeren Meßbereich eichen zu können, sind in den letzten Jahren in den USA und in Europa Eichlinien bzw. Eichnetze angelegt worden, in deren nordsüdlichem Verlauf ein Schwereunterschied von insgesamt etwa 3000 mgal als Vergleichsintervall zur Verfügung steht. In dem durch Stationen mit einem Niveauabstand von einigen Hundert mgal unterteilten Netz sind die Schwereunterschiede durch relative Pendelmessungen mit größter Sorgfalt bestimmt. Aus dem Vergleich von Gravimeterablesungen mit den Pendelwerten erhält man den Eichfaktor des Gravimeters sowie etwaige Abweichungen der Eichfunktion von der Linearität. Da die relative Meßgenauigkeit der Gravimeter meist beträchtlich höher ist als die der Pendel, treten neben dem Eichfaktor auch die Schwereunterschiede des Netzes als Unbekannte auf und sind gemeinsam mit dem Eichfaktor im Wege der Ausgleichung zu bestimmen. Hierfür sind verschiedene Methoden vorgeschlagen und praktisch erprobt worden. Weitgehend ungeklärt blieb jedoch bisher die Frage nach der zweckmäßigsten Anordnung der Beobachtungen, die bei diesen zeitraubenden und kostspieligen Messungen besondere Bedeutung hat. Verf. gibt nun für den allgemeinen Fall dieses Problems auf Grund der mathematischen Statistik und der Methode der kleinsten Quadrate eine erschöpfende Analyse der Genauigkeitsfragen, woraus wichtige Hinweise für die Planung der Beobachtungen gewonnen werden. Die mit Hilfe der Matrizenrechnung abgeleiteten Formeln lassen

insbesondere die Abhängigkeit des Eichfaktors von dem Gewichtsverhältnis erkennen, das zur Berücksichtigung der unterschiedlichen Genauigkeit der Gravimeter- und Pendelmessungen eingeführt wird und das erfahrungsgemäß mit einer beträchtlichen Unsicherheit behaftet ist. Es zeigt sich, daß der Eichfaktor nur dann unabhängig vom Gewichtsansatz erhalten wird, wenn das Gravimeternetz mit dem Netz der Pendelbeobachtungen identisch ist und die Netze keine überschüssigen Beobachtungen enthalten. Diese Bedingungen sollten daher bei Gravimetreichungen möglichst erfüllt sein. Für den Fall, daß Gravimeternetz und Pendelnetz überschüssige Beobachtungen enthalten und getrennt voneinander ausgeglichen sind, werden Formeln abgeleitet, die es gestatten, den Eichfaktor des Gravimeters und den zugehörigen mittleren Fehler aus den Verbesserungen zu berechnen, welche die getrennte Ausgleichung den Pendel- und Gravimeterbeobachtungen zuweist. Solche Formeln lassen sich in allgemeiner Form jedoch nur dann aufstellen, wenn beide Netze identisch sind. Weitere Untersuchungen sind der Behandlung korrelierter Beobachtungen gewidmet. Die auf theoretischem Wege gewonnenen Ergebnisse werden abschließend zu einer kritischen Betrachtung der Methoden von Martin, Marussi und Kneissl herangezogen, wobei allerdings nicht übersehen werden darf, daß bei der praktischen Durchführung der Messungen im Schweregrundnetz neben der Eichung von Gravimetern vielfach noch andere Gesichtspunkte eine Rolle spielen.

W. Hofmann.

Ruplis (Ruplys), B. P.: Calculation of the underground contour of hydrotechnical structures in earth foundations. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1959, 594—598, russ. und engl. Zusammenfassg. 598—599 (1959) [Ukrainisch].

Fel'zenbaum (Felsenbaum), A. I.: On extension of the theory of steady currents in a shallow sea to the case where the coefficient of vertical exchange is a variable. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 113, 86—89 (1957) [Russisch].

Verf. geht aus von den Grundgleichungen der stationären Strömungen eines flachen Meeres. Der vertikale Austauschkoeffizient wird als variabel betrachtet. Er wird als Produkt von Windgeschwindigkeit, Flüssigkeitshöhe und einer nur von der Höhe z abhängigen Funktion $\varphi(z)$ angesetzt. Das Randwertproblem wird formuliert und insbesondere der Fall betrachtet, daß $\varphi(z)$ ein Potenzgesetz ist. Verf. zieht aus diesen Gleichungen einige Schlüsse über das Strömungsfeld und weist auf Ähnlichkeiten bei Meeresströmungen in der Natur hin.

J. Zierep.

Fel'zenbaum (Felsenbaum), A. I.: Theoretical foundations for calculating the ice drift in the Central Arctic basin. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 113, 307—310 (1957) [Russisch].

Verf. entwickelt die theoretischen Grundlagen für eine Berechnung der Eisbewegung in der Arktis. Betrachtet wird der stationäre Fall, nachdem gegebenenfalls über einen hinreichend langen Zeitraum gemittelt worden ist. In den Grundgleichungen, die die Bewegung von Luft, Eis und Seewasser miteinander verknüpfen, wird sowohl von den nichtlinearen konvektiven Gliedern als auch vom horizontalen Austausch abgesehen. Berücksichtigt wird dagegen ein konstanter vertikaler Austauschkoeffizient sowohl im Seewasser als auch in der Luft und die Drehbewegung der Erde. Nach Formulierung der Grenz- und Randbedingungen gelingt es dem Verf., die Randwertaufgabe für die Driftgeschwindigkeit des Eises im wesentlichen auf die Lösung der Potentialgleichung für eine Hilfsfunktion bei geeigneten Randvorgaben zurückzuführen. Als Endergebnis gibt Verf. eine Darstellung für die Driftgeschwindigkeit des Eises in Form von zwei additiven Termen. Der erste stellt die reine Winddrift dar, das ist die Geschwindigkeit, die durch die Zugwirkung der Luft auf das Eis bedingt ist; während der zweite Term die „gradienten Drift“ ist, das ist die durch die Gradientenströmung der Luft erzeugte Drift. Abschließend wird auf Bestätigungen dieser Theorie durch Beobachtungsergebnisse hingewiesen.

J. Zierep.

Fel'zenbaum (Felsenbaum), A. I.: On the tightening and loosening of ice fields in the Arctic basin. Doklady Akad. Nauk. SSSR 116, 217—220 (1957) [Russisch].

Ausgehend von den Ergebnissen einer früheren Arbeit (s. vorstehendes Referat) bestimmt Verf. die Divergenz der stationären Eisdriftgeschwindigkeit in der Arktis. Diese Größe ist ein Maß für die Dichte der Eispackung (tightning and loosening). Diese Divergenz erweist sich als proportional zum ebenen Laplace Operator des atmosphärischen Druckes. Dadurch ergeben sich interessante Zusammenhänge zwischen dem Verhalten des atmosphärischen Druckfeldes und der Eispackung. Verf. versucht dann nach Behandlung des stationären Falles, die instationären Einflüsse in angenäherter Form zu berücksichtigen.

J. Zieryep.

Welch jr., Jasper A., and William A. Whitaker: Theory of geomagnetically trapped electrons from an artificial source. Proc. nat. Acad. Sci. USA 45, 1190—1208 (1959).

This paper reports some of the theoretical predictions and interpretations for the Argus experiment. This experiment consisted of three small yield nuclear detonations approximately 300 miles above the South Atlantic Ocean in the late summer of 1958. Beta decay of the fission products from the explosions injected relativistic electrons into trapped orbits in the geomagnetic field. It is the history of these electrons with which we are concerned here. Aus der Einleitung d. Autoren.

Hollmann, Günther: Transformation der Grundgleichungen der dynamischen Meteorologie in Koordinaten der stereographischen Projektion zum Zwecke der numerischen Vorhersage. Beitr. Phys. Atmosph. 31, 162—176 (1959).

Die heute vorwiegend verwendeten synoptischen Wetterkarten benutzen die stereographische Projektion des betrachteten Erdkugelstückes auf ein Stück der Ebene. Da diese Abbildung nicht flächentreu ist, ist es unerlässlich, Verzerrungsfaktoren in den Grundgleichungen der dynamischen Meteorologie zu berücksichtigen, falls man in kartesischen Koordinaten arbeitet. Verf. leitet diese Umrechnungsgleichungen erstmalig für alle in der Meteorologie geläufigen Gleichungen und Größen her, wobei die Atmosphäre dreidimensional abgebildet wird. Abschließend wird gezeigt, daß das bisher häufig verwendete barotrope Modell diese Verzerrung nur zum Teil benutzt und daher merkliche Fehler entstehen können.

J. Zieryep.

Maškovič (Mashkovisch), A. S.: On the atmospheric pressure numerical prediction by means of high-speed electronic computer. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 245—248 (1957) [Russisch].

Ausgehend von den atmosphärischen Bewegungsgleichungen in der von Sutcliffe und Van Mieghem transformierten Form, in der der Druck als unabhängige und die Höhe oder das Geopotential H als abhängige Variable erscheint, wird eine Differentialgleichung für $\partial H / \partial t$ (t = Zeit) abgeleitet. Sie ist von elliptischem Typ. Eine Integraldarstellung für $\partial H / \partial t$ läßt sich mit Hilfe der Greenschen Funktionen angeben. Durch schrittweise Näherung läßt sich schließlich $H(t)$ selbst berechnen. Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn man von einem polytropen Atmosphärenmodell ausgeht. Die numerischen Rechnungen wurden auf einer Rechenmaschine der Akad. Wiss. der UdSSR durchgeführt. Es wurden die meteorologischen Beobachtungsdaten von Europa und Westsibirien verarbeitet. Punktabstand 250 km. Die Rechenzeit für eine 24-Stunden-Prognose betrug 40 Minuten. Ein Beispiel ist in Form von 3 Wetterkarten angegeben.

W. Kertz.

Hsieh, Yi-ping and Yao-sen Wang: Some computational results of Austausch coefficients over eastern asia. Science Record, n. Ser. 3, 92—95 (1959).

Verff. berechnen die Austauschkoeffizienten in der freien Atmosphäre mit Hilfe vereinfachter Bewegungsgleichungen aus Wetterkarten. Es ergeben sich charakteristische Verteilungen dieser Koeffizienten und Zusammenhänge mit dem Temperaturfeld. Die Größenordnung ($5 \cdot 10^8 \text{ gem}^{-1} \text{ sec}^{-1}$) entspricht etwa dem Maxi-

zum dessen, was man bei großräumigen Bewegungen bisher erwartete.

J. Zieryep.

Chu, Pao-chen: The steady perturbations of the westerlies by large-scale heat sources and earth's orography. *Science Record*, n. Ser. 1, Nr. 3, 37—42 (1957).

Verf. geht aus von der vorticity-Gleichung im stationären Fall und betrachtet ein baroklines Zweischichtenmodell. Für eine geringfügige Störung einer zonalen Grundströmung kommt für die meteorologischen Variablen ein System von partiellen Differentialgleichungen in Anwendung, in welchem Verf. außer der Orographie auch noch Wärmequellen berücksichtigt. Die Differentialgleichungen werden durch Fourierintegrale gelöst, und es wird der Einfluß von Orographie und Wärmequellen auf die Grundströmung bestimmt. Die für spezielle Fälle gewonnenen Ergebnisse stimmen gut mit den Beobachtungen überein.

J. Zieryep.

Merbt, H.: Solution of the two-dimensional lee-wave equation for arbitrary mountain profiles, and some remarks on the horizontal wind component in mountain flow. *Beitr. Phys. Atmos.* 31, 152—161 (1959).

Die zweidimensionale Leewellengleichung, die im Falle konstanter Anströmung von der Form der Wellengleichung ist, wird auf elliptische Koordinaten transformiert und durch Reihen Mathieuscher Funktionen gelöst. Hierdurch gelingt es, das Strömungsphänomen für nahezu beliebige Hindernisformen anzugeben. Abschließend folgen einige Bemerkungen über die Horizontalkomponente der Windgeschwindigkeit, die in Höhen von 8—13 km zu einem Strahlstrom Anlaß geben kann.

J. Zieryep.

Townsend, A. A.: The effects of radiative transfer on turbulent flow of a stratified fluid. *J. Fluid Mechanics* 4, 361—375 (1958).

Das klassische Richardson-Kriterium für turbulente Strömungen zeigt, wenn man es formal auf große Höhen der Atmosphäre (70—100 km) anwendet, daß es äußerst unwahrscheinlich ist, daß dort Turbulenz vorliegen soll. Dies dürfte im Widerspruch stehen zu den Meß- und Beobachtungsergebnissen, die im letzten Jahrzehnt gewonnen wurden. (Verhalten des Ionosphärenechos, leuchtende Meteorschweife.) Verf. erweitert daher die Richardsonschen Betrachtungen durch Mitnahme der Strahlung. Er zeigt, daß der Strahlungseinfluß dem stabilisierenden Effekt der Dichteschichtung entgegenwirkt. An Hand von verschiedenen Beispielen, die der betrachteten Atmosphärenhöhe entsprechen können, wird mit dem erweiterten Kriterium nachgewiesen, daß durchaus Turbulenz vorliegen kann.

J. Zieryep.

Liu, Chen-hsing: The regularity of the atmospheric turbulent exchange in the surface layer. *Science Record*, n. Ser. 2, 175—181 (1958).

Verf. betrachtet die verschiedenen Austauschkoeffizienten in der bodennahen Schicht der Atmosphäre im Fall stabiler und instabiler Schichtung. Es wird untersucht, in welcher Form sich diese Koeffizienten durch die Richardson-Zahl ausdrücken lassen. Verf. gibt ein universelles Gesetz an, das von den Experimenten befriedigend bestätigt wird.

J. Zieryep.

Frenkiel, J. and S. Zacks: Wind-produced energy and its relation to wind regime. *Bull. Res. Council Israel*, Sect. A 6, 189—214 (1957).

Verff. entwickeln drei Verfahren (zwei analytische und ein graphisches) zur Bestimmung der von einem Windgenerator erzeugten Energie. Hierbei werden zwei Typen von Generatoren betrachtet, die durch verschiedene „Charakteristiken“ beschrieben werden. In die rechnerischen Betrachtungen geht eine experimentell zu ermittelnde Funktion ein, die den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Windgeschwindigkeit herstellt. Verff. führen die Untersuchungen für verschiedene Orte in Israel durch. Abschließend wird diskutiert, welche der beiden Größen: die mittlere Windgeschwindigkeit oder die Energie des Windes besser die vom Generator abgegebene Energie zu charakterisieren gestattet.

J. Zieryep.